# 21. 記號解析に就て

所員　河田龍夫

## §1. 序

記号解析に就て若干の紹介を試みるのが本稿の目的である。数学的には尚充分厳密でない所が極めて多いが、併し又実用上の價値は非常に大きく、是非とも数学者の手で厳密にして充分活用出きる様にしたいものである。筆者も是に就て幾分手掛けつゝあるが是は又別の折に致したい。

元来Heavisideが創始者で演算子法（operational Calculus）と呼んだが、尚屡々記号法（symbolic Calculus）とも云はれてゐる。Heaviside自身は純数学的の観点から見て厳密さを究める事よりも寧ろ定積分法の簡単化，微分方程式の解法等に便利な方法を提供する事で満足した。後，Carson次でP. Lévyがこの方法に数学的な根拠を與へた。続いて多くの研究者がこの問題に興味をもつて莫大な文献が現在ある。（例へばmclachlan, complex variables and operational calculus with technical application 參照　飜版がある）　併し尚数学的厳密化擴張は寧ろ

是からの問題であらう。

## §2. Laplace 積分

一つの函数 $h(x)$ が与へられ是に就て吾々は研究するとする。この $h(x)$ に對して Carson の積分又は本質的に Laplace の変換

$$(1) \quad f(p) = p\int_0^\infty e^{-px} h(x)\,dx \qquad (p\text{ ; 複素数})$$

は對応さして考へる。無論この積分が存在するためには $h(x)$ がある種の條件を満足することが必要である。$h(x)$ は $f(p)$ から一般に Fourier の変換によって

$$(2) \quad h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{-px}\,\frac{f(p)}{p}\,dp$$

で求まる。積分は適當な道に沿ってとる。この積分は Bromwick-Wagner の積分といはれてゐる。この二つの函数は記号的に對応してゐると云ひ

$$(3) \quad f(p) \fallingdotseq h(x)$$

と書く。

(1)の存在のために $h(x)$ は有限區間では可積分で、ある定数 $p_0$ に對して $\int_0^\infty e^{-p_0x}|h(x)|\,dx$ が存在するとする。そうすると $R(p) \geqq p_0$ でこの積分は一様且絶對收斂し $R(p) > p_0$ で正則な函

数を表す事が容易に証明される。そうすると $C > p_0$ なる任意の $C$ に対して

$$(4) \qquad h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-px}\frac{f(p)}{p}\,dp.$$

が成立する。茲に $x$ といふ点の近傍で $h(x)$ が有界変分の函数で且 $x$ で連続とする。積分は Cauchy の主値 $\lim\limits_{A\to\infty}\int_{c-iA}^{c+iA}$ の意味にとる。$x$ で $h(x)$ が不連続ならば (4) は

$$\frac{h(x+0)+h(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-px}\frac{f(p)}{p}\,dp$$

の形をとる。これ等の意味は更に拡張して考へることも出来るが今はこれには触れない。

§ 3. 公式 (I)

以下 (1) の形の Laplace の積分に對してはある $p_0$ に對して上の條件が満足されてゐるものとし、(3) の形に書いたときは $p$ は $R(p) > p_0$ で考へ $h(x)$ は不連続点では $\frac{1}{2}(h(x+0)+h(x-0))$ に等しいものと考へておく。

尚厳密な證明は省いて (是等に就ては是非有志の分は試みて頂きたい。実は厳密な條件の議論さ

れてゐない公式もあるのであつてこの点にも研究の余地がある）種々の公式は導いておく。

$f_1(p) \doteqdot h_1(x)$ , $f_2(p) \doteqdot h_2(x)$ ならば

(A) $f_1(p) \pm f_2(p) \doteqdot h_1(x) \pm h_2(x)$ (1)

是は明かであろう。

$k>0$ として (1) で $p$ の代りに $kp$ として（従つて実を云へば $p$ は $\frac{p_0}{k}<p$ で考へねばならない）

$$f(kp)=kp\int_0^\infty e^{-kpx}h(x)\,dx$$

$x$ は $\frac{x}{k}$ でおきかへて

$$(5) \qquad f(kp)=p\int_0^\infty e^{-px}h\left(\frac{x}{k}\right)dx.$$

故に

$$(B) \qquad f(kp)\doteqdot h\left(\frac{x}{k}\right)$$

是は $k$ は複素数でも $p$ の範囲を変へると成立する。判きりした條件を與へる事が望ましい。

(5) の両辺は $k$ で微分すると

$$pf'(kp)'=-p\int_0^\infty \frac{x}{k^2}e^{-px}h'\left(\frac{x}{k}\right)dx$$

---

註(1) 勿論 $f_1(p)$ ; $f_2(p)$ 絶對積分可能に對する Laplace 積分が何れも $R(p)=p_0$ で絶對積分可能で $R(p)>p_0$ で (5) が成立するといふ意味である。同様な注意は以下常に必要なのである。

従て $$p f'(kp) \doteqdot -\frac{x}{k^2} h'\left(\frac{x}{k}\right)$$

$k=1$ として

(C) $$-pf'(p) \doteqdot x h'(x)$$

(適当な條件の要るのは勿論である)丁度形式的には(B)の両辺を$k$で微分して$K=1$とおいた其の儘の形である。(C)は何回も適用して

$$\left(-p\frac{d}{dp}\right)^n f(p) \doteqdot \left(x\frac{d}{dx}\right)^n h(x)$$

が得られる。

§4. 公式II

$pf(p)$に對する元の函数は如何、を考へる。

$$pf(p) = p^2\int_0^\infty e^{-px} h(x)\,dx$$

とかく、部分積分法によって

$$\int_0^\infty pe^{-px}h(x)\,dx = \left[-e^{-px}h(x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-px}h'(x)\,dx$$

$h(x)$は連続($h'(x)$が存在するから)で$h(0)=0$とし又$\lim_{x\to\infty} e^{-px}h(x) = 0$

とすれば

(6) $$pf(p) = p\int_0^\infty e^{-px}h'(x)\,dx$$

が成立する。

厳密に云へば $h(x) = \int_0^x h'(x)\,dx$ で $h(x)e^{-px}$ が

$R(p) > p_0$ で絶對積分可能とすれば (6) が成立する。$e^{-px}h(x) \to 0\ (x \to \infty)$ は自然出てくる。又或る意味で逆も成立する。(15節参照)

(6) は

$$(D) \qquad pf(p) \doteqdot h'(x) \qquad (h(0)=0)$$

と表しておく。更に一般に

$$p^n f(p) \doteqdot \frac{d^n}{dx^n} h(x)$$

次に定積分 $\int_0^x h(u)\,du$ に對応するものを考へる。定義により

$$p\int_0^\infty e^{-px}dx\int_0^x h(u)\,du$$

是は部分積分によつて

$$\int_0^\infty e^{-px}h(x)\,dx$$

に等しい。故に

$$(E) \qquad \frac{f(p)}{p} \doteqdot \int_0^x h(u)\,du$$

是も極めて形式的な操作であるけれど，これが事実真であるための條件を考へる事は容易であろう。以下嚴密な條件に就ての注意なしに主な公式を列挙して，吾々の目的を只應用といふ方向に向ける。

§5. 公式（III）

(F) $$-p\frac{d}{dp}\frac{f(p)}{p} \doteqdot x\,h(x)$$

又一般に

(F') $$(-p)^n\left(\frac{d}{dp}\right)^n\frac{f(p)}{p} \doteqdot x^n h(x)$$

(G) $$\int_0^p \frac{f(w)}{w}\,dw \doteqdot \int_x^\infty \frac{h(u)}{u}\,du$$

(H) $$\int_p^\infty \frac{f(w)}{w}\,dw \doteqdot \int_0^x \frac{h(u)}{u}\,du$$

(G)(H)から

(H') $$\int_0^\infty \frac{f(w)}{w}\,dw = \int_0^\infty \frac{h(u)}{u}\,du$$

が得られる。(G),(H)は函数論的に興味ある公式であるが充分な検討は実際には行はれてゐない様である。

(I) $$\frac{pf(p+\lambda)}{p+\lambda} \doteqdot e^{-\lambda x}h(x)$$

（λは任意の数）

(J) $$e^{-\lambda p}f(p) \doteqdot 0, \quad x<\lambda,$$
$$\doteqdot h(x-\lambda) \qquad x>\lambda,$$

茲に $\lambda>0$ とする。

(K) $$e^{\lambda p}f(p) \doteqdot h(x+\lambda)$$

但し $0<x<\lambda$ で $h(x)=0$ とする。

$$(L)\quad \frac{1}{p}f_1(p)f_2(p) \doteqdot \int_0^x h_2(x-y)h_1(y)\,dy$$

但し $f_1(p) \doteqdot h_1(x)$, $f_2(p) \doteqdot h_2(x)$

§6. 簡單な例

簡單な例を挙げやう。以下実際出て来る函数に上の公式を當嵌めるとき，その條件が満足されるのであるがその一々の反省は略しておく。

$\Gamma$－函数の定義から

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx \qquad n,\ 正数$$

$x$の代りに$px$ヲ置換して

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-px}x^n p^{n+1}\,dx$$

故に

$$(8)\qquad \frac{1}{p^n} \doteqdot \frac{x^n}{\Gamma(n+1)}\ ,\quad n>0$$

$n$が正整数ならば

$$\frac{1}{p^n} \doteqdot \frac{x^n}{n!}\ ,$$

さて $e^x=\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$ であるから $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{p} \doteqdot e^x$,

$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{p^n}=\frac{p}{p-1}$ であるから $\frac{p}{p-1} \doteqdot e^x$

$\sin x$, $\cos x$, $Si x$, $Ci x$，等に就て考へる。

(B) によって

$$\frac{kp}{kp-1} \doteqdot e^{\frac{x}{k}}$$

$k=\frac{1}{i}$ とおいて

$$\frac{p}{p-i} \doteqdot e^{ix}$$

是から

$$(9) \qquad \frac{p^2}{p^2+1} \doteqdot \cos x,$$

$$(10) \qquad \frac{p}{p^2+1} \doteqdot \sin x$$

(D) によって

$$p\,\frac{p}{p^2+1} \doteqdot \frac{d}{dx}\sin x$$

で是は $\frac{p^2}{p^2+1} \doteqdot \cos x$ となって前の方が後半からも得られる。同様に (E) を用ひて

$$\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \int_0^x \sin x\,dx$$

$$\frac{1}{p^2+1} = 1-\frac{p^2}{p^2+1} \doteqdot 1-\cos x$$

であるから前半から後半も得られる。

この例に (G) を適用すると興味ある結果が得られる。

$$\int_0^p \frac{dw}{w^2+1} \fallingdotseq \int_x^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = Si(x)$$

$$\int_0^p \frac{w\,dw}{w^2+1} \fallingdotseq \int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = Ci(x)$$

即ち　(11)　$-\arctan p \fallingdotseq Si(x)$

(12)　$-\log\sqrt{p^2+1} \fallingdotseq Ci(x)$

(G)(H) から Frullani の公式の形式的な証明が得られる：

$$(13)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-abx}-e^{-bx}}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}$$

何となれば

$$\frac{p}{p-1} \fallingdotseq e^{x} \qquad 故に\quad \frac{p}{p+a} \fallingdotseq e^{-ax}$$

同様に $\dfrac{p}{p+b} \fallingdotseq e^{-bx}$。

即ち $\dfrac{p}{p+a} - \dfrac{p}{p+b} \fallingdotseq e^{-ax} - e^{-bx}$.

依て (H) により

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b}\right)dp = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$

で左辺は $\log b/a$

次に $\dfrac{P(n+1)}{p^n} \fallingdotseq x^n$ であるから是を $n$ で微分して

$$\frac{1}{p^n}\frac{d}{dn}\Gamma(n+1)+\Gamma(n+1)\frac{d}{dn}\frac{1}{p^n} \doteqdot \frac{d}{dn}x^n$$

然るに

$$\frac{d}{dn}x^n = x^n \log x, \quad \frac{d}{dn}\frac{1}{p^n} = \frac{1}{p^n}\log\frac{1}{p}$$

又

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)}\frac{d}{dn}\Gamma(n+1) = \Psi(n+1)$$

茲に $\Psi(x)$ は $\Gamma(x)$ の對数微分である。

上の式から

$$(14) \qquad \frac{\Gamma(n+1)}{p^n}\left[\Psi(n+1)+\log\frac{1}{p}\right] \doteqdot x^n \log x$$

が得られた事になる。 $n \to 0$ として[(1)]

$$(15) \qquad \log\frac{1}{p} - \gamma \doteqdot \log x$$

## § 7. Beta 函数

$$\int_0^x (x-y)^{m-1} y^{n-1}\, dy$$

を考へる。$h_1(x) = x^{n-1}$, $h_2(x) = x^{n-1}$ $(m>0,\ n>0)$ とすれば $f_1(p) = \frac{\Gamma(m)}{p^{n-1}}$, $f_2(p) = \frac{\Gamma(n)}{p^{n-1}}$

---

(1) lim がとれる事は無論証明が要る。一般の定理が欲しい。併し是はやって見ればその條件は容易に出せる。

故に

$$\frac{1}{p} f_1(p) f_2(p) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{p^{m+n-1}}$$

然るに

$$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{p^{m+n-1}} \fallingdotseq \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} x^{m+n-1}$$

故に

$$\int_0^x (x-y)^{m-1} y^{n-1} dy = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} x^{m+n-1}$$

即ち

$$(16) \qquad B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

である。

## § 8. 微分方程式の解法

上の記号法で微分方程式を解かう。先づ線型微分方程式を考へる。

$x$ が独立変数で未知函数は $y = y(x)$ とする。

$y(x)$ の Laplace 変換を

$$(17) \qquad F(p) = \int_0^\infty e^{-px} y(x)\, dx$$

とする。明かに $f(p) = pF(p)$

$xy(x)$ の Laplace 変換は $\int_0^\infty e^{-px} x y(x)\, dx$ で是は $\frac{dF(p)}{dp}$ に等しい。

$y'(x)$ に就てはその Laplace 変換は

$$\int_0^\infty e^{-px} y'(x)\,dx$$

$\lim_{x\to\infty} e^{-px} y(x) = 0$ （ある $R(p) \geqq p_0$ で）とすると

部分積分により

$$\left[e^{-px} y(x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty p e^{-px} y(x)\,dx$$

であるから

$$-y(0) + pF(p)$$

となる。一般に $\infty$ に於ける適當な條件の下に（ある $p_0 > 0$ に對し $y^{(n)}(x)e^{-p_0 x} \to 0$）Laplace 変換の下の如き表が得られる．右側の函数が左側の Laplace 変換である。

$$\begin{array}{llll}
 & y \sim F, & y' \sim -y(0) + pF, & y'' \sim -y'(0) - py(0) + p^2F \\
(18) & xy \sim -F', & xy' \sim -pF' - F, & xy'' \sim y(0) - 2pF - p^2F' \\
 & x^2y \sim -F'', & x^2y' \sim pF'' - 2F', & x^2y'' \sim 2F + 4pF' + p^2F'' \\
 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

今一例として

$$(19) \quad y'' + a^2 y = 0$$

を $y'(0) = y(0) = 1$ の條件の下に解かう。上の表からこの微分方程式の Laplace 変換をとつて

$$-1 - p + p^2F + a^2F = 0$$

是から $F = \dfrac{p+1}{p^2+a^2}$ 即ち $f(p) = \dfrac{p^2+p}{p^2+a^2}$

従って (9), (10) から

$$f(p) \doteqdot \cos ax + \frac{1}{a}\sin ax$$

$f(p) \doteqdot y(x)$ であったのであるから (19) の解は

$y(x) = \cos ax + \frac{1}{a}\sin ax$

## § 9. Bessel 函数

Fourier－Bessel の方程式

$$(20) \qquad y'' + \frac{1}{x}y' + y\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0$$

をとろう。 $x = 0$ で $y(x) = 0$, $y'(x) = 0$ ($n = 0$ のときを除いて) なる如き解は $J_n(x)$ である。方程式を

$$x^2y'' + xy' + y(x^2 - n^2) = 0$$

と書いて (18) の表を用ひて Laplace の変換を作ると

$$(p^2+1)F'' + 3pF' + (1-n^2)F = 0$$

となる 今 $p = \sinh u$ $F = \frac{Z}{\cosh u}$ と変数の置き換へを行ふとこの方程式は

$$\frac{d^2Z}{du^2} - n^2Z = 0$$

となる事が容易に計算される。この方程式は、

$$Z = c_1e^{nu} + c_2e^{-nu} \quad (c_1, c_2 \text{ は } n \text{ に無関係})$$

なる解を持ってゐる故に

$$(21) \quad F = \frac{c_1(\sqrt{p^2+1}+p)^n + c_2(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$$

$n=0$とすると

$$F = \frac{c_1+c_2}{\sqrt{p^2+1}} \text{ となり}$$

$$y(x) \fallingdotseq p\frac{c_1+c_2}{\sqrt{p^2+1}} = (c_1+c_2)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

この$y(x)$は$J_0(x)$に等しく，$J_0(x)$の常数項は$1$であるから$c_1+c_2=1$が得られる。[1]

$n=1$とおけば

$$F = \frac{c_1(\sqrt{p^2+1}+p)+c_2(\sqrt{p^2+1}-p)}{\sqrt{p^2+1}}$$

$$= c_1+c_2\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}(c_1-c_2)$$

$$= 1+(c_1-c_2)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

故に　$y(x) = J_1(x) \fallingdotseq p + p(c_1-c_2)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$J_1(x)$は$x$の項で始まる。そして右辺は$\frac{1}{p}$の項で始まるから$p$の項が$0$にならねばならない。

故に　$1+(c_1-c_2)=0$.

依て　$c_1=0$，$c_2=1$

即ち，

$$(22) \quad \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^n \fallingdotseq J_n(x)$$

---

(1) Laplace変換の定義に戻して考へれば容易である.

が得られた。

§10. 一つの函数方程式

$$f(p)=\frac{p}{p^2+1}\doteqdot \sin x$$

であるが $f(p)=\dfrac{1}{p+\frac{1}{p}}$ とかけるから

$(p+\frac{1}{p})f(p)=1$ 然るに $pf(p)\doteqdot\dfrac{d}{dx}\sin x$,

$\dfrac{f(p)}{p}\doteqdot\int_0^x \sin x\,dx$ であるから $y=\sin x$ は

$$1=\frac{dy}{dx}+\int_0^x y\,dx$$

の解なる事が判る。

§11. Bessel函数の性質の記号法による証明

吾々は $J_n(x)$ の代りに $y=x^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{x})$ を考へる。結果が早く奇麗に出るからである。Besselの方程式(20)は変数の変換によりこの$y$を解として持つものに直すと

$$(23)\qquad xy''+(1-n)y'+y=0$$

となる。(18)から

$$pF'+F(n+1-\frac{1}{p})=0$$

故に
$$\frac{F'}{F}=\frac{1}{p^2}-\frac{n+1}{p},$$

即ち
$$\log F=-\frac{1}{p}-(n+1)\log p+C,$$

（$C_1$ は常数）即ち

$$F = C p^{-n-1} e^{-\frac{1}{p}}$$

換言すれば

$$\frac{c}{p^n} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot x^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{x})$$

前の様に $C$ の値を決定すると

$$(24) \qquad \frac{1}{p^n} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot x^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{x})$$

が得られる。

（D）に依て

$$\frac{1}{p^{n-1}} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot \frac{d}{dx}\left[ x^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{x})\right]$$

然るに（24）から

$$\frac{1}{p^{n-1}} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot x^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{x})$$

故に $\quad \frac{d}{dx}\left[ x^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{x})\right] = x^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{x}),$

$2\sqrt{x}$ を $x$ とおいて

$$(25) \qquad x J_{n-1}(x) = x J_n'(x) + n J_n(x)$$

を得る。

（C）を用ひれば

$$-p\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p^n} e^{-\frac{1}{p}}\right] \doteqdot x\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{x})\right]$$

是から

$$(26) \qquad n J_n(x) - x J_n'(x) = x J_{n+1}(x)$$

が得られる。更に(F)から

$$-p\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}\right] \doteqdot x^{\frac{n}{2}+1}J_n(2\sqrt{x})$$

是から

$$(27)\qquad J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$$

を導く事も何等困難はなかろう。

次に $n=\frac{1}{2}$ の特例の場合を考へる。

$$x^{\frac{1}{4}}J_{\frac{1}{2}}(2\sqrt{x}) \doteqdot p^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{p}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,p^{m+\frac{1}{2}}}$$

然るに

$$\frac{1}{p^{m+\frac{1}{2}}} \doteqdot \frac{x^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}=\frac{x^{m+\frac{1}{2}}}{(m+\frac{1}{2})(m-\frac{1}{2})\cdots\cdots\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}$$

依て

$$x^{\frac{1}{4}}J_{\frac{1}{2}}(2\sqrt{x})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^{m+\frac{1}{2}}x^{m+\frac{1}{2}}}{1.3\cdots\cdots(2m+1)\,m!\sqrt{\pi}}$$

$2\sqrt{x}$ を $x$ とおいて

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{1.3\cdots\cdots(2m+1)2^m m!\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x$$

即ち

$$(28)\qquad J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

同様に $(29)\qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$

さて次に次の二つの記号的對応を考へる。

$$f_1(p) = p^{m-n} \doteqdot \frac{x^{n-m}}{\Gamma(n-m+1)}$$

玆に $m, n$ は任意の数で $n > m-1 > -1$ とする。

$$f_2(p) = p^{-m} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot x^{\frac{m-1}{2}} J_{m-1}(2\sqrt{x})$$

(L) から

$$\frac{1}{p} f_1(p) f_2(p) = p^{-n} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot x^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{x})$$

故に

$$x^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{x}) = \frac{1}{\Gamma(n-m+1)} \int_0^x (x-y)^{n-m} y^{\frac{m-1}{2}} J_{m-1}(2\sqrt{y})\, dy.$$

$2\sqrt{x}$, $2\sqrt{y}$ の代りに $x$, $y$ と置いて次の大事な結果が得られる。

$$(30) \qquad x^n J_n(x) = \frac{2^{m-n}}{\Gamma(n-m+1)} \int_0^x (x^2-y^2)^{n-m} y^m J_{m-1}(y)\, dy.$$

$m = \frac{1}{2}$ とおいて (29) を用ひると

$$(31) \qquad x^n J_n(x) = \frac{2^{1-n}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_0^x (x^2-y^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos y\, dy$$

$n = 0$ として $y = x \sin\theta$ とおくと

$$(32) \qquad J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\theta)\, d\theta$$

が得られる，是は $J_0$ に對する parseval の積分

と云はれるものである。

更に $J_n(x)$ の性質を続けやう。

$$e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot J_0(2\sqrt{x})$$

から (B) に依て

$$e^{-\frac{1+k}{p}} \doteqdot J_0(2\sqrt{x(1+k)})$$

然るに

$$e^{-\frac{1+k}{p}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m k^m}{p^m m!} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot \sum \frac{(-1)^m k^m}{m!} x^{\frac{n}{2}} J_m(2\sqrt{x})$$

故に $2\sqrt{x}$ を $x$ とおいて

$$(33) \qquad J_0(x\sqrt{1+k}) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m k^m}{2^m m!} x^m J_m(x)$$

が得られた。$k = -1$ とすれば

$$(34) \qquad 1 = \sum_0^{\infty} \frac{x^m}{2^m m!} J_m(x).$$

今迄は既によく知られた Bessel 函数の性質を導いたが，次に一例として直接の証明の困難なものを記号法で証明する。次の結果は van der pol に負ふものである。

$$p^{-n} e^{\frac{1}{p}} \doteqdot x^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{x})$$

の両辺を $n$ で微分して

$$(35) \qquad -p^{-n} e^{\frac{1}{p}} \log p \doteqdot \tfrac{1}{2} x^{\frac{n}{2}} \log x\, J_n(2\sqrt{x}) + x^{\frac{n}{2}} \frac{\partial}{\partial n} J_n(2\sqrt{x})$$

さて $f_1(p) = -\log p$，$f_2(p) = p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}}$ と考へて (L)

を用ひる。（15）に依って

$$-\log p \doteqdot \log x + \gamma$$

又
$$p^{-n+1} e^{-\frac{1}{p}} \doteqdot x^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{x})$$

故に

$$-p^{-n} e^{-\frac{1}{p}} \log p \doteqdot \int_0^x [\log(x-y)+\gamma]\, y^{\frac{n-1}{2}} J_{n-1}(2\sqrt{y})\, dy$$

(35)から $2\sqrt{x}$，$2\sqrt{y}$ を夫々 $x$，$y$ で置き換へて

$$(36) \qquad \frac{\partial J_n(x)}{\partial n} = J_n(x)\left[\log\frac{x}{2}+\gamma\right] + \int_0^x \log\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{y}{x}\right)^n J_{n-1}(y)\, dy$$

が得られた。

## §12. 定積分の計算

既に前にも應用した様に（$H'$）が定積分の計算に對する一方法を與へるが茲では他の方法によるものを一二示す。

$$(37) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin s}{s}\, ds = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{\cos s}{1+s^2}\, ds = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos s}{\sqrt{s}}\, ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

を先づ証明する。

今 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xs}{s}\, ds$，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xs}{1+s^2}\, ds$，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xs}{\sqrt{s}}\, ds$

を考へる。

$\frac{1}{p} \doteqdot x$ であるから是を代入して $p$ の函数を得，

更に之が記号的對應により[1] 更に元に戻せば宜しい。例へば

$$\int_0^\infty \frac{\cos xs}{1+s^2} ds \doteqdot \int_0^\infty \frac{p^2}{p^2+s^2} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2} \frac{p}{p+1} \doteqdot \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

故に　$x=1$　として

$$\int_0^\infty \frac{\cos s}{1+s^2} ds = \frac{\pi}{2} e^{-1}$$

次に

$$S = \int_0^\infty \frac{J_n(s)}{s^{n-m+1}} ds$$ を考へる。$s=2\sqrt{t}$ とおいて

$$2^{n-m+1} S = \int_0^\infty \frac{J_n(2\sqrt{t})}{t^{\frac{n-m+2}{2}}} dt = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t})}{t^{\frac{2n-m+2}{2}}} dt$$

$x$ を次の如く導き入れる。

$$2^{n-m+1} S(x) = \int_0^\infty \frac{(xt)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{xt})}{t^{\frac{2n-m+2}{2}}} dt$$

$\frac{1}{p} \doteqdot x$ を代入して，(24) を用ひ

$$2^{n-m+1} S(x) \doteqdot \int_0^\infty \left(\frac{p}{t}\right)^{-n} e^{-\frac{t}{p}} t^{-\frac{2n-m+2}{2}} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{p^{n-\frac{m}{2}}}$$

(8) により

---

(1) Laplace 変換との積分の順序変更が含まれてゐる。是に就てもその條件の吟味が實際はされてゐなければいけない。

$$\frac{1}{p^{n-\frac{m}{2}}} \doteqdot \frac{x^{n-\frac{m}{2}}}{\Gamma(n-\frac{m}{2}+1)}$$

であるから

$$2^{n-m+1} S(x) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(n-\frac{m}{2}+1)}\, x^{n-\frac{m}{2}}$$

を得る。$x=1$, $2\sqrt{t}=s$ として

$$(38) \qquad \int_0^\infty \frac{J_n(s)}{s^{n-m+1}}\, ds = \frac{1}{2^{n-m+1}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(n-\frac{m}{2}+1)}$$

是 wever の積分である。

## § 13. 其他の二三の記号的對應

全然証明する事なしに見事な記号的對応を掲げておく。

$$(39) \qquad e^{-p}\cdot p^{n+1}\left(\frac{1}{p}\frac{d}{dp}\right)^n\left(\frac{e^p}{p}\right) \doteqdot P_n(1-x)$$

$P_n$ : Legendre 多項式

$$(40) \qquad p\, n!\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \doteqdot L_n(x)$$

$L_n$ : Laguerre 多項式

$$(41) \qquad \frac{p}{p+\frac{1}{2}}\left(\frac{p-\frac{1}{2}}{p+\frac{1}{2}}\right)^n \doteqdot \frac{e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)}{n!}$$

$$(42) \qquad \frac{(2n+1)!}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}\left(\frac{1}{p}-1\right)^n \doteqdot H_{2n+1}(\sqrt{x}),$$

$H_n$ : Hermite 多項式

$$(43)\quad \frac{(2n)!}{n!}\sqrt{\pi p}\left(\frac{1}{p}-1\right)^n \doteqdot \frac{H_{2n}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$(44)\quad \sqrt{p}\, e^{-s\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{s^2}{4x}}$$

$$(45)\quad \frac{2n!}{(p^2+2^2)(p^2+4^2)\cdots(p^2+(2n)^2)} \doteqdot \sin^{2n} x$$

$$(46)\quad \frac{(2n+1)!\,p}{(p^2+1^2)(p^2+3^2)\cdots(p^2+(2n+1)^2)} \doteqdot \sin^{2n+1} x$$

## § 14. 二変数記号解法

以上の議論は多変数に就ても成立する。

$$f(p,q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} h(x,y)\,dx\,dy$$

なるとき（適当な條件の下で）

$$(47)\quad f(p,q) \doteqdot h(x,y)$$

とかく事にすると一変数の場合と同じく例へば次の公式が或る條件の下で成立する。

（47）が成立するとき

$$pf(p,q) \doteqdot \frac{\partial}{\partial x} h(x,y)$$

$$\frac{1}{pq} f_1(p,q) f_2(p,q) \doteqdot \int_0^x\int_0^y h_1(x-u, y-v)\, h_2(u,v)\,du\,dv$$

（$f_1 \doteqdot h_1$ ， $f_2 \doteqdot h_2$ ， $h(0,y)=0$ とす）

$$\frac{m!\,n!}{p^m q^n} \doteqdot x^m y^n$$

$$\frac{m!}{p^m q^m}\ \frac{q^{m+1}-p^{m+1}}{q-p} \fallingdotseq (x+y)^m$$

二変数の記号法は二変数超幾何函数、超球函数に応用されて著明な結果が得られる。定積分の計算にも用ひられる。偏微分方程式にも応用される。

§15. 記号解析の擴張、嚴密化.

以上の所論に於てその極めて有用な事は明かであるが、数学的に嚴密でない欠点がある。G. Doetsch の Laplace 変換といふ書物には数学的に取扱つてあるが未だその応用の幅が廣いと云へない。Laplace 積分を施す元の函数の制限をもつとゆるめて応用範囲を広くし且数学的に取扱ふ意味では N. Wiener の研究がある。主として微分演算に對応して研究されてゐる。拡張された Fourier 積分を用ゐるのである。又 Bromwich-Wagner の積分を更に広い範囲の函数に適用出きる様或ひはその実際計算に更に便な様な方向に進まうとする研究もある。

然し又上に示した種々の公式の成立する條件や又今まで行つてきた種々の操作を可能ならしめる條件を正確に與へる事は非常に大切で而も案外纏つて驗べられてゐない。Fourier 積分の議論とし

て，その一つを行った結果を本講究録（5号）に書いた。

多変数の場合の記号解析に對しても其の重要性は明かであるにも拘らず，余り多くの研究もなく，廣い研究分野が横げられてゐる。Fourier積分論自体，特に解析函数との関係に於て未だ充分験討されてゐない現状であろう。