25. Student 検定法について

兼所員（名大理学部数学教室）伊藤　清

（昭和19年12月20日受付）

§1. はしがき

正規母集団から取り出した任意標本により、母集団平均値に関する検定の為に、Student 検定法が用ひられるのは、周知の事実であるが、この方法が、所謂第一種の過誤，第二種の過誤の見地から，最良のものであることを証明したものが見当らない様に思はれるので，これについて述べて見たいと思ふ。

説明の便宜上検定に関する一般論を簡単に述べるが，大体 Wilks : The Theory of Statistical Inference, chap. V. と同じであって，唯「正則棄却域の概念だけ筆者がつけ加へた。

今 (Ω, p_θ) を標本の母集団とする；Ω は見本空間で，p_θ は標本の従ふべき分布法則であり，θ は未知常数であって，その動く範囲を Ⓗ であらはし之を未知常数 θ の考察範囲といふ、H を Ⓗ の部分集合とする，所謂統計假説の最も一般的な形は

~~362-1~~

(1.1) "$\theta \in H$"

となる。これを簡単に假説Hと呼ぶことにする。

Hが特に一点θ_0からなる時には，この假説を単純假説と呼び，假説θ_0と呼ぶことにする。単純假説でないものを複合假説と云ふ。θ_1が$\textcircled{H}-H$に屬する時，θ_1をHの對立假説と云ふ Hの對立假説は一般に多数ある。

KをΩの部分集合とするとき，棄却域Kによる假説Hの檢定とは次の如き棄却規則を云ふ

(1.2) 実現標本(値) ω がKに入れば Hを棄却する。

(1.3) $\omega \overline{\in} K$ならば，Hを棄却しない。

この檢定法について先づ考へられる過誤は，

(1.4) Hが真である時にHを棄却する過誤，

であつて，これを第一種の過誤(e_I)と呼んで居る。第一種の過誤は $P_\theta(K)$，$\theta \in H$なる確率を以て計る事が出来るこれを$e_I(K, \theta)$であらはす。Hが単純假説の時には，$e_I(K, \theta)$は一義的に定まるが，一般にはHの中を動く変数θの函数である。それで第一種の過誤の確定するやうな棄却域を考へ，これを正則棄却域と呼ぶ。即ち

定義 1.1　棄却域Kが正則なりとは，$e_I(K,\theta)$，$\theta \in H$ が θ に無関係なことである，この（θ に無関係な，従つてKによつて定まる）値をKの大きさ（size）と云ひ，$e_I(K)$ で表はす。

偖て，Kは正則にして且つ与へられた大きさを有すると假定しても，尚Kは一義的に定まるのではない，そこで同じ大きさの正則棄却域の優劣を知る為に第二種の過誤即ち

(1.5) Hが偽である時に，Hを棄却しない過誤を考へる。これは確率 P_θ，$(\Omega - K)\theta_1$ はHの對立假説，即ち $\theta_1 \in \textcircled{H} - H$ で計られる，これは對立假説 θ_1 に関係するもので，$e_{II}(K,\theta_1)$ で表はす，偖て次の定義を与へる。

定義 1.2　仮説Hの棄却域K_0が，Hの對立假説 θ_1 に對して，最大検定力を持つとは，第一に，K_0自身が正則であつて，第二に，KがK_0と同じ大きさの正則棄却域ならば，常に

$$e_{II}(K_0, \theta_1) \leqq e_{II}(K, \theta_1)$$

となることである。

一つの對立假説に對して最大検定力を持つても，他の對立假説に對しては然らざる事もあるのであつて，若しも總ての對立假説に對して最

大検定力を持つものが見出されるならば，甚だ好都合なわけである。

定義1.3.　総ての対立假説に対して最大検定力を持つものを一様最良棄却域といふ.

§2. 吉田耕作氏の定理

後に利用する爲に吉田耕作氏の一定理を準備として説明して置く.

定理2.1.　$f(x)$が有界可測実函数とし，$g(x)$を$L(-\infty, \infty)$に屬し，フーリエ変換$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$が總ての実数$t$に對して0とならないとする. かかる時は，積分

(2.1) $\int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha) f(x)\,dx = \Phi(\alpha)$

がαに無関係ならば$f(x)$は殆んど到る所である常数に等しい。

証明　$F(t) \neq 0$により，Wienerの定理(註1)により，任意の$h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$及び任意の$\varepsilon > 0$に對して，線型式$\sum_{i=1}^{n} a_i g(x-\alpha_i)$を次の條件を満足する様に定め得る：

(2.2) $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - \sum a_i g(x-\alpha_i)|\,dx \leqq \varepsilon.$

(註1.) N. Wiener; Tauberian theorems, Ann. of Math, 38 (1932), ph, 2.2

今

$$(2.3)\qquad M = \sup |f(x)|$$

とすれば

$$(2.4)\qquad \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\alpha) f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} (\sum a_i g(x-\alpha_i-\alpha)) f(x)\,dx\right|$$

$$\leqq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(x-\alpha) - \sum a_i g(x-\alpha_i-\alpha)|\,dx$$

$$= M \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - \sum a_i g(x-\alpha_i)|\,dx$$

$$\leqq M\varepsilon,$$

特に $\alpha = 0$ と置けば

$$(2.5)\qquad \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} (\sum a_i g(x-\alpha_i)) f(x)\,dx\right|$$

$$\leqq \Sigma\ \varepsilon.$$

仮定により $\Phi(\alpha)$ は α に無関係なる故

$$(2.6)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} (\sum a_i g(x-\alpha_i-\alpha)) f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (M a_i g(x-\alpha_i)) f(x)\,dx.$$

上記三式により

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\alpha) f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\,dx\right|$$

$$\leqq 2M\varepsilon.$$

ε が任意の正数なる故 $\varepsilon \to 0$ として

$$(2.7)\quad \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\alpha)f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,dx.$$

今Eを有限Lebesgue測度の集合とし，$C_E(x)$をその定義函数とする．今集合函数

$$(2.8)\quad L(E)=\int_{-\infty}^{\infty} C_E(x)(f(x)+M)\,dx,$$

Mは(2.3)式で定めたもの，を考へると $C_E(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ であるから，(2.7)が利用出来てL(E)はtranslation-invariantな集合函数であることが分る．L(E)の非負性及び完全加法性は明らかで $L(E)\leqq 2M|E|<\infty$ なる故 $L(E)=C|E|$ 茲にCは常数で$|E|$はEのLebesgue測度である．即ち

$$(2.9)\quad L(E)=\int_E (f(x)+M)\,dx=C|E|$$

従って殆ど到る所で

$$(2.10)\quad f(x)+M=\mathrm{Const}\quad 即ち\quad f(x)=\mathrm{const}$$

定理2.2) $f(x)$, $0<x<\infty$, は有界可測実函数とし，$g(x)$は$L_1(0,\infty)$に属して且つ任意の実数tに對して

$$(2.11)\quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,x^{it}\,dx \neq 0$$

であるとする，かかる時は

$$(2.12)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} g\left(\frac{x}{\alpha}\right) f(x)\, dx$$

が α に無関係ならば，殆んど到る所で

$$(2.13)\quad f(x) = const$$

である．

証明　$y = \log x$，$\beta = \log \alpha$，$G(y) = g(e^y)\, e^y$，$F(y) = f(e^y)$ と置けば前定理に帰着する．

§3. Student の検定法（1）

$(R, G_{\alpha\beta})$ を一次元の正規母集団で，平均値 α，標準偏差 β とする，R は実数の集合，$G_{\alpha\beta}$ は正規分布を示す．偖て

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ をこの母集団から抽出した大きさ n の任意見本とする．この見本の母集団は，$(R, G_{\alpha\beta})^{\otimes n}$ なる直積測度空間である．これを $(\Omega, P_{\alpha\beta})$ で表はす，この場合 (α, β) は §1. の θ に対応する．今 α_0 を或る常数とし，

$$(3.1)\quad \alpha = \alpha_0$$

なる仮説を考へる，次に Ⓗ の考へ方であるが，これが三通りある．

(~~368~~)

I. $\Theta = \{(\alpha, \beta); -\infty < \alpha < \infty, \quad \beta > 0\}$

II. $\Theta_+ = \{(\alpha, \beta); \alpha \geqq \alpha_0, \quad \beta > 0\}$

III. $\Theta_- = \{(\alpha, \beta); \alpha \leqq \alpha_0, \quad \beta > 0\}$

I は $\alpha = \alpha_0$ なる仮説が否定された時 $\alpha \neq \alpha_0$ となる場合をいひ II は $\alpha = \alpha_0$ が否定された時 $\alpha > \alpha_0$ となる場合 III は $\alpha < \alpha_0$ となる場合である、何れの場合に於ても $\alpha = \alpha_0$ は Θ 又は Θ_+ 又は Θ_- の部分集合 $\{(\alpha_0, \beta); \beta > 0\}$ に對應し、複合仮説である、I の場合には一様最良棄却域は存在しないが、II, III の場合には存在して所謂 student の棄却域がそれであることが定理 2, 2 で示される、即ち

II に對しては $\quad K_+ = \left\{ w ; \dfrac{\overline{w} - \alpha}{s} > c \right\}$

III に對しては $\quad K_- = \left\{ w ; \dfrac{\overline{w} - \alpha}{s} < c \right\}$

茲に $\quad \overline{w} = \frac{1}{n} \sum w_i$ (標準平均値),

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (w_i - \overline{w})^2} \quad (\text{標本標準偏差})$$

c は常数で棄却域の大きさに関係する、

K_+ も K_- も $\alpha = \alpha_0$ に對して正則であるが、一般に $\alpha = \alpha_0$ に對して正則な棄却域は次の定理で得られる、

<u>定理 3, 1</u> 今 $S(r) = \{w ; \Sigma(w_i - \alpha_0)^2 = r^2\}$

$((\alpha_0, \alpha_0, \cdots, \alpha_0)$ を中心とし半径 r の球面) とし $|\ |$ を以てこの球面上の集合の球面上で考へた面積を表はす事にする。K が $\alpha = \alpha_0$ に對して正則なる為の必要且つ十分なる條件は

(3.2) $|K \cdot S(r)| = C\,|S(r)|$, C は r に無関係な常数

であり，これが満足される時には C は明らかに $e_I(K)$ に等しい。

<u>証明</u>　十分なことは明らかであるから，必要な事だけを証明する。K の正則性により $e_I(K, \alpha_0, \beta)$ は β に無関係で

(3.3) $$\int\cdots\int_K \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sum(x_i-\alpha_0)^2}{2\beta^2}\right\} dx_1 \cdots dx_n = e_I(K)$$

今 $(\alpha_0, \alpha_0, \cdots, \alpha_0)$ を極とする極座標に変換すれば，上式は

(3.4) $$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta}\left(\frac{r}{\beta}\right)^{n-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\beta}\right)^2} \frac{1}{r^{n-1}} |K \cdot S(r)|\, dr = e_I(K)$$

偖て

(3.5) $$\int_0^\infty r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{it}\, dr = 2^{\frac{n-2}{2} + i\frac{t}{2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2} + i\frac{t}{2}\right) \neq 0$$

なる故定理2.2を用ひて，(3.4) から

(3.70)

$$(3.6)\quad \frac{1}{r^{n-1}}|K\circ S(r)| = \mathrm{Const}$$

$|S(r)| = r^{n-1}\times \mathrm{Const}$ なる故，結局 (3,2) を得る

定理 3.2　II の場合には K_+ が一様最良棄却域であり，III の場合には K_- が一様最良棄却域である。

証明に先立って，簡単な補助定理をのべる。

補助定理 3.1　(X, μ) を測度空間とし，$f(x)$ をその上の可測函数とする。次に

$$(3.7)\quad E_0 = \{x ; f(x) > c\},$$ c は正の常数とする。然らば E_0 と同じ μ_0－測度をもつ任意の E に対して

$$(3.8)\quad \int_{E_0} f(x)\mu(dx) \geqq \int_E f(x)\mu(dx)$$

証明　仮定により明らかに

$$(3.9)\quad \mu(E_0 - E) = \mu(E - E_0)$$ ($E-E_0$ は $E-E_0E$ の意，$E-E_0$ も同様)

偖て

$$\int_{E_0} f(x)\mu(dx) - \int_E f(x)\mu(dx) = \int_{E_0-E} f(x)\mu(dx) - \int_{E-E_0} f(x)\mu(dx)$$

$E_0 - E\ (\leqq E_0)$ の上では $f(x) > c$ であり，$E - E_0\ (\leqq X - E_0)$ の上では $f(x) \leqq c$ である (E_0 の定義!)

故に前式の右辺は

$$\geqq C\left(\mu(E_0-E)-\mu(E-E_0)\right)=0 \quad ((3,9)\text{に依る})$$

これで補助定理の証明は終ったから，次に定理3,2の証明に移る．前定理3,1と同じ記号を用ひる，今KをK_+と同じ大きさの任意の正則棄却域とする．然らば，定理3,1により

$$(3,10)\qquad |K\cdot S(r)|=|K_+\cdot S(r)|.$$

次に

$$(3,11)\qquad r^2=\sum(\omega_i-\overline{\omega})^2+n(\overline{\omega}-\alpha_0)^2$$

に注意するとK_+は

$$(3,12)\qquad \frac{\overline{\omega}-\alpha_0}{r}>C_1$$

なる條件で定められる．

偖て

$$1-e_{II}(K,\alpha,\beta)=P_{\alpha\beta}(K)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\right)^n\int_K\cdots\int\exp\left\{-\frac{1}{2\beta^2}\sum(\omega_i-\alpha)^2\right\}d\omega_1\cdots d\omega_n$$

$(\alpha_0,\alpha_0,\cdots\alpha_0)$を極とする極座標に変換して

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\right)^n\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{r^2+n(\alpha-\alpha_0)^2}{2\beta^2}\right\}\int\exp\left\{\frac{n(\alpha-\alpha_0)(\overline{\omega}-\alpha_0)}{\beta^2}\right\}d\sigma\,dr,$$

σは$S(r)$の上の座標で$d\sigma$は微小面積を表す．

Kの代りにK_+を入れて

$$1-e_{II}(K_+, \alpha, \beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\right)^n \int^{\infty} \exp\left\{-\frac{r^2+n(\alpha-\alpha_0)^2}{2\beta^2}\right\} \int_{K_+ S(r)} \exp\left\{\frac{n(\alpha-\alpha_0)(\bar{w}-\alpha_0)}{\beta^2}\right\} d\sigma\, dr$$

K_+は(3, 12)で定められるから，$\alpha-\alpha_0>0$に注意すれば$S(r)$の上で$K_+ S(r)$は

$$(3.13)\quad \exp\left\{\frac{n(\alpha-\alpha_0)(\bar{w}-\alpha_0)}{\beta^2}\right\} > \exp\left\{\frac{n(\alpha-\alpha_0)rc_1}{\beta^2}\right\}$$

で與へられ，前補助定理を用ふれば，(3, 10)から

$$\int_{K_+ S} \exp\left\{\frac{n(\alpha-\alpha_0)(\bar{w}-\alpha_0)}{\beta^2}\right\} d\sigma \geqq \int_{K\cdot S(r)} \exp\left\{\frac{n(\alpha-\alpha_0)(\bar{w}-\alpha_0)}{\beta^2}\right\} d\sigma$$

依って

$1-e_{II}(K_+, \alpha, \beta) \geqq 1-e_{II}(K, \alpha, \beta)$ 即ち

$e_{II}(K_+, \alpha, \beta) \leqq e_{II}(K, \alpha, \beta)$

§4. Student 検定法 (2)

$(R, \mathfrak{S}_{\alpha\gamma})$, $(R, \mathfrak{S}_{\beta}, \gamma)$が一次元の正規母集団とし，その平均値を夫々$\alpha$, β，その標準偏差は共にγとする．今$(R, \mathfrak{S}_{\alpha\gamma})$から任意標本$x_1, x_2, \cdots, x_m$をとり$(R, \mathfrak{S}_{\beta\gamma})$から任意標本$y_1, y_2, \cdots, y_n$をとる．この場合見本は$(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)$であって，見本の母集団は直積測定空間$(R, \mathfrak{S}_{\alpha\gamma})^{\otimes m} \otimes (R, \mathfrak{S}_{\beta\gamma})^{\otimes n}$であるこれを$(\Omega, P_{\alpha\beta\gamma})$で表はすことにする．この場合§1の Ⓗ に対應する

ものとして次の三種が考へられる.

I. $\Theta = \{(\alpha, \beta, \gamma)\,;\ \alpha, \beta$ は任意, $\gamma > 0\}$

この場合には $\alpha = \beta$ なる假説が否定されれば $\alpha \neq \beta$ となる.

II. $\Theta_+ = \{(\alpha, \beta, \gamma)\,;\ \alpha \geqq \beta,\ \gamma > 0\}$

この場合には, $\alpha = \beta$ の否定は $\alpha > \beta$ となる.

III. $\Theta_- = \{(\alpha, \beta, \gamma)\,;\ \alpha \leqq \beta,\ \gamma > 0\}$

この場合には, $\alpha = \beta$ の否定は $\alpha < \beta$ となる

何れの場合に於ても $\alpha = \beta$ が複合假説なることは明らかである. §7 の H に相當するものは

$$\{(\alpha, \beta, \gamma)\,;\ \alpha = \beta,\ \gamma > 0\}$$

である.

I に對する一様最良棄却域は存在しないが II, III に對するものは存在して, これを夫々 K_+, K_- とすると, それが次の條件で定められる.(定理 4.2)

$$K_+ = \{(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)\,;\ \bar{x} - \bar{y} > c\sqrt{m s_x^2 + n s_y^2}\}$$

$$K_- = \{(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)\,;\ \bar{x} - \bar{y} < -c\sqrt{m s_x^2 + n s_y^2}\}$$

茲に $\bar{x} = \frac{1}{m}\sum x_i$　$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$, $s_x = \sqrt{\frac{1}{m}\sum (x_i - \bar{x})^2}$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

であって, c は棄却域の大きさに關係する正の常數である.

定理 4.1　今

(4.1)　$S(u,r)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n);\ \frac{m\bar{x}+n\bar{y}}{m+n}=u,\ \sum(x_i-\bar{x})^2+\sum(y_i-\bar{y})^2=r^2\}$

とする。然らば K が $\alpha=\beta$ に対する正則棄却域なる為の必要且つ十分な條件は

(4.2)　$|K\cdot S(u,r)|=c\,|S(u,r)|$,　c は r に無関係な常数

である。この條件が満される時，$c=e_I(K)$ となるは明らかである。

証明　十分な事は容易に証明出来るから，必要な事だけ証明する。先ず仮定により

(4.3)　$$e_I(K)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}\right)^n\int\cdots\int_K \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma^2}\left(\sum(x_i-\alpha)^2+\sum(y_i-\alpha)^2\right)\right\}dx_1\cdots dx_m\,dy_1\cdots dy_n$$

偖て今次の如き直交変換 T を考へる。

$$T:(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)\to(u_0,u_1,\cdots,u_{m+n-1}),$$

但し　$u_0=\sqrt{m+n}\;u\equiv\frac{m\bar{x}+n\bar{y}}{\sqrt{m+n}}$

(4.3)式を新変数で表すと

(4.4)　$$e_I(K)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(u_0-\sqrt{m+n}\,\alpha)^2}{2\gamma^2}\right\}du_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}\right)^{m+n-1}\int\cdots\int_{K\cdot\Pi(u_0)}\exp\left\{-\frac{1}{2\gamma^2}\sum_{i=1}^{m+n-1}u_i^2\right\}du_1\cdots du_{m+n-1}$$

茲に $\Pi(u_0)$ は $u_0 = const$ なる超平面を表す

偖て

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\gamma} \exp\left\{-\frac{u_0^2}{2\gamma^2}\right\} e^{iu_0 t} du_0 = e^{-\frac{\gamma^2 t^2}{2}} \neq 0$$

であるから，定理 2.1 により (4.4) から

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\gamma}\right)^{m+n-1} \int \cdots \int_{K \cdot \Pi(u_0)} \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma^2} \sum_{i=1}^{m+n-1} u_i^2\right\} du_1 \cdots du_{m+n-1}$$

$$= e_I(K).$$

定理 3.1 の証明と同様にして

(4.5) $$\left| K \cdot \Pi(u_0) \left\{ (u_0 u_1 \cdots u_{m+n-1}) ; \sum_{i=1}^{m+n-1} u_i^2 = r^2 \right\} \right|$$

$$= e_I(K) \left| \left\{ (u_0 \cdots u_{m+n-1}) ; \sum_1^{m+n-1} u_i^2 = r^2 \right\} \right|$$

他方に於て

$$\sum_{i=1}^{m+n-1} u_i^2 = \sum (x_i - \alpha)^2 + \sum (y_i - \alpha)^2 - (u_0 - \sqrt{m+n}\,\alpha)^2$$

$$= \sum (x_i - \alpha)^2 + \sum (y_i - \alpha)^2 - (m+n)(u - \alpha)^2$$

$$= \sum (x_i - u)^2 + \sum (y_i - u)^2$$

なる故，(4.5) は

$$|K \cdot S(u, r)| = e_I(K) \, |S(u, r)|$$

定理 4.2　K_+ は II に對する一様最良棄却域で，K_- は III に對する一様最良棄却域である．

証明　簡単な計算の結果

~~374(-)~~

$$e_{\mathrm{II}}(K,\alpha,\beta,\gamma)=p_{\alpha\beta\gamma}(K)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}\right)^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{m+n}{2\gamma^2}\left(u-\frac{m\alpha+m\beta}{m+n}\right)^2\right\}\frac{du}{\sqrt{m+n}}$$

$$\times\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{r^2}{2\gamma^2}\right)dr\int_{K\cdot S(u,r)}\exp\left\{-\frac{mn(\alpha-\beta)^2}{2(m+n)\gamma^2}\right\}$$

$$\exp\left\{\frac{mn(\bar{x}-\bar{y})(\alpha-\beta)}{(m+n)\gamma^2}\right\}d\sigma,$$

茲に σ は $S(u,r)$ の上の座標を表はし，$d\sigma$ はその上の微分面積を表はす

$$msx^2+nsy^2=r^2\frac{mn}{m+n}(\bar{x}-\bar{y})$$

なる故，K_+ は次の形で示される

$$K_+=\{(x_1,x_2,\cdots x_n,y_1\,y_2\cdots y_n)\,;\,\bar{x}-\bar{y}\geqq c_1 r\}$$

以下定理3.2の証明と同様にして，$\alpha>\beta$ ならば K_+ と同じ大きさの任意の正則棄却域 K に対し $e_{\mathrm{II}}(K_+,\alpha,\beta)\leqq e_{\mathrm{II}}(K,\alpha,\beta)$.

即ち K_+ はIIの場合の一様最良棄却域なる事を知る

又 K_- がIIIの場合の一様最良棄却域なる事も同様に証明せられる。