29. 四捨五入ノ誤差ニツイテ

東大理学部数学科学生　二見　隆

（昭和20年1月19日受付）

§1. 二ツノ独立確率変数ノ四則デツクラレルノ確率変数ノ分布函数

先ヅ準備トシテ上記ノ分布函数ヲ求メル、ココニ確率変数 X ノ分布函数ハ $F(x)=P_r\{X<x\}$ デ定義スル。

X Y ヲ二ツノ独立ナル確率変数トシ夫々ノ分布函数ヲ $F(x)$, $G(y)$ トスル。今 $Z=X+Y$, $X-Y$, $X\cdot Y$, Y/X ナル確率変数ヲツクツテ, 夫々ノ分布函数ヲ $T(z)$, $H(z)$, $K(z)$, $W(z)$ トスレバ, ソレラハ

(1) $$T(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(z-x)\,dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(z-y)\cdot dG(y)$$

(2) $$H(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1-G(x-z)\right]dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(y+z)\,dG(y)$$

(3) $$K(z)=\int_{-\infty}^{0}\left[1-G\left(\frac{z}{x}\right)\right]\cdot dF(x)+\int_{0}^{+\infty} G\left(\frac{z}{x}\right)\cdot dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[1-F\left(\frac{z}{y}\right)\right]\cdot dG(y)+\int_{0}^{+\infty} F\left(\frac{z}{y}\right)\cdot dG(y)$$

4 $$W(z)=\int_{-\infty}^{0}\left[1-G(z\cdot x)\right]\cdot dF(x)+\int_{0}^{+\infty} G(z\cdot x)\cdot dF(x)$$

$$
=\begin{cases}
\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\left[F\left(\frac{y}{z}\right)-F(0)\right]\cdot dG(y)+\int_{0}^{+\infty}\left[F(0)-F\left(\frac{y}{z}\right)\right]dG(y) & \text{for } z<0\\[2ex]
\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\left[1-F(0)\right]\cdot dG(y)+\int_{0}^{+\infty}F(0)\cdot dG(y) & \text{for } z=0\\[2ex]
\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\left[1+F\left(\frac{y}{z}\right)-F(0)\cdot dG(y)+\int_{0}^{+\infty}\left[1-F\left(\frac{y}{z}\right)+F(0)\right]dG(y) & \text{for } z>0
\end{cases}
$$

デ与ヘラレル。証明ハドレデモ同ジヤリ方デアリ *Fréchet ; Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités, premier livre,* p 74−78 ニハ(1)ト(3)ガ証明サレテアルカラ(4)ノ証明ヲヤッテ見ル。

$$
\begin{cases}
Z=\dfrac{Y}{X}\\[2ex]
W(z)=P_r\{Z<z\}=P_r\left\{\dfrac{Y}{X}<z\right\}
\end{cases}
$$

トシテ見ルト、$W(z)$ ハ点 (x, y) ガ平面上ノ $\frac{y}{x}<z$ ナル範囲ニ落チル確率デアル。即チ fig 1 ノ縦線ヲ入レタ部分ニ落チル確率デアル。

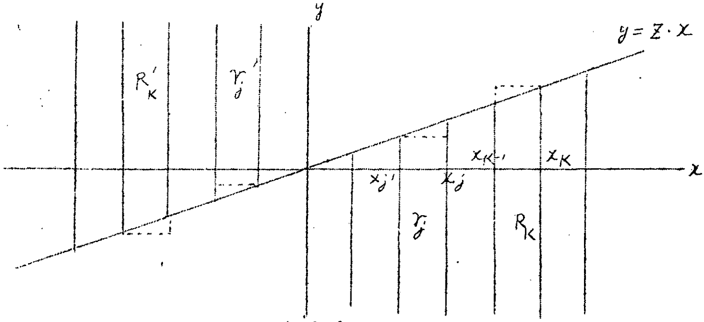


fig 1

~~43~~

先ヅ $z>0$ トスル。今数列

$$\begin{cases} -\infty \longleftarrow \cdots x_{-n} \cdots x_{-1} \quad x_0 = 0 \quad x_1 \cdots x_n \cdots \rightarrow +\infty \\ \operatorname{Max}(x_j - x_{j-1}) < \delta \end{cases}$$

ヲ択ンデ

$$r_j = \begin{cases} E\{(x\,y);\ x_{j-1} \leq x < x_j,\ y < z \cdot x_{j-1}\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{for } x_{j-1} \geq 0 \\ E\{(x\,y);\ x_{j-1} \leq x < x_j,\ y > z \cdot x_j\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{for } x_j \leq 0 \end{cases}$$

$$R_K = \begin{cases} E\{(x\,y);\ x_{K-1} \leq x < x_K,\ y < z \cdot x_K\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{for } x_{K-1} \geq 0 \\ E\{(x\,y);\ x_{K-1} \leq x < x_K,\ y > z \cdot x_{K-1}\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{for } x_K \leq 0 \end{cases}$$

トスレバ

$$\sum_j r_j \leq E\left\{(x,y);\ \frac{y}{x} < z\right\} \leq \sum_K R_K$$

$$\therefore\ P_r\left\{(x\,y) \in \sum_j r_j\right\} \leq W(z) \leq P_r\left\{(x,y) \in \sum_K R_K\right\}$$

サテ X ト Y ハ独立デアルカラ

$$P_r\{(x,y) \in r_j\} = \begin{cases} G(z \cdot x_{j-1})[F(x_j) - F(x_{j-1})] \\ \qquad\qquad\qquad \text{for } x_{j-1} \geq 0 \\ [1 - G(z \cdot x_j)] \cdot [F(x_j) - F(x_{j-1})] \\ \qquad\qquad\qquad \text{for } x_j \leq 0 \end{cases}$$

但シ $G(y)$ ガ $y_i = z \cdot x_i$ ニテ連續ナル様ニ X 軸ヲ

分割シテ行クモノトスル。

シカラハ加法原理ニヨッテ

$$Pr\{(x,y)\in\sum r_j\}=\sum_{j=-\infty}^{0}[1-G(z\cdot x_j)][F(x_j)-F(x_{j-1})]+\sum_{j=1}^{\infty}G(z\cdot x_j)\cdot[F(x_j)-F(x_{j-1})]$$

同様ニシテ

$$Pr\{(x,y)\in\sum R_K\}=\sum_{K=-\infty}^{0}[1-G(z\cdot x_{K-1})]\cdot[F(x_K)-F(x_{K-1})]+\sum_{K=1}^{\infty}G(z\cdot x_K)[F(x_K)-F(x_{K-1})]$$

コノ二ツハ正項級数ニシテソノ和ガ何レモ≤ 1デアルカラ Stieltjes 積分論ニヨリ $\delta\to 0$ ナル時同一ノ極限

$$\int_{-\infty}^{0}[1-G(z\cdot x)]\cdot dF(x)+\int_{0}^{+\infty}G(z\cdot x)\cdot dF(x)$$

ヲ有スル。故ニソノ間ニハサマル $W(z)$ モコレニ等シイ。

$z=0$，$z<0$ ノ時モ証明ノ仕方ヲ少シ変ヘルダケデ同一ノ結果ガ得ラレル。コレデ(4)ノ前半ガ証明サレタガ後半ヲ証明スルニハ y 軸ヲ分割シテ同様ニヤレバヨイ。

特ニ X，Y ノ一方ガ定数デアル場合ニハ次ノ様

ナ結果トナル。

	$Z =$	$d.f =$
(5)	$x + a$	$F(Z-a)$
(6)	$a - x$	$1 - F(a-Z)$
(6′)	$-x$	$1 - F(-Z)$
(7)	$a \cdot x \ (a \neq 0)$	
	$a > 0$ ナラバ	$F\left(\frac{Z}{a}\right)$
	$a < 0$ ナラバ	$1 - F\left(\frac{Z}{a}\right)$

(8) $\frac{a}{x} \ (a \neq 0)$

$a > 0$ ナラバ
$$\begin{cases} F(0) - F\left(\frac{a}{Z}\right) & \text{for } Z < 0 \\ F(0) & \text{for } Z = 0 \\ 1 - F\left(\frac{a}{Z}\right) + F(0) & \text{for } Z > 0 \end{cases}$$

$a < 0$ ナラバ
$$\begin{cases} F\left(\frac{a}{Z}\right) - F(0) & \text{for } Z < 0 \\ 1 - F(0) & \text{for } Z = 0 \\ 1 + F\left(\frac{a}{Z}\right) - F(0) & \text{for } Z > 0 \end{cases}$$

(8′) $\frac{1}{x}$
$$\begin{cases} F(0) - F\left(\frac{1}{Z}\right) & \text{for } Z < 0 \\ F(0) & \text{for } Z = 0 \\ 1 - F\left(\frac{1}{Z}\right) + F(0) & \text{for } Z > 0 \end{cases}$$

§2. 和ト差

独立ナ四捨五入シタ数ヲイクツカ加ヘタ時ノ誤差分布ニツイテハ既ニ宇野利雄氏（日本数学物理学會誌第十四巻）ガ求メテ居ラレルガFourier変

換ヲ用ヒナクテモ出来ルカラ重複スルガヤッテ見ル

四捨五入シテ得ラレタ数ヲx_iトスル。但シ四捨五入シテ小数第m位迄求メタ数ナラバ10^m倍シテ考ヘレバヨイカラx_iハ整数デアルトシ、且負号ハ考ヘナイデ正又ハ0トスル。シカラバ確率変数ト考ヘラレル眞値X_iノ確率函数$f_i(x)$ト分布函数$F_i(x)$ハ

$$(9)\qquad f_i(x) = \begin{cases} 0 & x < x_i - \frac{1}{2}, \quad x \geq x_i + \frac{1}{2} \\ 1 & x_i - \frac{1}{2} \leq x < x_i + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(10)\qquad F_i(x) = \begin{cases} 0 & x < x_i - \frac{1}{2} \\ x - x_i + \frac{1}{2} & x_i - \frac{1}{2} \leq x < x_i + \frac{1}{2} \\ 1 & x_i + \frac{1}{2} \leq x \end{cases}$$

デ与ヘラレル。和ト差ノ時ハx_iノ値自身ハ誤差ニキイテコナイカラ、本節デハx_iハスベテ0トシソノ時ノ確率函数、分布函数ヲ單ニ$f(x)$, $F(x)$トスル。

(7)ヲ用フレバX_1+X_2ノ分布函数ハ

$$F^{(2)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z-x)\,dF(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(z-x)\cdot dx$$

欲シイノハ寧ロ確率函数デアルカラ微分シテヤレバ

$$f^{(2)}(z)=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} F(z-x)\,dx = \Big[-F(z-x)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = F(z+\tfrac{1}{2})-F(z-\tfrac{1}{2})$$

$$=\begin{cases} 0 & z<-1 \\ 1+z & -1\leq z<0 \\ 1-z & 0\leq z<1 \\ 0 & 1\leq z \end{cases}$$

一般ニ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ノ確率函数、分布函数ヲ $f^{(n)}(x)$, $F^{(n)}(x)$ トスレバ (1) ニヨリ

$$F^{(n)}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} F^{(n-1)}(z-x)\,dF(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F^{(n-1)}(z-x)\cdot dx$$

$$\therefore\ f^{(n)}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} F^{(n-1)'}(z-x)\,dx=\Big[-F^{(n-1)}(z-x)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=F^{(n-1)}(z+\tfrac{1}{2})-F^{(n-1)}(z-\tfrac{1}{2})$$

コレガ誤差 $\sum_{i=1}^{n-1} X_i$ カラ誤差 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ニ移ル基本式デアル。コレヲ解クニハ宇野氏ノ様ニ

$$E_n(x)=\begin{cases} \dfrac{x^n}{n!} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$$E_0(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

ナル函数ト

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$$

ナル作用素 Δ ヲ用ヒルト

$$f^{(n)}(x) = \Delta^n E_{n-1}\left(z - \frac{n}{2}\right)$$

$$F^{(n)}(x) = \Delta^n E_n\left(z - \frac{n}{2}\right)$$

トナル。

差 $X_1 - X_2$ ノ時ハ $X_1 + (-X_2)$ ト考ヘルト、$-X_2$ ナル確率変数ノ分布函数ハ今ノ場合 X_2 ノ分布函数ト $\frac{1}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}$ デ異ルダケデアルカラ、上ノ議論ハ本質的ニ異ル所ハナクナル。

次ニ a_i ヲ定数（但シ $a_i < 0$ ナル時ハ $a_i X_i = |a_i|(-X_i)$ ヲ考フレバヨイカラ $a_i > 0$ トスル］トシテ $a_i X_i$ ナル確率変数ヲ考ヘルト（7）カラワカル様ニコレノ分布函数ト確率函数ハ $F\left(\frac{x}{a_i}\right)$ 及 $\frac{1}{a_i} f\left(\frac{x}{a_i}\right)$ デアル。$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ ノ確率函数、分布函数ヲ夫々 $f_a^{(n)}(x)$, $F_a^{(n)}(x)$ トスレバ（1）ニヨリ

$$F_a^{(n)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_a^{(n-1)}(z-x) \cdot dF\left(\frac{x}{a_n}\right) = \frac{1}{a_n} \int_{-\frac{a_n}{2}}^{\frac{a_n}{2}} F_a^{(n-1)}(z-x) \cdot dx$$

$$\therefore f_a^{(n)}(z) = \frac{1}{a_n} \int_{-\frac{a_n}{2}}^{\frac{a_n}{2}} F_a^{(n-1)}(z-x)\, dx = \frac{1}{a_n}\left[-F_a^{(n-1)}(z-x)\right]_{-\frac{a_n}{2}}^{\frac{a_n}{2}}$$

$$= \frac{1}{a_n}\left[F_a^{(n-1)}\left(z + \frac{a_n}{2}\right) - F_a^{(n-1)}\left(z - \frac{a_n}{2}\right)\right]$$

コレガ $\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i$ ノ誤差カラ $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ ノ誤差ニ移ル基本式デアッテ、コレヲ解クニハ

$$\Delta_a f(x) = \frac{1}{a}\left[f\left(x - \frac{a}{2}\right) - f\left(x - \frac{a}{2}\right)\right]$$

ナル作用素Δ_aヲ用ヒルト

$$f_a^{(n)}(x)=\Delta a_1\cdot\Delta a_2\cdot\cdots\cdots\Delta a_n\cdot E_{n-1}(x)$$
$$F_a^{(n)}(x)=\Delta a_1\cdot\Delta a_2\cdot\cdots\cdots\Delta a_n\cdot E_n(x)$$

トナル

無限ニ加ヘタ時ドウナルカトイフコトモ興味アル問題デアルガ、コレニ對シテハ中央極限定理ガ解答スル。今ノ場合ニハ

$$\frac{x_1+\cdots\cdots+x_n}{\sqrt{n}}$$

ナル確立変数ハ$n\longrightarrow\infty$ナル時

$$\sqrt{\frac{6}{\pi}}\,e^{-6x^2}\qquad\left(標準偏差\frac{1}{\sqrt{12}}\right.$$

ナル法則ニ近ヅク。シカシnガ非常ニ小サクテ，例ヘバ$n=4$ナル時ニモ法則ガ殆ド正規分布ト変ラナイコトハ宇野氏ノ示サレル通リデアル。

§3、積

今度ハ(3)ヲ用ヒテ$\prod_{i=1}^{n}x_i$ノ誤差ヲ求メテ見ル。積ノ場合ニハx_iノ値自身モ誤差ニキイテクルカラ、ソノ確率函数、分布函数ハ(9)(10)デ与ヘラレルモノトスル。*

---

* H. Sakamoto; On the distribution of the product and quotient of the independent

(3) ヲ用フレバ $x_1 \cdot x_2$ ノ誤差ノ分布函数 $K^{(2)}(z)$ ハ先ヅ $x_2 > x_1 \geq 1$ トシテ

$$K^{(2)}(z) = \int_{-\infty}^{0} \left[1 - F_1\left(\frac{z}{x}\right)\right] \cdot dF_2(x) + \int_{0}^{+\infty} F_1\left(\frac{z}{x}\right) dF_2(x)$$

$$= \int_{x_2 - \frac{1}{2}}^{x_2 + \frac{1}{2}} F_1\left(\frac{z}{x}\right) \cdot dx$$

確率函数 $k^{(2)}(z)$ ハ

$$k^{(2)}(z) = \int_{x_2 - \frac{1}{2}}^{x_2 + \frac{1}{2}} \frac{1}{x} F_1'\left(\frac{z}{x}\right) \cdot dx = \int_{\frac{z}{x_2 + \frac{1}{2}}}^{\frac{z}{x_2 - \frac{1}{2}}} \frac{1}{y} \cdot f_1(y) \cdot dy$$

$$= \begin{cases} 0 & z < (x_1 - \frac{1}{2})(x_2 - \frac{1}{2}) \\ \log \dfrac{z}{(x_1 - \frac{1}{2})(x_2 - \frac{1}{2})} & (x_1 - \frac{1}{2})(x_2 - \frac{1}{2}) \leq z < (x_1 - \frac{1}{2})(x_2 + \frac{1}{2}) \\ \log \dfrac{x_2 + \frac{1}{2}}{x_2 - \frac{1}{2}} & (x_1 - \frac{1}{2})(x_2 + \frac{1}{2}) \leq z < (x_1 + \frac{1}{2})(x_2 - \frac{1}{2}) \\ \log \dfrac{(x_1 + \frac{1}{2})(x_2 + \frac{1}{2})}{z} & (x_1 + \frac{1}{2})(x_2 - \frac{1}{2}) \leq z < (x_1 + \frac{1}{2})(x_2 + \frac{1}{2}) \\ 0 & (x_1 + \frac{1}{2})(x_2 + \frac{1}{2}) \leq z \end{cases}$$

---

and uniformly distributed random variables (The Tôhoku math. jour., Vol 49. Part 2. 1943) ニハ x_i ガスベテ 1 ナル特別ノ場合ニツイテ論ジラレテヰル.

トナル。図示スレバ fig 2 ノ様ニナル。

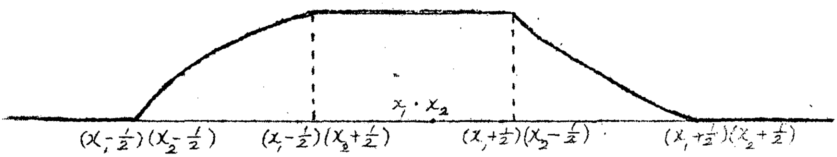


fig 2

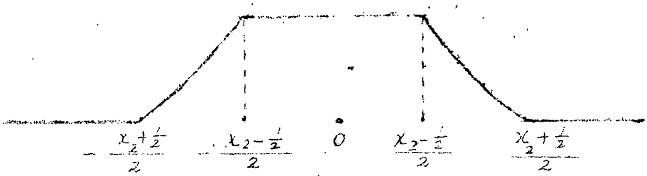
$x_1 > x_2 \geq 1$ ナラバコノ結果デ x_1 ト x_2 ヲ交換スレバヨイ。$x_1 = x_2 \geq 1$ ナラ fig 2 ノ定数ノ部分ガナクナッテ、$x_1 \cdot x_2$ ハ mode カラ $\frac{1}{4}$ 右ヘ行ッタ所ニ位置スル。

実際上殆ド現レナイ場合ダガ、$x_2 > x_1 = 0$ ナル時ニハ

$$h^{(2)}(z) = \int_{\frac{z}{x_2+\frac{1}{2}}}^{\frac{z}{x_2-\frac{1}{2}}} \frac{1}{y} \cdot f_1(y) \cdot dy$$

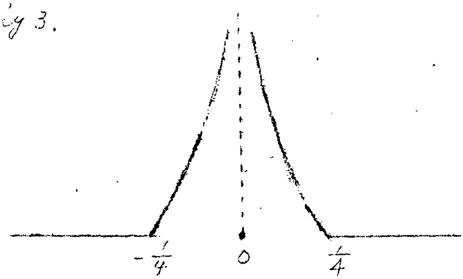
$$= \begin{cases} 0 & z < -\frac{x_2+\frac{1}{2}}{2} \\ \log \frac{x_2+\frac{1}{2}}{2(-z)} & -\frac{x_2+\frac{1}{2}}{2} \leq z < -\frac{x_2-\frac{1}{2}}{2} \\ \log \frac{x_2+\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} & -\frac{x_2-\frac{1}{2}}{2} \leq z < 0 \text{ 及ビ } 0 \leq z < \frac{x_2-\frac{1}{2}}{2} \\ \log \frac{x_2+\frac{1}{2}}{2z} & \frac{x_2-\frac{1}{2}}{2} \leq z < \frac{x_2+\frac{1}{2}}{2} \\ 0 & \frac{x_2+\frac{1}{2}}{2} \leq z \end{cases}$$

圖示スレバ fig 3. A ノ様ニナル。



A

fig 3.



B.

又 $x_1 = x_2 = 0$ ノ時ニハ

$$K_1^{(2)}(z) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[1 - F_1\left(\frac{z}{x}\right)\right] \cdot dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} F_1\left(\frac{z}{x}\right) dx$$

$$k^{(2)}(z) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left[-\frac{1}{x} F_1'\left(\frac{z}{x}\right)\right] \cdot dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{x} F_1'\left(\frac{z}{x}\right) dx$$

$$= \int_{\frac{z}{-\frac{1}{2}}}^{-\infty} \frac{1}{y} f_1(y)\, dy + \int_{\frac{z}{\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{1}{y} \cdot f_1(y)\, dy$$

$$= \begin{cases} 0 & z < -\frac{1}{4} \\ \log \frac{1}{16 z^2} & -\frac{1}{4} \leq z < \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} \leq z \end{cases}$$

トナリ図示スレバ fig 3.B ノ様ニナル。

三ツ及ソレ以上カケル時ニハドウナルカ。簡単ノタメ $x_i \neq 0$ トシテ $\prod_{i=1}^{n} x_i$ ノ分布函数、確率函数ヲ $K^{(n)}(z)$, $k^{(n)}(z)$ トスレバ (3) ヲ用ヒテ

$$K^{(n)}(z)=\int_{-\infty}^{0}\left[1-K^{(n-1)}\left(\frac{z}{x}\right)\right]dF_n(x)+\int_{0}^{+\infty}K^{(n-1)}\left(\frac{z}{x}\right)dF_n(x)$$

$$=\int_{x_n-\frac{1}{2}}^{x_n+\frac{1}{2}}K^{(n-1)}\left(\frac{z}{x}\right)dx$$

$$k^{(n)}(z)=\int_{x_n-\frac{1}{2}}^{x_n+\frac{1}{2}}\frac{1}{x}k^{(n-1)}\left(\frac{z}{x}\right)dx$$

$$k^{(n)\prime}(z)=\int_{x_n-\frac{1}{2}}^{x_n+\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2}k^{(n-1)\prime}\left(\frac{z}{x}\right)dx=\int_{\frac{z}{x_n+\frac{1}{2}}}^{\frac{z}{x_n-\frac{1}{2}}}\frac{1}{z}k^{(n-1)\prime}(y)\,dy$$

$$=\frac{1}{z}\left[k^{(n-1)}\left(\frac{z}{x_n-\frac{1}{2}}\right)-k^{(n-1)}\left(\frac{z}{x_n+\frac{1}{2}}\right)\right]$$

コレガ $\prod_{i=1}^{n-1} x_i$ ノ誤差カラ $\prod_{i=1}^{n} x_i$ ノ誤差ニ移ル基本式デアル。

$$\nabla_a f(x)=f(ax)$$

ナル作用素 ∇_a ヲ用ヒルト

$$k^{(n)\prime}(z)=\frac{1}{z}\left(\nabla_{\frac{1}{x_n-\frac{1}{2}}}-\nabla_{\frac{1}{x_n+\frac{1}{2}}}\right)k^{(n-1)}(z)$$

コレデトクノデアルガ先ヅ

$$k^{(1)}(z)=\left(\nabla_{\frac{1}{x_1-\frac{1}{2}}}-\nabla_{\frac{1}{x_1+\frac{1}{2}}}\right)E_0(z-1)$$

デアルカラ

$$k^{(2)\prime}(z)=\frac{1}{z}\left(\nabla_{\frac{1}{x_2-\frac{1}{2}}}-\nabla_{\frac{1}{x_2+\frac{1}{2}}}\right)\left(\nabla_{\frac{1}{x_1-\frac{1}{2}}}-\nabla_{\frac{1}{x_1+\frac{1}{2}}}\right)E_0(z-1)$$

両辺ヲ z ニツイテ 0 ニゴク近イ点 $+0$ カラ z 迄積分シ、$k^{(n)}(+0)=0$ ナルコトニ注意スレバ

$$k^{(2)}(z)=\int_{+0}^{z}\frac{1}{z}\prod_{i=1}^{2}\left(\nabla_{\frac{1}{x_i-\frac{1}{2}}}-\nabla_{\frac{1}{x_i+\frac{1}{2}}}\right)E_0(z-1)\cdot dz$$

コレハ $\int_{+0}^{z}\frac{1}{z}\nabla_a E_0(z-1)\,dz$ ナル形ノ積分ノ和デアルガ

$$\int_{+0}^{z}\frac{1}{z}\nabla_a E_0(z-1)dz=\int_{+0}^{z}\frac{1}{z}E_0\left(\frac{z}{a}-1\right)dz$$

$$=\begin{cases}0 & (z<a)\\ \int_a^z\frac{1}{z}dz=\log\frac{z}{a} & (z\geq a)\end{cases}$$

$$=\log\frac{z}{a}\cdot E_0\left(\frac{z}{a}-1\right)=\nabla_a\cdot\log z\cdot E_0(z-1)$$

デアルカラ結局

$$k^{(2)}(z)=\prod_{i=1}^{2}\left(\nabla_{\frac{1}{x_i-\frac{1}{2}}}-\nabla_{\frac{1}{x_i+\frac{1}{2}}}\right)\log z\cdot E_0(z-1)$$

コレハ如何ニモ本節始メノ結果ニ一致シテヰル。

次ニコレヲ用フレバ、

$$k^{(2)}(z)=\int_{+0}^{z}\frac{1}{z}\prod_{i=1}^{2}\left(\nabla_{\frac{1}{x_i-\frac{1}{2}}}-\nabla_{\frac{1}{x_i+\frac{1}{2}}}\right)\cdot\log z\cdot E_0(z-1)\,dz$$

トナルガ

$$\int_{+0}^{z} \frac{1}{z} \nabla_a \log z \, E_0(z-1)\, dz = \int_{+0}^{z} \frac{1}{z} \log\frac{z}{a} \cdot E_0\left(\frac{z}{a}-1\right) dz$$

$$= \begin{cases} 0 & (z < a) \\ \int_a^z \frac{1}{z}\log\frac{z}{a}\, dz = \frac{1}{2}\left(\log\frac{z}{a}\right)^2 & (z \geq a) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log\frac{z}{a}\right)^2 \cdot E_0\left(\frac{z}{a}-1\right) = \nabla_a \frac{(\log z)^2}{2} \cdot E_0(z-1)$$

デアルカラ

$$h^{(3)}(z) = \prod_{i=1}^{3} \left(\nabla_{\frac{1}{x_i - \frac{1}{2}}} - \nabla_{\frac{1}{x_i + \frac{1}{2}}}\right) \frac{(\log z)^2}{2} E_0(z-1)$$

トナル。同様ノコトヲクリ返セバ

$$h^{(n)}(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(\nabla_{\frac{1}{x_i - \frac{1}{2}}} - \nabla_{\frac{1}{x_i + \frac{1}{2}}}\right) \frac{(\log z)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot E_0(z-1)$$

ナル結果ヲ得ル。

無限ニカケ。ル問題ニツイテハ後ニトリアゲル。

§4. 商

x_i ノ確率函数、分布函数ハヤハリ(9)(10)デ与ヘラレルトスル。$x_1 > 0$, $x_2 > 0$ トスルト x_1/x_2 ノ誤差ノ分布函数ハ(4′)ニヨリ

$$W^{(2)}(z) = \int_{-\infty}^{0} [1 - F_1(z \cdot x)]\, dF_2(x) + \int_{0}^{+\infty} F_1(z\cdot x)\cdot dF_2(x)$$

$$= \int_{x_2 - \frac{1}{2}}^{x_2 + \frac{1}{2}} F_1(z \cdot x) \cdot dx$$

確率函数ハ

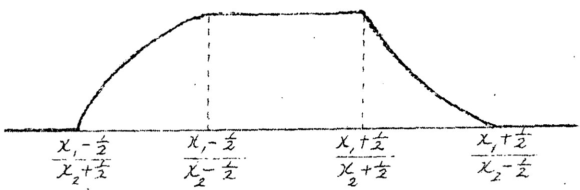
$$w^{(2)}(z)=\int_{x_2-\frac{1}{2}}^{x_2+\frac{1}{2}} x\cdot F_1'(z\cdot x)\,dx=\frac{1}{z^2}\int_{(x_2-\frac{1}{2})z}^{(x_2+\frac{1}{2})z} y\cdot f_1(y)\cdot dy$$

コノ積分ハ x_1, x_2 ノ大小ニヨリ異ル結果ヲ与ヘル。

$x_1 < x_2$ ナラバ

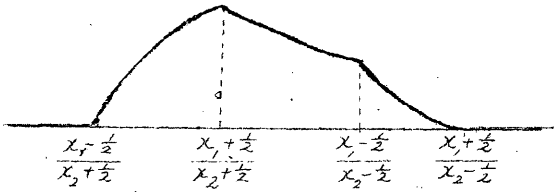
$$w^{(2)}(z)=\begin{cases} 0. & z<\dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2z^2}\left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)^2 & \dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}}\leq z<\dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} \\[2ex] x_2 & \dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}}\leq z<\dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}} \\[2ex] \dfrac{1}{2z^2}\left(x_1+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(x_2-\dfrac{1}{2}\right)^2 & \dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}}\leq z<\dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} \\[2ex] 0 & \dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}}\leq z \end{cases}$$

図示スレバ fig 4 A ノ様ニナル。



A

fig 4



B

$x_1 > x_2$ ナラバ

$$W^{(2)}(z) = \begin{cases} 0 & z < \frac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}\left(x_2+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2z^2}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2 & \frac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}} \leq z < \frac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}} \\ \frac{x}{z} & \frac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}} \leq z < \frac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2z^2}\left(x_1+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2 & \frac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} \leq z < \frac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} \\ 0 & \frac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} \leq z \end{cases}$$

圖示スレバ fig 4.B ノ様ニナル。

コレモ実際上殆ド現レナイ場合ダガ、$x_1 = 0$, $x_2 > 0$ ノ時ニハ fig 5 ノ様ナ結果ヲ得タ。

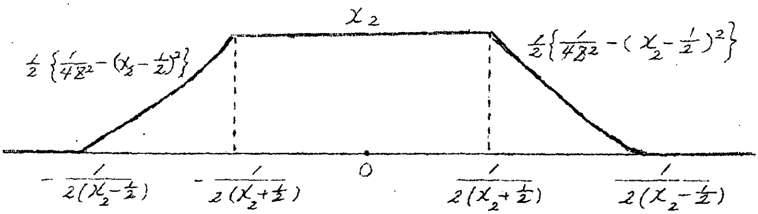


fig 5

ソレカラ実際数値計算ヲスル時割リ算スルカハリニ逆数ヲトッテカケルトイフコトが屢々行ハレルカラ，ソノトキノ誤差分布モ調ベテ見タ，方法ハ(8′)ヲ用ヒテ $\frac{1}{x_2}$ ノ分布函数ヲ求メ次ニ例ノ如ク(3)ヲ用ヒタ，結果ハ $0<x_1<x_2$ ナラバ

$$h^*(z)=\begin{cases} 0 & z<\dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}} \\ (x_2^2-\frac{1}{4})\log\dfrac{(x_2+\frac{1}{2})z}{x_1-\frac{1}{2}} & \dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}}\leq z<\dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} \\ (x_2^2-\frac{1}{4})\log\dfrac{x_2+\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} & \dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}}\leq z<\dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}} \\ (x_2^2-\frac{1}{4})\log\dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{(x_2-\frac{1}{2})z} & \dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}}\leq z<\dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} \\ 0 & \dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}}\leq z \end{cases}$$

$x_1>x_2>0$ ナラバ

$$h^*(z)=\begin{cases} 0 & z<\dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}} \\ (x_2^2-\frac{1}{4})\log\dfrac{(x_2+\frac{1}{2})z}{x_1-\frac{1}{2}} & \dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}}\leq z<\dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}} \\ (x_2^2-\frac{1}{4})\log\dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_1-\frac{1}{2}} & \dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2+\frac{1}{2}}\leq z<\dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} \\ (x_2^2-\frac{1}{4})\log\dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{(x_2-\frac{1}{2})z} & \dfrac{x_1-\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}}\leq z<\dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}} \\ 0 & \dfrac{x_1+\frac{1}{2}}{x_2-\frac{1}{2}}\leq z \end{cases}$$

圖ハ何レモ fig 4. A ト同ジ様ナ形ヲトル。

§5. 補　遺

実際計算上求メタ数ヲn乗シタリ，指数・對数ヲトッタリスルコトガヨクアルカラソレラニツイテノ考察モ必要デアラウ。

Xノ分布函数ヲ $F(X)$ トシテ

i) nヲ正整数トシタ時ノ $Z = X^n$ ノ分布函数 $B(Z)$ ヲ求メル＝

nが偶数ナラバ

$$(11)\quad B(Z)=\begin{cases} F(\sqrt[n]{Z})-F(-\sqrt[n]{Z}) & \text{for } Z \geqq 0 \\ 0 & \text{for } Z < 0 \end{cases}$$

nが奇数ナラバ

$$(11)\quad B(Z)=F(\sqrt[n]{Z})$$

ii) Xが負ノ値ヲトラナイ時，$Z = X^{\frac{1}{n}}$ (n；正整数) ノ分布函数ハ

$$(12)\quad B^*(Z)=F(Z^n)$$

iii) $Z = e^X$ ノ分布函数ハ

$$(13)\quad S(Z)=\begin{cases} 0 & \text{for } Z \leqq 0 \\ F(\log Z) & \text{for } Z > 0 \end{cases}$$

iv) Xが負ノ値ヲトラナイ時，$Z = \log X$ ノ分布函数ハ

$$(14)\quad L(Z)=F(e^Z)$$

Xガ四捨五入ノ確率変数デアレバ、(11)乃至(14)ニ於テ$F(x)$トシテ(10)デ与ヘラレル$F_i(x)$ヲトレバヨイ。

又先ニ§3デ四捨五入シタ数ヲイクツカ、カケタ時ノ誤差分布ヲ求メタガ、ココ迄出スト、和ノ時ト同様ニシテ無限ニカケタ時ノ誤差ガドノ様ナ分布ヲ呈スルカトイフコトガ當然問題トナル。ソレニ答ヘルタメニハ積ノ場合ノ中央極限定理トモ言フベキモノヲ考ヘルノガヨイデアラウ。

定理

$0<A<X_i<B$　(A, Bハ二ツノ定数)ナル互ニ独立ナ確率変数ヲX_iトシ夫々ノ分布函数ヲ$F_i(x)$トスル時

$$S_n^2=\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{+\infty}(\log x)^2\cdot dF_i(x)-\left(\int_0^{+\infty}\log x\cdot dF_i(x)\right)^2\right\}$$

ガ$n\to\infty$ナル時∞ニ近ヅケバ、確率定数

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\mu_i}\right)^{\frac{1}{S_n}}$$

但シ $\mu_i=\exp\left(\int_0^{+\infty}\log x\cdot dF_i(x)\right)$

ハ$n\to\infty$ナルトキ

$$\begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \Phi(\log x) & x > 0 \end{cases}$$

ナル分布ニ近ヅク。但シ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

デアル。

證　明

X_i ノ分布函數ガ $F_i(x)$ ナラバ $\log X_i$ ノ分布函數ハ(14)ニヨリ $F_i(e^x)$ デアル。故ニソノ平均値ト分散ハ

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF_i(e^x) = \int_0^{+\infty} \log y \cdot dF_i(y)$$

$$\sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_i)^2 dF_i(e^x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_i(e^x) - m_i^2$$

$$= \int_0^{+\infty} (\log y)^2 dF_i(y) - m_i^2$$

デアル。ソコデ

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^{+\infty} (\log y)^2 dF_i(y) - m_i^2 \right\} = S_n^2$$

トスレバ，仮定ニヨリコレハ $\to \infty$ デアリ，又 X_i ニツイテノ仮定ヨリ $\log X_i$ モ有界デアルカラ，中央極限定理ガ用ヒラレテ，確率変数

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(\log x_i - m_i)}{S_n} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n}\log\frac{x_i}{u_i}}{S_n}$$

但シ $u_i = e^{m_i} = \exp\left(\int_0^{+\infty}(\log y)\,dF_i(y)\right)$

ノ分布函数ハ $n \longrightarrow \infty$ ナルトキ $\Phi(x)$ ニ近ヅク。

サテ確率変数列 $Y_1\ Y_2 ---- Y_n ----$ ガアルトキ Y_n ノ分布函数 $G_n(y)$ ガ分布函数 $G(y)$ ニ収斂スルカラ，e^{Y_n} ノ分布函数ハ e^{Y} ノ分布函数ニ収斂シ、ソレハ (13) ニヨレバ

$$\begin{cases} 0 & y \leqq 0 \\ G(\log y) & y > 0 \end{cases}$$

デアル。

コノコトヲ用ヒレバ確率変数

$$\exp\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\log\frac{x_i}{u_i}}{S_n}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{u_i}\right)^{\frac{1}{S_n}}$$

ノ分布ハ $n \longrightarrow \infty$ ナル時

$$\begin{cases} 0 & x \leqq 0 \\ \Phi(\log x) & x > 0 \end{cases}$$

ナル分布ニ近ヅク。

（以　上）

四捨五入ノ場合ニハ x_i ハ (9)(10) デ与ヘラレ、コノ時ニハ

$$u_i = \frac{(x_i+\frac{1}{2})^{x_i+\frac{1}{2}}}{e(x_i-\frac{1}{2})^{x_i-\frac{1}{2}}}$$

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\left\{1-(x_i^2-\tfrac{1}{4})\left(\log\frac{x_i+\frac{1}{2}}{x_i-\frac{1}{2}}\right)^2\right\}$$

デアル。サテ $f(x)=(x^2-\frac{1}{4})\left(\log\frac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)^2$ ナル函数ヲ考ヘルト、コレハ $f(1)\fallingdotseq 0.91$ デ以後単調ニ増大シテ $f(\infty)=1$ トナル。故ニ S_n^2 ニオケル $\sum$ ハ $n\to\infty$ ナルトキ収斂スルコトモアルガ、コレガ発散スレバ S_n ハ定理ノ條件ヲ満足スル。特ニ x_i ガスベテ有界デアルトイフ普通ノ場合ニハ $S_n^2\to\infty$ トナッテ定理ノ條件ガ満足サレル。