ストカスチック補間法

宇野利雄

確率過程 $X(t)$ ニツキ パラメーター t ノ値 $t_{-n+1}<\cdots<t_{-1}<t_0<t_1<\cdots<t_n$ 等ニテノ X ノ値ガ知ラレタトキ t_0 ト t_1 トノ間ノ t ノ値ニツイテハ X ヲ加何ニ推定スベキカ

Kolmogoroff ハ之ニ関シ $X(t)$ ヲ他ノ既知ノモノノ一次式

$$L=a_{-n+1}X(t_{-n+1})+\cdots+a_0X(t_0)+a_1X(t_1)+\cdots+a_nX(t_n)$$

デアラハシ、係数 a_m ヲ

$$E\{X(t)-L\}^2=\text{極小}$$

ナル如クエラブトシテ之ヲ Interpolation ト呼ンダ

(A. Kolmogoroff, Sur l'interpolation et extrapalation des suites stationnaires C. R. 208 (1939))

コヽデハコレト多少異ッタ見地カラコノ問題ヲ取扱ッテ見ヤウト思フ。

$X(t_m)=x_m$ トシ、又 $t_0<t<t_1$ ナル t ニツイテノ

$X(t)$ ヲ x トスル確率過程 $X(t)$ ノ t_m ($m=-n+1$ 乃至 n) 及ビ t ニ於ケル状況ハ ($x_{-n+1},\cdots\cdots,x_n,x$) ノ分布ヲ規定スル ($2n+1$) 次元確率分布ニヨッテ定メラレル。コノ確率密度ヲ $F(x,x_{-n+1},\cdots\cdots,x_n)$ トスレバ x_{-n+1} 乃至 x_n マデノ x_m ガ既知トナッタトキノ x ノ分布状況ハコノ F ノ中ノ x_m ニコレ等既知ノ値ヲ代入シテ知ルコトガ出来ル。

簡単ノ為ニ F ガ正規分布デアル場合即チ

$$F=\text{常数}\cdot e^{-\frac{q}{2}},$$

(但シ $q=x_m$ 及 x ノ二次形式) ナルトキヲ考ヘテ見ル、

二次形式 q ヲ x ヲ含ム項ト然ラザル項トニ分チ，x ヲ含ム項ヲ平方ノ形 αy^2 (y ハ x 及 x_m ノ一次式) ニ書イテ

$$q=\alpha y^2+q_1$$

ノ如クニスル、q_1 ハ x ヲ含マザル項デアル。

x_m ガ既知トナッタトキハ q_1 従ッテ $e^{-\frac{q_1}{2}}$ ハ常数トナリ，結局 $e^{-\frac{\alpha y^2}{2}}$ ノ項ガ x ノ分布法則ヲキメルコトヽナル、上式カラ y ハ標準偏差ガ $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ デアル様ナ正規分布確率変数デアル。

従ッテ今 y ガ

$$y=x+\Sigma a_m x_m+b$$

デアッタトスレバ X ハ

$$X = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} U - \sum a_m X_m - b$$

ノ如クナル訳デアル、茲ニ U ヲ以テ標準偏差 1 ナル正規分布確率変数トシタ。

特殊ノ場合トシテ $E\{X(t)\} = 0$, $E\{X(t)^2\} = 1$ トシ又時間 S ヲ隔ツル間ノ X ノ相関係数ガ

$$E\{X(t)X(t+S)\} = e^{-\lambda|S|}$$

ナル如キ場合ヲ考ヘテ見ル、相関係数ガ上ノ如キ場合ハ僅カノ計算ニヨリ q ガ

$$q = X_{-n+1}^2 + \sum \frac{1}{1-\mu_m^2}(X_m - \mu_m X_{m-1})^2 +$$

$$\frac{1}{1-\mu^2}(X - \mu X_0)^2 + \frac{1}{1-V^2}(X_1 - yX)^2$$

ナル如キ形式トナルコトガ分ル　但シ $\mu_m = e^{-\lambda(t_m - t_{m-1})}$,
$\mu = e^{-\lambda(t - t_0)}$, $y = e^{-\lambda(t_1 - t)}$ デアリ又 $\sum$ ハ m ノ $-n+2$ 乃至 0, 及ビ 2 乃至 n ニツイテ総和スル、斯カル q ニツイテ先ニ述ベタ変形ヲ行ヘバ

$$\text{(A)} \quad q = \frac{1-\mu^2 V^2}{(1-\mu^2)(1-V^2)} \left\{ X - \frac{\mu(1-V^2)X_0 + V(1-\mu^2)X_1}{1-\mu^2 V^2} \right\} + q_1$$

トナル。

コノ際ノ特徴ハ y ニ相当スル上記括弧中ニ直接 x ヲ挟ム x_0, x_1 ガ入ルノミデ他ノ x_m ノ入ラヌコトデアル、即チ x ハコレヲ直接ニ挟ム x_0 及ビ x_1 ノミニヨッテ定メラレル、

而シテ上式ハ

$$x = \frac{u(1-v^2)x_0 + v(1-u^2)x_1}{1-u^2v^2}$$

ガ標準偏差 $\sqrt{\dfrac{(1-u^2)(1-v^2)}{1-u^2v^2}}$ ナル正規分布確率変数ナル事ヲ示ス故 v' ヲ以テ標準偏差 1 ナル正規分布確率変数トスレバ

$$\text{(A)} \qquad x = \frac{u(1-v^2)x_0 + v(1-u^2)x_1}{1-u^2v^2} + \sqrt{\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{1-u^2v^2}}\, v'$$

デ補間ガ与ヘラレル。

試ミニ Kolmogoroff ノ流儀ニ倣ヒ $\mathrm{X}(t)$ ヲ

$$a_0 \mathrm{X}(t_0) + a_1 \mathrm{X}(t_1)$$

ノ如キ形式ニテアラハストシテ、之ヲ

$$E\{\mathrm{X}(t) - [a_0 \mathrm{X}(t_0) + a_1 \mathrm{X}(t_1)]\}^2 = min.$$

ヨリ求メントスレバ、コノ際

$$E[\mathrm{X}^2(t_0)] = E[\mathrm{X}^2(t_1)] = E[\mathrm{X}^2(t)] = 1$$

$$E[X(t)X(t_0)] = \mu,$$

$$E[X(t)X(t_1)] = \nu$$

ナルコトヨリ

$$a_0 = \frac{\mu(1-\nu^2)}{1-\mu^2\nu^2}, \qquad a_1 = \frac{\nu(1-\mu^2)}{1-\mu^2\nu^2}$$

トナリ，（A）式前半部即チ補間値ノ平均ヲ得ルニ過ギナイ.

（A）式ノ意味ハ μ，ν ニ特別ノ値ヲ代入シタルトキニ於テ非常ニ明瞭ニ了解サレル.

i）$\lambda = \infty$ 即チ $\mu = \nu = 0$ ノトキ；

コノトキハ明ニ $X(t_0)$，$X(t)$，$X(t_1)$ 相互ガ独立ノトキデアル.

コノコトハ（A）式ニ於テ $x = \bar{\nu}$ ヲ得ルノト一致シテオル.

ii）$\lambda = 0$ 即チ $\mu = \nu = 1$ ノトキ；

コノトキハ $X(t_0)$，$X(t)$，$X(t_1)$ 相互ノ間ニ完全ナ相関ガアル場合デアル。

之ヲ（A）ニ代入スレバ（極限値トシテ）

$$x = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} x_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} x_1$$

ガ得ラレ、即チ通常ノ一次補間法ノ場合ト同一ノ結果ニナル.