坂元氏ノ補助定理ノ代數的証明

所員　小川潤次郎

統計數理研究所講究録第一巻第九号(昭和19年11月15日發行)ニ於テ、坂元平八氏ハ"統計量ノ独立性ニ就テ"ナル論文ヲ発表セラレタ。其ノ中ニ補助定理IIトシテ次ノ定理ガアル。

二ツノ同次數ノ「エルミット行列」A, Bガスベテノt_1, t_2ニタイシテ

$$|(E-t_1A)(E-t_2B)| = |E-t_1A-t_2B|$$

ナル関係ヲ満足スルタメノ必要充分條件ハ $AB=0$ ナルコトデアル(講究録6頁)。

コレニ関シテ坂元氏モ「以下ノ必要ナルコトノ証明ハ筆者ノ意ニ満タナイ」ト云ハレ、ソレノ代数的ナ証明ヲ求メラレテヰル。

以下筆者ノ証明ヲ述ベル。

充分條件ノ方ハ明ラカデアルカラ、必要條件ヲ証明スル。

A, Bヲn次ノエルミット行列トスル。今、A, Bヲn次元ノ線型ベクトル空間$\mathfrak{L}$ノ一次変換ト考ヘル。然ラバ$\mathfrak{L}$ノベクトル$\mathfrak{x}$デ$A\mathfrak{x}=0$ニナルモノノ全体ハ$\mathfrak{L}$ノ線形部

(四)

分空間$\mathfrak{N}_A$ヲ作ル。此ヲAノ零点集合ト云フコトニスル。然ラバ$\mathfrak{L}$ハ

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{M}+\mathfrak{N}_A$$

ノ形ノ直和ニナッテ、$\mathfrak{M}$ハ$\mathfrak{L}$ノAデ0ニ写像サレヌベクトルノ全体デアル。而シテAハエルミットデアルカラ$\mathfrak{L}$ノ底ヲ適当ニ選ベバ

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_{m_1} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ノ形トナル。換言スレバ$\mathfrak{M}$ノ次元ガm_1、$\mathfrak{N}_A$ノ次元ガn_1ト云フコトデアル。

同様ニBニ関シテハ

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{M}'+\mathfrak{N}_B$$

トナッテ、底ヲ適当ニ取レバ

$$B=\begin{pmatrix} \beta_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \beta_{m_2} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

ノ形トナルカラ、$\mathfrak{M}'$ノ次元m_2、$\mathfrak{N}_B$ノ次元n_2トスル。

扨テスベテノt_1, t_2ニ対シテ

$$|E-t_1A||E-t_2B|=|E-t_1A-t_2B|$$

デアル。$t_1=t_2=\frac{1}{x}$トオケバ

$$|xE-A||xE-B|=x^n|xE-A-B|$$

従ッテ両辺固有値ノ数ヲカゾヘテ、

$$n_1+n_2=n+p$$

且ニ p ハ $A+B$ ノ特有根 0 ノ数デアル。

$A\mathfrak{x}=0,\ B\mathfrak{x}=0$ ナラ $(A+B)\mathfrak{x}=A\mathfrak{x}+B\mathfrak{x}=0$ ダカラ

明カニ

$$\mathfrak{N}_A\wedge\mathfrak{N}_B\leqq\mathfrak{N}_{A+B}$$

$\mathfrak{N}_{A+B}$ ハ $A+B$ ノ零点集合デアル。故ニ

$$\mathfrak{N}_A\wedge\mathfrak{N}_B\text{ ノ次元}\leqq\mathfrak{N}_{A+B}\text{ ノ次元}=p \quad (2)$$

次ニ $\mathfrak{N}_A$ ト $\mathfrak{N}_B$ ヲ含ム最小ノ線形部分空間ヲ考ヘレバ

$(\mathfrak{N}_A,\mathfrak{N}_B)$ ノ次元 $=\mathfrak{N}_A$ ノ次元 $+\ \mathfrak{N}_B$ ノ次元 $-$

$\mathfrak{N}_A\wedge\mathfrak{N}_B$ ノ次元

$$=n_1+n_2-\mathfrak{N}_A\wedge\mathfrak{N}_B\text{ ノ次元}\geqq n_1+n_2-p. \quad (3)$$

(2) ニ依ル.

(1) ト (3) トカラ

$$n\geqq(\mathfrak{N}_A,\mathfrak{N}_B)\text{ ノ次元}\geqq n_1+n_2-p=n$$

$$(\mathfrak{N}_A,\mathfrak{N}_B)\text{ ノ次元}=n$$

従ッテ $(\mathfrak{N}_A,\ \mathfrak{N}_B)=\mathfrak{L}$

デアル。而シテ $\mathfrak{L}=\mathfrak{M}'+\mathfrak{N}_B$ デアッタノダカラ.

$$\mathfrak{M}'=\mathfrak{N}_A. \quad (4)$$

デアル。

469

今Bガ標準型ニナルヤウニ底ヲ取ッテオイタトシテ

$$\mathfrak{M} = (u_1, \cdots, u_m), \quad \mathfrak{N}_B = (u_1, \cdots, u_{m_2})$$

トスレバ

$$B u_i = \beta_i u_i, \quad (1 \leqq i \leqq m_2).$$

$$\beta x_i = 0 \qquad (i \geqq m_2 + 1)$$

デアルカラ、$B(\mathfrak{M}) \leqq \mathfrak{M}$ トナル。故ニ(4)ヨリ

$$B(\mathfrak{M}) \leqq \mathfrak{M} \leqq \mathfrak{N}_A$$

$$AB(\mathfrak{M}) \leqq A(\mathfrak{M}) \leqq A(\mathfrak{N}_A) = 0$$

即チ凡テノベクトルガABデ0ニ写像サレルカラ $AB = 0$.

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{N}_A, \mathfrak{N}_B) = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}_A$$

トシテ考ヘレバ、$\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N}_B$ ガ出ルカラ、上ト同様ニシテ $AB = 0$ モ出ル。

以上

1945.12.2.