26. 標準偏差に関する最良検定法

兼所員（名大理学部数学教室）伊藤 清

（昭和19年12月20日受付）

§1. はしがき

筆者は前論文"student検定法について"(註1)に於て、正規母集団の平均値に関する検定法としては、所謂student検定法が最良のものであることを証明したが、本稿では正規母集団の平均値に関して同様の考案をなし、普通用ひられてゐるもの(註2)が最良のものなることを証明する。諸種の概念に就ては前論文を見られたい。

§2. 一つの正規母集団の標準偏差に関する検定法

$w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$を正規母集団$(R, G_{\alpha,\beta})$から抽出した大きさ（size）$n$の任意標本とする。従って$w$の母集団は直積測度空間$(R, G_{\alpha\beta})^{\otimes n}$に外ならない。これを$(\Omega, P_{\alpha\beta})$で表はす。今$\beta_0$を一つの定まった正数とし、$\beta=\beta_0$なる統計仮説の検定を考察しよう。未知数$\alpha, \beta$の考察範囲は

$$\Theta_+=\{(\alpha,\beta);\ \beta\geqq\beta_0\} \qquad \Theta_-=\{(\alpha,\beta);\ \beta\leqq\beta_0\}$$

の二種を考へる。何れの場合に於ても$\beta=\beta_0$は複合仮説である。次に棄却域として普通用ひられるのは

$$\Theta_+ \text{ に対しては } K_+=\{w;\ s>c\beta_0\}$$
$$\Theta_- \text{ に対しては } K_-=\{w;\ s<c\beta_0\} \qquad (c>0)$$

（註1）本誌第一巻第十三号 これを[S]として引用する。

（註2）統計数値表 p 84. 7°及び p. 119 上から三行目

茲に s は標本標準偏差であって

$$(2.1)\qquad s^2=\frac{1}{n}\sum(w_i-\bar{w})^2 \qquad \bar{w}=\frac{1}{n}\sum w_i$$

<u>定理 1.</u> K_+, K_- は夫々 $Ⓗ_+$, $Ⓗ_-$ に対して, $\beta=\beta_0$ の一様最良棄却域である.

<u>証明</u> K_+ についてのみ証明する. K_- についても同様である. 先づ K_+ が $\beta=\beta_0$ の正規棄却域であることは明らかである. 今 K を一般に $\beta=\beta_0$ の正規棄却域とすると

$$e_I(K)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta_0}\right)^n\int_{\infty}\cdots\int_K exp\left\{-\frac{1}{2\beta_0^2}\sum(w_i-\alpha)^2\right\} dw_1\cdots dw_n$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\beta_0}\int_{-\infty} exp\left\{-\frac{n}{2\beta_0^2}(\bar{w}-\alpha)^2\right\}d\bar{w}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta_0}\right)^{n-1} \cdot \int exp\left\{-\frac{ns^2}{2\beta_0^2}\right\}d\sigma$$

茲に $K(\bar{w})$ は $\bar{w}=Const$ による K の切口であり, σ はこの上の座標で $d\sigma$ はその微小面積を示す. $e_I(K)$ は α に無関係であって且つ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\beta_0}exp\left\{-\frac{n}{2\beta_0^2}\lambda^2\right\}e^{i\lambda t}d\lambda = exp\left\{-\frac{\beta_0^2}{2n}t^2\right\}\neq 0$$

なる故, [S] 定理 2.1 により

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta_0}\right)^{n-1}\int_{K(\bar{w})} exp\left(-\frac{ns^2}{2\beta_0^2}\right)d\sigma = e_I(K)$$

従ってKの大きさ $e_I(K)$ が K_+ の大きさ $e_I(K_+)$ と等しいならば

$$(2,2) \quad \int_{K(\bar{w})} exp\left\{-\frac{ns^2}{2\beta_0^2}\right\}d\sigma = \int_{K_+(\bar{w})} exp\left\{-\frac{ns^2}{2\beta_0^2}\right\}d\sigma$$

次に第二種の過誤 $e_{II}(K, \alpha, \beta)$ を考へて見る.

$$(2,3) \quad 1 - e_{II}(K, \alpha, \beta) = p\alpha_\beta(K) =$$

$$\int\cdots\int_K \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\beta^2}\sum(w_i-\alpha)^2\right\} dw_1 \cdots\cdots dw_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\beta}\, exp\left\{-\frac{n}{2\beta^2}(\bar{w}-\alpha)^2\right\}d\bar{w}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\right)^{n-1}$$

$$\int_{K(\bar{w})} exp\left(-\frac{ns^2}{2\beta^2}\right)d\sigma$$

$K(\bar{w})$ の上の積分を次の形に変形して置く

$$(2,4) \quad \int_{K(\bar{w})} exp\left(-\frac{ns^2}{2\beta^2}\right)d\sigma = \int_{K(\bar{w})} exp\left(\frac{\beta^2-\beta_0^2}{2\beta^2\beta_0^2}ns^2\right)$$

$$exp\left(-\frac{ns^2}{2\beta_0^2}\right)d\sigma$$

$\beta > \beta_0$ であるから, K_+ は次の形に書き換へられる

(2.5) $K_+ = \left\{ w ; exp\left(\frac{\beta^2 - \beta_0^2}{2\beta^2\beta_0^2} n s^2\right) > exp\left(\frac{\beta^2 - \beta_0^2}{2\beta^2}\right) n c^2 \right.$

故に[S]補助定理2.1と(2.2)式とにより(2.4)式でKの代りにK_+と置いた式と(2.4)とを比較して

$$\int_{K_+(\bar{w})} exp\left(-\frac{ns^2}{2\beta^2}\right) d\sigma \geqq \int_{K(\bar{w})} exp\left(-\frac{ns^2}{2\beta^2}\right) d\sigma$$

即ち　$\mathcal{C}_{II}(K_+, \alpha, \beta) \leqq \mathcal{C}_{II}(K, \alpha, \beta)$

§3. 二つの標準偏差の比較に関するもの

$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を夫々正規母集団 $(R, G_{\alpha\gamma})$, $(R, G_{\beta\delta})$ からの任意標本とする。今 $(m+n)$ 次元の点 w を

(3.1) $w = (x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n)$

によって定義すれば，w の母集団は

$$(\Omega_{\alpha\beta\gamma\delta}) \equiv (R, G_{\alpha\gamma})^{\otimes m} \otimes (R, G_{\beta\delta})^{\otimes}$$

偖て $\gamma = \delta$ なる仮説を検定せんとするに當り，未知常数の考察範囲として

$$\Theta_+ = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) ; \gamma \geqq \delta\}$$

が考へられるが，この場合の棄却域として普通用ひられるのは

$K_+ = \left\{ w ; \frac{s_x}{s_y} > c \right\}$, s_x, s_y は見本標準偏差

である。

定理2、 K_+ は Θ_+ に対して $\gamma = S$ の一様最良棄却域である、

証明 K_+ は明らかに正則棄却域であるが、今 K が一般の正則棄却域とすれば、

$$e_I(K) = \int\cdots\int_K \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\gamma}\right)^{m+n} \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma^2}\left(\sum(x_i-\alpha)^2 + \sum(y_i-\beta)^2\right)\right\} dx_1\cdots dx_m\, dy_1\cdots dy_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi}\,\gamma} \exp\left(-\frac{m}{2\gamma^2}(\bar{x}-\alpha)^2\right) d\bar{x} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\,\gamma}\exp\left(-\frac{n}{2\gamma^2}(\bar{y}-\alpha)^2\right)d\bar{y}$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\gamma}\right)^{m+n-2}\int_{K(\bar{x},\bar{y})} \exp\left(-\frac{m s_x^2 + n s_y^2}{2\gamma^2}\right) d\sigma$$

茲に $K(\bar{x},\bar{y})$ は $\bar{x} = \mathrm{Const.}$ $\bar{y} = \mathrm{Const.}$ による K の切口で $d\sigma$ はこの超平面（$(m+n-2)$ 次元）上の微小面積を表はす、[S] 定理2.1を二回用ひて,（前節定理1の証明参照）

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\gamma}\right)^{m+n-2}\int_{K(\bar{x},\bar{y})} \exp\left(-\frac{m s_x^2 + n s_y^2}{2\gamma^2}\right) d\sigma = e_I(K)$$

故に K が K_+ と同じ大きさの正則棄却域ならば

~~(382)~~

$$(3,2)\quad \int_{K(\bar{x},\bar{y})} \exp\left(-\frac{m s_x^2 + n s_y^2}{2\gamma^2}\right) d\sigma = \int_{K_+(\bar{x},\bar{y})} \exp\left(-\frac{m s_x^2 + n s_y^2}{2\gamma^2}\right) d\sigma$$

がγの如何に拘らず成立する．

次に第二種の過誤 $e_{II}(K, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ を考へる

$$(3,3)\quad 1 - e_{II}(K, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

$$= \int \cdots \int_K \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}\right)^m \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma^2}\sum (x_i - \alpha)^2 - \frac{1}{2\delta^2}\sum (y_i - \alpha)^2\right\} dx_1 \cdots dx_m dy_1 \cdots dy_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int^{K} \frac{\sqrt{mn}}{2\pi\gamma\delta} \exp\left(-\frac{m(\bar{x}-\alpha)^2}{2\gamma^2} - \frac{n(\bar{y}-\beta)^2}{2\delta^2}\right) d\bar{x}\, d\bar{y} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\right)^{n-1} \int_{K(\bar{x}\bar{y})} \cdots \int \exp\left(-\frac{m s_x^2}{2\gamma^2} - \frac{n s_y^2}{2\delta^2}\right) d\sigma$$

故に

$$(3,4)\quad \int_{K_+(\bar{x},\bar{y})} \exp\left(-\frac{m s_x^2}{2\gamma^2} - \frac{n s_y^2}{2\delta^2}\right) d\sigma \geqq \int_{K(\bar{x},\bar{y})} \exp\left(-\frac{m s_x^2}{2\gamma^2} - \frac{n s_y^2}{2\delta^2}\right) d\sigma$$

を証明すれば，目的は達せられる．

今正数 ε を

$$(3,5)\qquad c^2=\frac{n\left(\frac{1}{\delta^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)}{m\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\gamma^2}\right)}$$

によつて定める。 $\gamma>\delta$ なる故（$\textcircled{H}_+$ の定義!）かゝる ε は存在する、然らば

$$(3,6)\qquad \frac{s_x}{s_y}>c \rightleftarrows \frac{m s_x^2}{2\gamma^2}+\frac{n s_x^2}{2\delta^2}+\frac{n s_y^2}{2\varepsilon^2}$$

となる、偖て

$$(3,4)\text{の左辺}-\text{同右辺}=\int_{K_+(\bar{x},\bar{y})-K(\bar{x},\bar{y})}\exp\left(-\frac{m s x^2}{2\gamma^2}-\frac{n s y^2}{2\delta^2}\right)d\sigma$$

$$-\int_{K(\bar{x},\bar{y})-K_+(\bar{x},\bar{y})}\exp\left(-\frac{m s x^2}{2\gamma^2}-\frac{n s y^2}{2\delta^2}\right)d\sigma.$$

第一の積分は K_+ の中であるから（3，6）の右辺が成立し，第二の積分は K_+ の外であるから，逆の不等式が成立するので

$$\geqq\int_{K_t(\bar{x},\bar{y})-K(\bar{x},\bar{y})}\exp\left(-\frac{m s x^2}{2\varepsilon^2}-\frac{n s y^2}{2\varepsilon^2}\right)d\sigma$$

$$-\int_{K(\bar{x},\bar{y})-K_+(\bar{x},\bar{y})}\exp\left(-\frac{m s_x^2}{2\varepsilon^2}-\frac{n s_y^2}{2\varepsilon^2}\right)d\sigma$$

$$=0\quad((3,2)\text{による})$$

証明終