γ分布及ビγ検定ニツイテ(ツヾキ)

佐藤良一郎

1.予備事項

$x_1, x_2 ---, x_n$ヲn個ノ変数トスル時x_nノx_{n-1}, $x_{n-2} ---, x_1$ヘノ回帰ガ一次デアル場合ノγ分布及γ検定ハ$n=2$ノ場合ト同様ニシテコレヲ得ル事ガ出来ル。次ニソレヲ示サウ。

但シ、$n=3$トシテモ一般性ハ失ハレナイカラ、以下$n=3$トシテ述ベル。先ヅ二三ノ予備事項ヲ挙ゲテ証明シテオカウ。

x_1ノ数学的期待値ヲ$E\{x\}$, xノ値ヲ与ヘタ時ノyノ数学的期待値ヲ$E\{y|x\}$デ表ハスコトトシ

$$\tilde{x}_{2|1} \equiv E\{x_2|x_1\}, \quad \tilde{x}_{3|1} \equiv E\{x_3|x_1\}$$

$$\tilde{x}_{3|21} \equiv E\{x_3|x_2, x_1\}$$

トスル時、x_1, x_2, x_3ナル三変数ノ間ニハ

$$\tilde{x}_{2|1} = \beta_{21} x_1 + \alpha, \quad \tilde{x}_{3|1} = \beta_{31} x_1 + \alpha_2$$

$$\tilde{x}_{3|21} = \beta_{32\cdot1} x_2 + \beta_{31\cdot2} x_1 + \alpha_3$$

ナル関係ガアルモノトスル。但シβ_{21}, β_{31},

(二)

……, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ハソレゾレ定数ヲ表ス。
サウスルト次ノ等式ガ成立ツ

$$\beta_{31\cdot2} = \beta_{31} - \beta_{32\cdot1}\beta_{21} \qquad (1)$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \beta_{32\cdot1}\alpha_1 \qquad (2)$$

實際

$$E\{x_3|x_1\} = E\{x_{3|21}|x_1\}$$ デアルカラ

$$\beta_{31}x_1 + \alpha_2 = \beta_{32\cdot1}E\{x_2|x_1\} + \beta_{31\cdot2}x_1 + \alpha_3$$

$$= \beta_{32\cdot1}(\beta_{21}x_1 + \alpha_1) + \beta_{31\cdot2}x_1 + \alpha_3$$

$$= (\beta_{32\cdot1}\beta_{21} + \beta_{31\cdot2})x_1 + \beta_{32\cdot1}\alpha_1 + \alpha_3$$

故ニ

$$\beta_{31} = \beta_{32\cdot1}\beta_{21} + \beta_{31\cdot2}$$ 即チ $$\beta_{31\cdot2} = \beta_{31} - \beta_{32\cdot1}\beta_{21}$$

又

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \beta_{32\cdot1}\alpha_1$$

ナル関係ヲ得ル。
次ニ $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ $i = 1, 2 \cdots, N$ ヲ観察ニ依ッテ得タ変数 x_1, x_2, x_3 ノ N 組ノ値トシ、b_{21}, b_{31}, ……, a_1, a_2, a_3 ヲソレゾレ次ノ方程式デ定メラレタ定数トスル。

$$\left.\begin{aligned} \sum x_1^{(i)}(x_2^{(i)} - b_{21}x_1^{(i)} - a_1) = 0 \\ \sum x_1^{(i)}(x_3^{(i)} - b_{31}x_1^{(i)} - a_2) = 0 \end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma(x_2^{(i)}-b_{21}x_1^{(i)}-a_1)=0\\&\Sigma(x_3^{(i)}-b_{31}x_1^{(i)}-a_2)=0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma x_1^{(i)}(x_3^{(i)}-b_{32\cdot1}x_2^{(i)}-b_{31\cdot2}x_1^{(i)}-a_3)=0\\&\Sigma x_2^{(i)}(x_3^{(i)}-b_{32\cdot1}x_2^{(i)}-b_{31\cdot2}x_1^{(i)}-a_3)=0\\&\Sigma(x_3^{(i)}-b_{32\cdot1}x_2^{(i)}-b_{31\cdot2}x_1^{(i)}-a_3)=0\end{aligned}\right\}(4)$$

即チ b_{21}, b_{31}, ----, a_1, a_2, a_3 ハ

$\Sigma(x_j^{(i)}-b_{j1}x_1-a_j)^2$ $(j=2,3)$ 及ヒ

$\Sigma(x_3^{(i)}-b_{32\cdot1}x_2^{(i)}-b_{31\cdot2}x_1^{(i)})^2$ ヲ最小ナラシメルヤウニ定メタ定數デアルトスルトサウスルト

$$b_{31\cdot2}=b_{31}-b_{32\cdot1}b_{21} \qquad (5)$$

實際 $\bar{x}=\frac{1}{N}\Sigma x^{(i)}$, $X=x-\bar{x}$ ト置ケバ

(3) カラ

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma X_1^{(i)}(X_2^{(i)}-b_{21}X_1^{(i)})=0\\&\Sigma X_1^{(i)}(X_3^{(i)}-b_{31}X_1^{(i)})=0\end{aligned}\right\}(6)$$

依ッテ $\Sigma X_1^{(i)}X_2^{(i)}=b_{21}\Sigma\{X_1^{(i)}\}^2$

(ロ)

$$\sum X_1^{(i)} X_2^{(i)} = b_{31} \sum \{X_1^{(i)}\}^2 \quad \Big\} \; (7)$$

ヲ得ル, 又(4)カラ

$$\sum X_1^{(i)} (X_3^{(i)} - b_{32\cdot1} X_1^{(i)} - b_{31\cdot2} X_1^{(i)}) = 0$$

$$\sum X_2^{(i)} (X_3^{(i)} - b_{32\cdot1} X_2 - b_{31\cdot2} X_1^{(i)}) = 0$$

ヲ得ルガ 才一ノ方程式ニ(7)ヲ代入スルト,

$$b_{31} \sum \{X_1^{(i)}\}^2 - b_{32\cdot1} b_{21} \sum \{X_1^{(i)}\} - b_{31\cdot2} \sum \{X_1^{(i)}\}^2 = 0$$

即チ

$$b_{31\cdot2} = b_{31} - b_{32\cdot1} b_{21}$$

コノ関係ハ(1)ニ対応スルモノデアッテ両ト共ニ後ニ必要トナルカラ特ニ注意スル。

次ニ

$$x_{2\cdot1} \equiv x_2 - \beta_{21} x_1, \qquad x_{3\cdot1} \equiv x_3 - \beta_{31} x_1$$

$$x_{3\cdot21} \equiv x_3 - \beta_{32\cdot1} x_2 - \beta_{31\cdot2} x_1$$

トスルト, 次ノ関係ガ成立ツ

$$x_{3\cdot21} = x_{3\cdot1} - \beta_{32\cdot1} x_{2\cdot1}$$

実際, (1)ニヨレバ

$$x_{3\cdot1} - \beta_{32\cdot1} x_{2\cdot1} = x_3 - \beta_{32\cdot1} x_2 - (\beta_{31} - \beta_{32\cdot1}\beta_{21}) x_1$$

$$= x_3 - \beta_{32\cdot1} x_2 - \beta_{31\cdot2} x_1 = x_{3\cdot21}$$

トナル。同様ニ (5)

$$X_{2\cdot1} \equiv x_2 - b_{21} x_1, \quad X_{3\cdot1} \equiv x_3 - b_{31} x_1$$

$$X_{3\cdot21} \equiv x_3 - b_{32\cdot1} x_2 - b_{31\cdot2} x_1$$

トオクト次ノ関係ガ成立ツ

$$X_{3\cdot21} = X_{3\cdot1} - b_{32\cdot1} X_{2\cdot1} \tag{9}$$

実際

$$X_{3\cdot1} - b_{32\cdot1} X_{2\cdot1} = x_3 - b_{32\cdot1} x_2 - (b_{31} - b_{32\cdot1} b_{21}) x_1$$

$$= x_3 - b_{32\cdot1} x_2 - b_{31\cdot2} x_1 = X_{3\cdot21}$$

尚ホ $x^{(i)}_{3\cdot21} = x^{(i)}_3 - \beta_{32\cdot1} x^{(i)}_2 - \beta_{31\cdot2} x^{(i)}_1 \quad (i = 1, 2, \cdots N)$

トオキ $\xi_{3\cdot21}$ ヲ定数トスル時次ノ等式ガ成立ツ。

$$\sum_{i=1}^{N} (x^{(i)}_{3\cdot21} - \xi_{3\cdot21})^2 = \sum_{i=1}^{N} (X^{(i)}_{3\cdot21} - \bar{X}_{3\cdot21})^2$$
$$+ (b_{32\cdot1} - \beta_{32\cdot1})^2 \sum_{i=1}^{N} (X^{(i)}_{2\cdot1} - \bar{X}_{2\cdot1})^2$$
$$+ \{(b_{31} - \beta_{31}) - \beta_{32\cdot1}(b_{21} - \beta_{21})\} \sum_{i=1}^{N} (x^{(i)}_1 - \bar{x}$$
$$+ N(\bar{x}_{3\cdot21} - \xi_{3\cdot21})^2 \tag{10}$$

但シ $\bar{X}_{2\cdot1}$, $\bar{x}_{3\cdot21}$ ハソレゾレ

$$\bar{X}_{2\cdot1} = \bar{x}_2 - b_{21} \bar{x}$$

$$\bar{x}_{3\cdot21} = \bar{x}_3 - \beta_{32\cdot1} \bar{x}_2 - \beta_{31\cdot2} \bar{x}_1$$

(6)

デ定義サレテヰルノデアル。

実際

$$\sum(x_{3\cdot21}-\xi_{3\cdot21})^2=\sum(x_{3\cdot21}-\bar{x}_{3\cdot21}+\bar{x}_{3\cdot21}-\xi_{3\cdot21})^2=\sum(x_{3\cdot21}-\bar{x}_{3\cdot21})^2+\sum(\bar{x}_{3\cdot21}-\xi_{3\cdot21})^2 \quad ^{*}(11)$$

ナルコトハ容易ニワカリ、又

$$\sum(x_{3\cdot21}-\bar{x}_{3\cdot21})^2+\sum[\{(x_{3\cdot21}-\bar{x}_{3\cdot21})-(X_{3\cdot21}-\bar{X}_{3\cdot21})\}+(X_{3\cdot21}-\bar{X}_{3\cdot21})]^2=\sum\{(x_{3\cdot21}-\bar{x}_{3\cdot21})-(X_{3\cdot21}-\bar{X}_{3\cdot21})\}^2+\sum(X_{3\cdot21}-\bar{X}_{3\cdot21})^2 \quad (12)$$

ナルコトハ

$$\sum\{(x_{3\cdot21}-\bar{x}_{3\cdot21})-(x_{3\cdot21}-\bar{X}_{3\cdot21})\}(X_{3\cdot21}-\bar{X}_{3\cdot21})$$

$$=\sum[\{(b_{31}-\beta_{31})-\beta_{32\cdot1}(b_{21}-\beta_{21})\}X_1-(b_{32\cdot1}-\beta_{32\cdot1})(X_{2\cdot1}-\bar{X}_{21})]\times\{(X_{3\cdot1}-\bar{X}_{3\cdot1})-b_{32\cdot1}(X_{2\cdot1}-\bar{X}_{2\cdot1})\}$$

$$=\{(b_{31}-\beta_{31})-\beta_{32\cdot1}(b_{21}-\beta_{2\cdot1})\}\sum X_1(X_{3\cdot1}-\bar{X}_{3\cdot1})$$
$$+(b_{32\cdot1}-\beta_{32\cdot1})\sum(X_{2\cdot1}-\bar{X}_{2\cdot1})(X_{3\cdot1}-\bar{X}_{3\cdot1})$$
$$-\{(b_{31}-\beta_{31})-\beta_{32\cdot1}(b_{21}-\beta_{21})\}b_{32\cdot1}\sum X_1(X_{21}-\bar{X}_{2\cdot1})$$
$$-(b_{32\cdot1}-\beta_{32\cdot1})b_{32\cdot1}\sum(X_{2\cdot1}-\bar{X}_{2\cdot1})^2$$

* 以下簡単ノ為ニ $x(i)$ ノ (i) ハ省略スルコトニスル。

$$\sum(X_{2\cdot1}-\bar{X}_{21})(X_{3\cdot1}-\bar{X}_{3\cdot1})=b_{32\cdot1}\sum(X_{2\cdot1}-\bar{X}_{2\cdot1})^2$$

$$\sum X_1(x_{2\cdot1}-\bar{x}_{2\cdot1})=0$$

$$\sum X_1(x_{3\cdot1}-\bar{x}_{3\cdot1})=0$$

デアルコトニ注意スルトスグ分ル。

トコロデ

$$\sum\{(x_{3\cdot21}-\bar{x}_{3\cdot21})-(X_{3\cdot21}-\bar{X}_{3\cdot21})\}^2$$
$$=\sum\{(b_{32\cdot1}-\beta_{32\cdot1})(X_{2\cdot1}-\bar{X}_{2\cdot1})+\{(b_{3\cdot1}-\beta_{3\cdot1})$$
$$-\beta_{32\cdot1}(b_{21}-\beta_{21})\}X_1\}^2=(b_{32\cdot1}-\beta_{32\cdot1})^2$$
$$\sum(X_{2\cdot1}-\bar{X}_{2\cdot1})^2+\{(b_{31}-\beta_{31})-\beta_{32\cdot1}(b_{21}-\beta_{21})\}^2\sum$$

デアルカラ、(12)ハ次ノヤウニ書ケル。

$$\sum(x_{3\cdot21}-\bar{x}_{3\cdot21})^2$$
$$=\sum(X_{3\cdot21}-\bar{X}_{3\cdot21})^2+(b_{32\cdot1}-\beta_{32\cdot1})^2\sum(X_{2\cdot1}-$$
$$+\{(b_{31}-\beta_{31})-\beta_{32\cdot1}(b_{21}-\beta_{21})\}^2\sum X_1^2$$

従ッテ(11)ハ次ノヤウニ書ケル。

$$\sum(x_{3\cdot21}-\xi_{3\cdot21})^2=\sum(X_{3\cdot21}-\bar{X}_{3\cdot21})^2$$
$$+(b_{32\cdot1}-\beta_{32\cdot1})^2\sum(X_{21}-\bar{X}_{2\cdot1})^2+\{(b_{31}-\beta_{31})$$
$$-\beta_{32\cdot1}(b_{21}-\beta_{21})\}^2\sum(x_1-\bar{x}_1)^2+N(\bar{x}_{3\cdot21}-\xi_{3\cdot21}$$

コレハ(10)ニ外ナラナイ。

以上デ予備事項ガ証明サレタカラ次ニ三変数ノ場合ノγ分布ニ関スル定理ヲ証明シヨウ。

2、三変数ノ場合ノγ分布

x_1, x_2, x_3ヲ三ツノ射倖変数トシx_3ノ$x_2 x_1$ヘノ回帰ハ線型デx_3ノx_2ヘノ偏回帰係数ハ$\beta_{32\cdot1}$，x_1ヘノ偏回帰係数ハ$\beta_{31\cdot2}$，$x_{3\cdot21} \equiv x_3 - \beta_{32\cdot1} x_2 - \beta_{31\cdot2} x_1$ノ母集團平均ハ$\xi_{3\cdot21}$標準偏差ハ$\sigma_{3\cdot21}$デアッテ、ソノ元確率法則$P(x_{3\cdot21})$ハ

$$p(x_{3\cdot21}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{3\cdot21}} e^{-\frac{(x_{3\cdot21}-\xi_{3\cdot21})^2}{2\sigma^2_{3\cdot21}}}$$

デアルトスル。

又$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$, $i=1,2,\cdots,N$ヲ観察ニ依ッテ得タx_1, x_2, x_3ノ値ヲ組トシ各組ハ互ニ独立デアルトスル。

サウスルト

$$x^{(i)}_{3\cdot21} \equiv x_3^{(i)} - \beta_{32\cdot1} x_2^{(i)} - \beta_{31\cdot2} x_1^{(i)} \quad (i=1,2,\cdots N)$$

ノ同時的元確率法則ハ次ノヤウニ書ケル。

$$P(x^{(1)}_{3\cdot21}, x^{(2)}_{3\cdot21}, \cdots, x^{(N)}_{3\cdot21}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{3\cdot21}} e^{-\frac{(x^{(i)}_{3\cdot21}-\xi_{3\cdot21})^2}{2\sigma^2_{3\cdot21}}}$$

サテココデ

$x_{3\cdot21} \equiv x_3 - b_{32\cdot1} x_2 - b_{31\cdot2} x_1$

$$\bar{x}_{3.21} = \bar{x}_3 - b_{32.1}\bar{x}_2 - b_{31.2}\bar{x}_1$$

但シ、$\bar{x}$ハ何レモxノ見本平均デアッテ、$b_{32.1}$, $b_{31.2}$ハ何レモ方程式(3)デ定メタ定數デアルトシ、$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ $(i=1,2,\dots,N)$ハ觀察ノ度毎ニソノ直ハ變ラズ、$x_3^{(i)}$ダケガソノ値デ變ズルモノトスルト、次ノ定理ガ成立ツ。

$\boxed{\text{定理}}$ $a^{(i)}$ $(i=1,2,\dots,N)$ヲ悉クハ相等シクナイ任意ノ定數トシ

$$N\bar{a} = \Sigma a^{(i)}$$

$$r = \frac{\Sigma (x_{3.21}^{(i)} - \bar{x}_{3.21})(a^{(i)}-\bar{a})^2}{\sqrt{\Sigma (x_{3.21}^{(i)} - \bar{x}_{3.21})}\sqrt{\Sigma(a^{(i)}-\bar{a})}} \qquad (13)$$

ト置クト、$\xi_{3.21}$, $\sigma_{3.21}$, $\beta_{32.1}$, $\beta_{31.2}$ノ値ノ如何ニカカハラズ、rハ次ノ元確率法則ニ從フ。

$$p(r) = \frac{\Gamma(\frac{N-3}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{N-4}{2})}(1-r^2)^{\frac{N-6}{2}} \qquad (14)$$

換言スレバ、rハ$N-4$ナル自由度ヲ以テr分布ヲナス。

證明ハ次ノ通リデアル。

前説デ見タ通リ

A51

~~(10)~~

$$\Sigma(x_{3.21}-\xi_{3.21})^2=\Sigma(x_{3.21}-\bar{x}_{3.21})^2$$
$$+(b_{32.1}-\beta_{32.1})^2\Sigma(x_{2.1}-\bar{x}_{2.1})^2$$
$$+\{(b_{31}-\beta_{31})-\beta_{32.1}(b_{21}-\beta_{21})\}^2\Sigma(x_1-\bar{x}_1)^2$$
$$+N(\bar{x}_{3.21}-\xi_{3.21})^2$$

但シ $\bar{x}_{3.21}=\bar{x}_3-\beta_{3.21}\bar{x}_2-\beta_{3(2}\bar{x}_1$, b_{21}, b_{31} ハ夫々方程式(6)デ定メタ定数デアツテ

$$x_{2.1}=x_2-b_{21}x_1$$

$$\bar{x}=\bar{x}_2-b_{21}\bar{x}_1 \text{ デアル}$$

今、N次元空間ニ於テ方程式

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma(x_{3.21}-\xi_{3.21})=k_0^2\\
&(b_{32.1}-\beta_{32.1})\sqrt{(x_{2.1}-\bar{x}_{2.1})^2}=k_1\\
&\{(b_{31}-\beta_{31})-\beta_{32.1}(b_{21}-\beta_{21})\}\sqrt{\Sigma(x_1-\bar{x}_1)^2}=k_2\\
&\bar{x}_{3.21}-\xi_{3.21}=k_3
\end{aligned}\right\}(15)$$

但シ k_0, k_1, k_2, k_3 ハ夫々任意ノ定数デアルデ定義サレタル曲面ノ考ヘルト、コレハN次元空間ニ於テ、(N-3)次ノ擬球面ヲ表スト考ヘラレル。ソレハ上ノ方程式第二、第三、第四ガ何レモ x_3 ニ関シテ一次方程式デアルカラデアル。

従ツテ、方程式

$$\left.\begin{aligned} &\sum(X_{3.21}-\overline{X}_{3.21})^2=k^2\\ &(b_{32.1}-\beta_{32.1})\sqrt{(X_{2.1}-\overline{X}_{2.1})^2}=k_1\\ &\{(b_{31}-\beta_{31})-\beta_{32.1}(b_{21}-\beta_{21})\}\sqrt{\sum(X_1-\overline{X})^2}=k_2\\ &\overline{X}_{3.21}-\xi_{3.21}=k_3 \end{aligned}\right\}(13)$$

但シ、k, k_1, k_2, k_3 ハ夫々任意ノ定数デアル。

ハN次元空間ニ於ケル$(N-3)$次元ノ擬球面ヲ表スト考ヘラレル。

ソコデ、点P$(X^{(1)}_{3.21}, X^{(2)}_{3.21}, \cdots\cdots, X^{(N)}_{3.21})$ト点Q$(\overline{X}_{3.21}, \overline{X}_{3.21}, \cdots\cdots \overline{X}_{3.21})$トデ定マルベクトルOP, 及ビベクトルBAヲ考ヘ、QPトBAノナス角θノ元確率法則$P(\theta)$ヲ求メル。

既ニ二変数ノ場合ニ述ベタト対称ノ理由ニヨリ、$P(\theta)$ハ$(\sin\theta)^{N-5}$ニ比例スル。

即チ

$$P(\theta)=C\sin^{N-5}\quad (C\text{ハ常数})$$

デアルトイヘル。

ソレ故、方程式(16)ニ於テk_1, k_2, k_3ノ値ハソレゾレ固定シテオイテ、ソノ取リ得ル値ヲ与ヘテ考ヘタナラバ、$X^{(i)}_{3.21}$ $(i=1,2,\cdots N)$ノ値ガドノヤウニ変ラウトモベクトル（PトBAノナス角θノ元確率法則ハ

$$P(\theta)=C\sin^{N-5}\theta\quad (C\text{ハ定数})\quad(15)$$

デ表サレル。

トコロデ

$$\cos\theta = \frac{\sum(x^{(i)}_{3.21}-\bar{x}_{3.21})(a^{(i)}-\bar{a})}{\sqrt{\sum(x^{(i)}_{3.21}-\bar{x}_{3.21})^2}\sqrt{\sum(a^{(i)}-\bar{a})^2}} = r \quad (18)$$

デアルカラ r ノ元確率法則トシテ

$$p(r) = C'(1-r^2)^{\frac{N-6}{2}}$$

ヲ得ル。但シ C' ハ

$$\int_{-1}^{+1} p(r)\,dr = 1$$

トナルヤウニ定ムベキ定数デアルガ容易ニ

$$C' = \frac{\Gamma\left(\frac{N-3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-4}{2}\right)} \quad (19)$$

ト計算サレルカラ結局

$$p(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{N-3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-4}{2}\right)}(1-r^2)^{\frac{N-6}{2}}$$

トナル。即チ定理ハ証明サレタ。

3. $|x^{(N)}_{3.21}-\bar{x}_{3.21}|$ ノ顕著性検定

$x^{(1)}_{3.21}, x^{(2)}_{3.21}, \cdots, x^{(N)}_{3.21}$ ガ射倖的ナ或順序ニ並ンデヰル時、$x^{(N)}_{3.21}$ ガ $x^{(1)}_{3.21} \cdots x^{(N-1)}_{3.21}$ ト共ニ母集團

$$p(x_{3.21}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{3.21}} e^{-\frac{(x_{3.21}-\xi_{3.21})^2}{2\sigma^2_{3.21}}} \quad (20)$$

カラ出タモノトシテハ $\bar{X}_{3.21}=\frac{1}{N}\Sigma X^{(i)}_{3.21}$ カラ著シクカケ離レテヰルカドウカヲ $\xi_{3.21}$, $\sigma_{3.21}$ $\beta_{32.1}$, $\beta_{31.2}$ ノ値ニハカヽハラナイデ検定スルニハ次ノヤウニシテ定マル γ ヲ用ヒルコトガ出来ル 即チ

$$\gamma=\frac{X^{(N)}_{3.21}-\bar{X}_{3.21}}{\sqrt{\Sigma(X^{(i)}_{3.21}-\bar{X}_{3.21})^2}\sqrt{1-\frac{1}{N}}} \qquad (21)$$

或ハ $NS^2_{3.21}=\Sigma(X^{(i)}_{3.21}-\bar{X}_{3.21})^2$ トオケバ

$$\gamma=\frac{X^{(N)}_{3.21}-\bar{X}_{3.21}}{S_{3.21}\sqrt{1-\frac{1}{N}}} \qquad (22)$$

コノ γ ノ導キ方ハ一変数ノ場合ト全ク同一デアルカラココニハ一々記述スルコトハ差控ヘル.

Fisher ノ γ ノ表ヲ用ヒルニハ $N-2=n$ トセネバナラナイ。

4. $|X^{(p)}_{3.21}-X^{(q)}_{3.21}|$ ノ顕著性検定

$X^{(1)}_{3.21}$, $X^{(2)}_{3.21}$, ……, $X^{(p)}_{3.21}$, …… $X^{(q)}_{3.21}$, …… $X^{(N)}_{3.21}$ ガ射倖的ナ或順序ニ並ンデヰル時 $|X^{(p)}_{3.21}-X^{(q)}_{3.21}|$ ガ他ト共ニ母集団(20)カラ出タモノトシテハ著シク大キイトイヘルカドウカヲ $\xi_{3.21}$, $\sigma_{3.21}$, $\beta_{32.1}$ $\beta_{31.2}$ ノ値ニカヽハラズ検定スルニハ次ノヤウニシテ定マル γ ヲ用ヒルコトガ出来ル。

$$\gamma = \frac{X^{(p)}_{3\cdot 21} - X^{(q)}_{3\cdot 21}}{S_{3\cdot 21}\sqrt{2N}} \qquad (23)$$

コノγノ導キ方モ一変数ノ場合ト全ク同一デアル。シカシFisherノγノ表ヲ用ヒルニハ、$n = 11-4$トセネバナラナイ。

5. $|{}_1\bar{X}_{3\cdot 21} - \bar{X}_{3\cdot 21}|$ノ顕著性検定

$X^{(1)}_{3\cdot 21}, X^{(2)}_{3\cdot 21}, \cdots, X^{(N)}_{3\cdot 21}$ノ最初ノ$k$ $(<N)$個ノ平均

$${}_1\bar{X}_{3\cdot 21} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X^{(i)}_{3\cdot 21}$$

ガ其ノN個ノ値ガ母集團(20)カラ出タモノトシテハ、$\bar{X}_{3\cdot 21}$カラ著シクカケ離レテヰルカドウカヲ$\xi_{3\cdot 21}$ $\sigma_{3\cdot 21}$, $\beta_{32\cdot 1}$ $\beta_{31\cdot 2}$ノ値ニカカハラズ検定スルニハ、

$$\gamma = \frac{{}_1\bar{X}_{3\cdot 21} - \bar{X}_{3\cdot 21}}{S_{3\cdot 21}\sqrt{\frac{N-k}{k}}} \qquad (24)$$

ヲ用ヒテヨイ。但シ$X^{(1)}_{3\cdot 21} \cdots, X^{(2)}_{3\cdot 21} \cdots, X^{(N)}_{3\cdot 21}$ハ射倖的ナ或順序ニ並ンデヰル時トスル。

コノγノ導キ方モ一変数ノ場合ト全ク同様デアルガFisherノγノ表ヲ用ヒル時ハ$n = N-4$トセネバナラナイ。

6. $|{}_1\bar{X}_{3\cdot 21} - {}_2\bar{X}_{3\cdot 21}|$ノ顕著性検定

$X^{(i)}_{3\cdot 21}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$ガ射倖的ナ或順序ニ並ンデヰル時、ソノ最初ノk個ノ平均${}_1\bar{X}_{3\cdot 21}$ト

最後ノℓ個ノ平均${}_2\bar{X}_{3.21}$（但シ、$k+\ell=N$トスル）トシ差ガ上ノN個ノ値ガ母集團(20)カラ出タモノトシテハ著シク大キイトイヘルカドウカヲ$\xi_{3.21}$, $\sigma_{3.21}$, $\beta_{32.1}$, $\beta_{31.2}$ノ値ニカカハラズ検定スルニハ

$$r=\frac{{}_1\bar{X}_{3.21}-{}_2\bar{X}_{3.21}}{s_{3.21}\sqrt{N\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{\ell}\right)}} \qquad (25)$$

ヲ用ヒテヨイ。コノ導キ方モ亦一変数ノ場合ノソレト同一デアルガ，Fisherノrノ表ヲ用ヒル時ニハ $n=N-4$ トセネバナラナイ。

一般ノ場合

以上 $n=3$ ノ場合ニツイテ論ヲ進メテ来タガ上述ノ所論ハnガ任意ノ正整数デアル場合ニ對シテ容易ニ拡張出来ル。（完）

（19.11.6）