教育統計への順序統計量の応用

青　山　博次郎

教育統計の中にも種々の分野が考えられようが，ここでは成績評価ということについてその意味を考究し，併せて順序統計量が如何に応用されるかを見ることにしよう。その序でに，層別に於ける分散の推定への順序統計量の応用を述べてみることとする。

§ 1.　成績評価の問題

新教育が実施されるようになつて，考査の方法，成績評価の方法もまたそれに伴つて新しい形態をとるようになつた。新学籍簿をみると，中学校，小学校での成績の記入には5点法が用いられるようになつている。即ち前者では 1，2，3，4，5が，後者では −2，−1，0，1，2 という評価法が用いられているのである。

このような評価の方法は児童，生徒を *random* に抽出し，標準テストを行うとき，その得点の分布が正規分布をしているという仮定に基いている。米国の大学などでも，この方法が用いられているといわれるが，その根拠はどこにあるのだろうか。

その方法としては平均値 $\bar{x}$，標準偏差 σ の2つを用いて次のように評価されている。(註1)

点数を $\bar{x}-1.5\sigma$，$\bar{x}-0.5\sigma$，$\bar{x}+0.5\sigma$，$\bar{x}+1.5\sigma$ の4点で分けて，順次 1,2,3,4,5（または F，D，C，B，A 等）という評価をするのである。得点の分布は正規分布としてあるから，各区間に含まれる生徒数（得点）の割合は次表のようになる。

ここでこのような評価は如何なる意味をもつているか考えてみよう。

区　　　間	評　点	区間に含まれる生徒の割合(%)
$\bar{x}+1.5\sigma$ 以上	5　(A)	7
$\bar{x}+0.5\sigma \sim \bar{x}+1.5\sigma$	4　(B)	24
$\bar{x}-0.5\sigma \sim \bar{x}+0.5\sigma$	3　(C)	38
$\bar{x}-1.5\sigma \sim \bar{x}-0.5\sigma$	2　(D)	24
$\bar{x}-1.5\sigma$ 以下	1　(F)	7

第 1 表

先ず各人の能力をテストによつて測定するのであるという立場をとつてみよう。而して能力は点数で数量化されるものとする。

このときある組の生徒数を n 人とし，その能力を表わす標識（点数）を X_i とする。$(i=1,2,\cdots,n)$

テストは s 回独立に施行されたとして，第 i 番目の生徒の第 k 回目の得点を x_{ik} $(k=1,2,\cdots,s)$ とすると，これらの x_{ik} は測定の誤差をもつており常に X_i に等しい訳ではない。

そこで X_i を推定するのに

$$\xi_i = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} x_{ik} \tag{1}$$

をもつてすることが出来る。x_{ik} はどのような分布をするにせよ，回数 s が大なるとき，ξ_i は平均 X_i，分散 σ_i^2/s なる正規分布に漸近的に従うと考えても差支えない。故に各人の能力（これがテストの点数で数量化されるという仮定の下に）は (1) 式で計算すればよい。

また学級内に於ける各人の相対的位置を知るためには，n 人の生徒の平均点 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ の周りの二次モーメント，即ち分散を求める必要があるが，その測定値としての $\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ は平均 $\bar{X}$，分散 $\frac{1}{sn^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$ なる分布に従うので直ちに ξ_i につい

ての分散を求めても真の分散 $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ とはならない。

そこで σ_i^2 の推定値 $Est(\sigma_i^2)$ を $\frac{1}{s-1}\sum_{k=1}^{s}(x_{ik}-\xi_i)^2$ とすれば求める σ^2 の推定値は

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\overline{\xi})^2-\frac{n-1}{sn^2}\sum_{i=1}^{n}Est(\sigma_i^2)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\overline{\xi})^2-\frac{n-1}{n^2s(s-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}(x_{ik}-\xi_i)^2 \qquad (2)$$

によって與えられる。

以上によってもし n 人の生徒の能力を問題にしている限り問題はない訳であるが、各人の成績に余り出来，不出来がないとき，或いはテストの回数が大なるときは，(2) 式の第二項は消失し，ξ_i の標本分散だけから σ^2 を推定できる。

次に n 人がサンプルである場合の考え方である。即ち全国に於けるある学年の生徒 N 人の能力を対象とするとき，或いは小さく考えてある学校のある学年の生徒 N 人の能力を対象とするとき，n 人がそのランダムサンプルとして選ばれたという場合である。この何れの場合でも，教師が自分の受持の学級の生徒（n 人）を調べるときはランダム性は必ずしも確保されていない。従って標準化されたテストが既に出来ていて，生徒の能力を相対的に記述することならば可能であり，またこのときは既に述べた如き五段階の％は無意味である。

そこでもし *randomness* が保持されている時は如何なるかというと，(2) を得たと同様の方法で σ^2 の推定値は

$$\frac{N-1}{N(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\overline{\xi})^2-\frac{N-1}{Nns(s-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{s}(x_{ik}-\xi_i)^2 \qquad (3)$$

となる。

§ 2. 成績評価の実際

実際上に於ける制約としては，計算法が容易であり，国語や社会科の先生にも簡単に出来る必要がある。このことは教育統計が未だ一般に十分使いこなせないために生ずる制約である。

そこで先ず一応点数分布は正規分布（平均m，分散σ^2）であり，調査対象は例えば全国の同一学年の生徒で，考えている学級の生徒はその *random sample* であるとしてみよう。その標識は点数ということにして前節の (1) 式の第一項のみを考えるだけで十分である場合と仮定する。

今あらためて学級のn人の生徒の点数を $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ とし，この最高点をM，最低点をLとすると得点分布範囲（標本域）$R_n = M - L$ の平均 $\overline{R}_n$ は

$$\overline{R}_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 - (1 - F(x))^n - (F(x))^n \right\} dx \tag{4}$$

但し

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \tag{5}$$

を満足することが知られている。(註2)

n	$\overline{R}_n/\sigma$	n	$\overline{R}_n/\sigma$
5	2.325 93	50	4.498 15
10	3.077 51	60	4.638 56
15	3.471 83	70	4.754 72
20	3.734 95	80	4.853 55
25	3.930 63	90	4.939 40
30	4.085 52	100	5,015 19
40	4.321 56	450	6.009 03

第2表

nと$\overline{R_n}$との関係は左表の如くである。

従つて $n=50$ のとき，このようなl組のサンプルをとつてR_nの平均$\overline{R_n}$を求めると（$l=1$，即ちR_nを$\overline{R_n}$の代用としてもR_nの分散はそう大きくないから差支えはないであろ

う。(注 3))

$$\overline{R}_n = 4.5\,\sigma \qquad (6)$$

ということが分る。　それ故に

$$D = \frac{\sigma}{2} \doteqdot \frac{M-L}{9} \qquad (7)$$

とおくときは

$\overline{x}-3D$，$\overline{x}-D$，$\overline{x}+D$，$\overline{x}+3D$

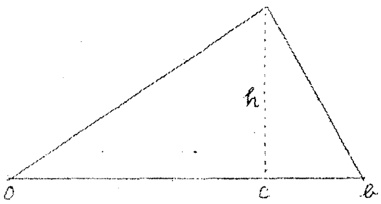
なる4点で得点を5段階に分ければよいのである。

§3.　前節の別考察

前節では点数の分布が正規分布であるという仮定の下に考察を進めた。実際には確率紙を用いたり，歪度，尖度の検定を行つて正規分布か否かを調べればよい。

実際テストを行つてみると山が左右に片寄つた分布が出てくることが多い。順序統計量を用いる関係上計算を簡単にする為，以下三角分布の場合について考えてみることにする。

変量の定義域を$[0, b]$とし，第1図の如き分布をとると，その確率密度函数$f(x)$は



第 1 図

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{h}{c}x, \quad for\ 0 \leqq x \leqq c \\ &= \frac{h}{b-c}(b-x), \quad for\ c < x \leqq b \end{aligned}\right\} (8)$$

条件　$\int_0^b f(x)\,dx = 1$

より　$h = 2/b \qquad (9)$

分布函数を$G(x)$とすると

$$\left.\begin{aligned} G(x) &= \frac{h}{2c}x^2, \quad for\ 0 \leqq x \leqq c \\ &= \frac{hc}{2} + \frac{h(b-x)^2}{2(b-c)}, \quad for\ c < x \leqq b \end{aligned}\right\} (10)$$

このとき標本域 R の平均 $\overline{R}_n$ は

$$\overline{R}_n = \int_0^b \left\{ 1-(G(x))^n-(1-G(x))^n \right\} dx$$

$$= \int_0^c \left\{ 1-\left(\frac{h}{2c}x^2\right)^n-\left(1-\frac{h}{2c}x^2\right)^n \right\} dx + \int_c^b \left\{ 1-\left(\frac{hc}{2}+\frac{h(b-x)^2}{2(b-c)}\right)^2 \right.$$

$$\left. -\left(1-\frac{hc}{2}-\frac{h(b-x)^2}{2(b-c)}\right)^n \right\} dx$$

$\dfrac{hc}{2} = \sin^2\theta_0$　とすると

$$\overline{R}_n = \sqrt{\frac{2c}{h}}\left(\sin\theta_0 - \frac{\sin^{2n+1}\theta_0}{2n+1} - \int_0^{\theta_0}\cos^{2n+1}\theta d\theta\right) + \sqrt{\frac{2(b-c)}{h}}\cos\theta_0\left\{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right.$$

$$\left. -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2n(2n-2)\cdots(2n-2k)\sin^{2k+2}\theta_0}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k-1)} - \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}\cos^{2n}\theta_0 \right\} \tag{11}$$

$$\sigma^2 = \int_0^b x^2 f(x)dx - \left(\int_0^b x f(x)dx\right)^2 = \frac{1}{18}(b^2+c^2-bc) \tag{12}$$

また R の分散は

$$\sigma_R^2 = \int_0^b n(n-1)G'(u)du\int_0^{b-u} x^2 G'(u+x)(G(u+x)-G(u))^{n-2}dx - \overline{R}_n^2$$

$$= b^2 - \frac{c^2}{n+1}\sin^{2n}\theta_0 - 2b\sqrt{\frac{2c}{h}}\int_0^{\theta_0}\cos^{2n+1}\theta d\theta + \frac{2c}{h(n+1)}(\cos^{2n+2}\theta_0 - 1)$$

$$-2b I_{2n+1} + \frac{2(b-c)}{h(n+1)}(1-\sin^{2n+2}\theta_0 - \cos^{2n+2}\theta_0) + I + J - \overline{R}_n^2 \tag{13}$$

但し

$$I_{2n+1} = \int_{\sin\theta_0}^1 \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{x^2-\sin^2\theta_0}} = \frac{\cos\theta_0}{2n+1} + \frac{2n\sin^2\theta_0}{2n+1} I_{2n-1} \tag{14}$$

$$I = 2\left(\frac{h}{2c}\right)^n\left\{\frac{b^{2n+1}c}{2n+1} - \frac{n\,b^{2n-1}}{2n-1}\frac{c^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{c^{2n+1}}{2n+1}\right.$$

$$\left. -\frac{c^{2n+2}}{2n+2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{n}{2n-1}+\cdots+(-1)^n\right)\right\} \tag{15}$$

$$J = \frac{(-1)^n}{2^n n}\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}\cos^{2n}\theta_0 \tag{16}$$

例えば $b=100$, $h=\frac{1}{50}$, $C=50$ のときは $\theta_0=\frac{\pi}{4}$ となり，nが十分大きいときは

$$\overline{R}_n \fallingdotseq \frac{50(4n+1)}{2n+1}$$

$$\sigma^2 = 1250/3$$

となるから

$$\frac{\overline{R_n}}{\sigma}=\sqrt{6}\,\frac{4n+1}{2n+1} \longrightarrow 2\sqrt{6}=4.899\ (n\to\infty)$$

また $b=100$, $h=\frac{1}{50}$, $C=81$ のときは $\sin\theta_0=\sqrt{\frac{hc}{2}}=0.9$ となり

$$\frac{\overline{R_n}}{\sigma}=\frac{200n+81}{2n+1}\sqrt{\frac{18}{8461}} \longrightarrow 4.612\ (n\to\infty)$$

二三のnについて計算すると第3表のようになる。

n		2	5	10	50	∞
$\frac{\overline{R_n}}{\sigma}$	$C=50$ のとき	1.2247	3.0740	4.782	4.875	4.899
	$C=81$ のとき	1.2339	3.9468	4.570	4.603	4.612

第 3 表

§ 4. 層別に於ける分散の推定

Sampling に於て層別を行い，各層に於ける変量Xの分散と 変量Yとの関係を考える場合がある。このときXの分散が重要となる。(註 4)

Xの分布が連続的であるとき，分点 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{k-1}$ で k 個の層に分けると，各層内での分布は近似的には直線と考えられよう。

先づ一様分布のときは或る層（区間は (a, b) としよう）で

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \tag{17}$$

が密度函数となる。　このとき大きさ n の標本に対する range R の密度函数を $F(R)$ とおくと

$$F(R) = n(n-1)\int_a^{b-R} \frac{1}{(b-a)^2}\left[\int_u^{u+R} \frac{dx}{b-a}\right]^{n-2} du$$

$$= \frac{n(n-1)}{(b-a)^n} R^{n-2}(b-a-R) \qquad (18)$$

従って R の平均値 $\overline{R}_n$ は

$$\overline{R}_n = \int_0^{b-a} R f(R)\, dR = \frac{n-1}{n+1}(b-a) \qquad (19)$$

一方もとの分布の分散 σ^2 は

$$\sigma^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad (20)$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{R}_n}{\sigma} = \sqrt{12}\,\frac{n-1}{n+1} = 3.4641\,\frac{n-1}{n+1} \qquad (21)$$

また R の分散 σ_R^2 は

$$\sigma_R^2 = \int_0^{b-a} R^2 F(R)\,dR - \overline{R}_n^2 = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}(b-a)^2 \qquad (22)$$

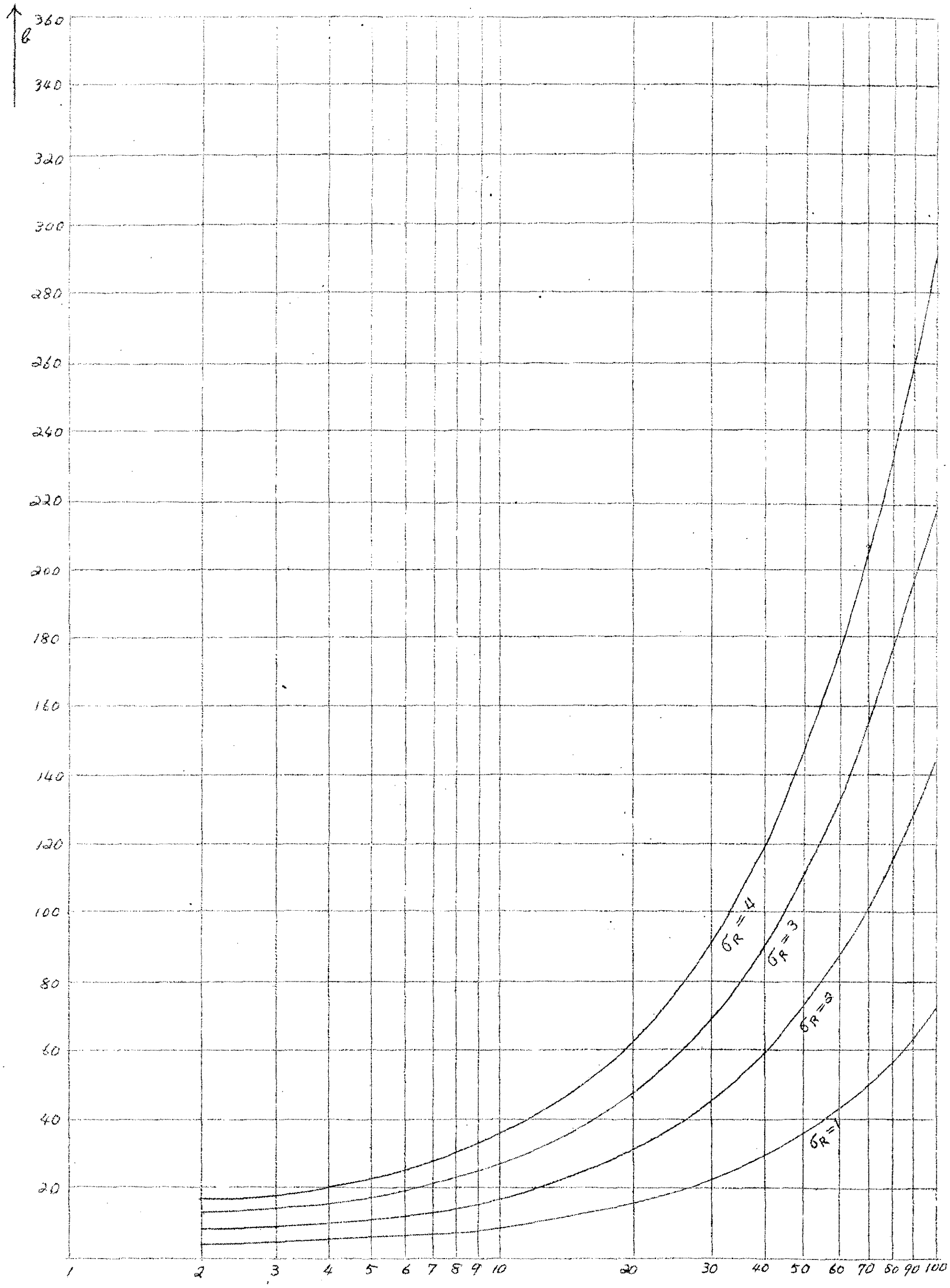
となる。

$n \geqq 2$ のときの $\sigma_R =$ const. のグラフは第2図のようになる。

次表は n, σ_R に対する $b-a$ の値を示すものである。

大きさ n のサンプルが幾組もとれないときは(21)の代りに $(R \pm 3\sigma_R)/\sigma$ が(21)の 99% の信頼限界と考えてもよいであろう。

(21)のグラフは第5表にまとめて記しておく。


b
360
340
320
300
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
n
$\sigma_R=4$
$\sigma_R=3$
$\sigma_R=3$
$\sigma_R=1$

第 2 図

n \ σ_R	1	2	3	4
2	4.242 641	8.485 29	12.727 92	16.970 56
3	4.472 136	8.944 27	13.416 41	17.888 54
4	5.000 000	10.000 00	15.000 00	20.000 00
5	5.612 309	11.224 62	16.836 93	22.449 24
10	8.981 387	17.962 77	26.944 16	35.925 55
15	12.467 14	24.934 3	37.401 4	49.868 6
20	15.978 42	31.956 8	47.935 3	63.913 7
25	19.499 99	39.000 0	58.500 0	78.000 0
30	23.026 22	46.052 4	69.078 7	92.104 9
40	30.085 71	60.171 4	90.257 1	120.342 8
50	37.149 96	74.299 9	111.450 0	148.599 8
60	44.216 48	88.433 0	132.649 4	176.865 9
70	51.186 72	102.373 4	153.560 2	204.746 9
80	58.352 96	116.705 9	175.058 9	233.411 8
90	65.422 16	130.844 3	196.266 5	261.688 6
100	72.491 78	144.983 6	217.475 3	289.967 1
∞	∞			

第 4 表

次に直線分布のとき，xの分布函数を$G(x)$とすると（簡単のため $a=0$ として考えるがこうしても一般性を失うことはない）

$$G(x)=\int_0^x(\alpha x+\beta)\,dx=\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x \tag{23}$$

但し

$$\int_0^b(\alpha x+\beta)\,dx=\frac{\alpha}{2}b^2+\beta b=1 \tag{24}$$

このとき範囲Rの平均値 $\overline{R}_n$ は

$$\overline{R}_n = \int_0^b \left\{ 1-(G(x))^n - (1-G(x))^n \right\} dx$$

$$= \int_0^b \left\{ 1-\left(\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x\right)^n - \left(1-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x\right)^n \right\} dx \qquad (25)$$

もし $\beta=0$ ならば

$$\overline{R}_n = \int_0^b \left\{ 1-\left(\frac{\alpha}{2}x^2\right)^n - \left(1-\frac{\alpha}{2}x^2\right)^n \right\} dx$$

但し $\quad \frac{\alpha}{2} b^2 = 1$

$$\therefore \ \overline{R}_n = \int_0^b \left\{ 1-\left(\frac{x}{b}\right)^{2n} - \left(1-\left(\frac{x}{b}\right)^2\right)^n \right\} dx$$

$$= b\left(1 - \frac{1}{2n+1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta \, d\theta \right) \qquad (26)$$

また

$$\sigma^2 = \int_0^b x^2(\alpha x+\beta)dx - \left(\int_0^b x(\alpha x+\beta)dx \right)^2$$

$$= \frac{\alpha}{4}b^4 - \frac{\alpha^2}{9}b^6 = \frac{b^2}{18} \qquad (27)$$

$$\therefore \quad \frac{\overline{R}_n}{\sigma} = \sqrt{18}\left(1 - \frac{1}{2n+1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta \, d\theta \right) \qquad (28)$$

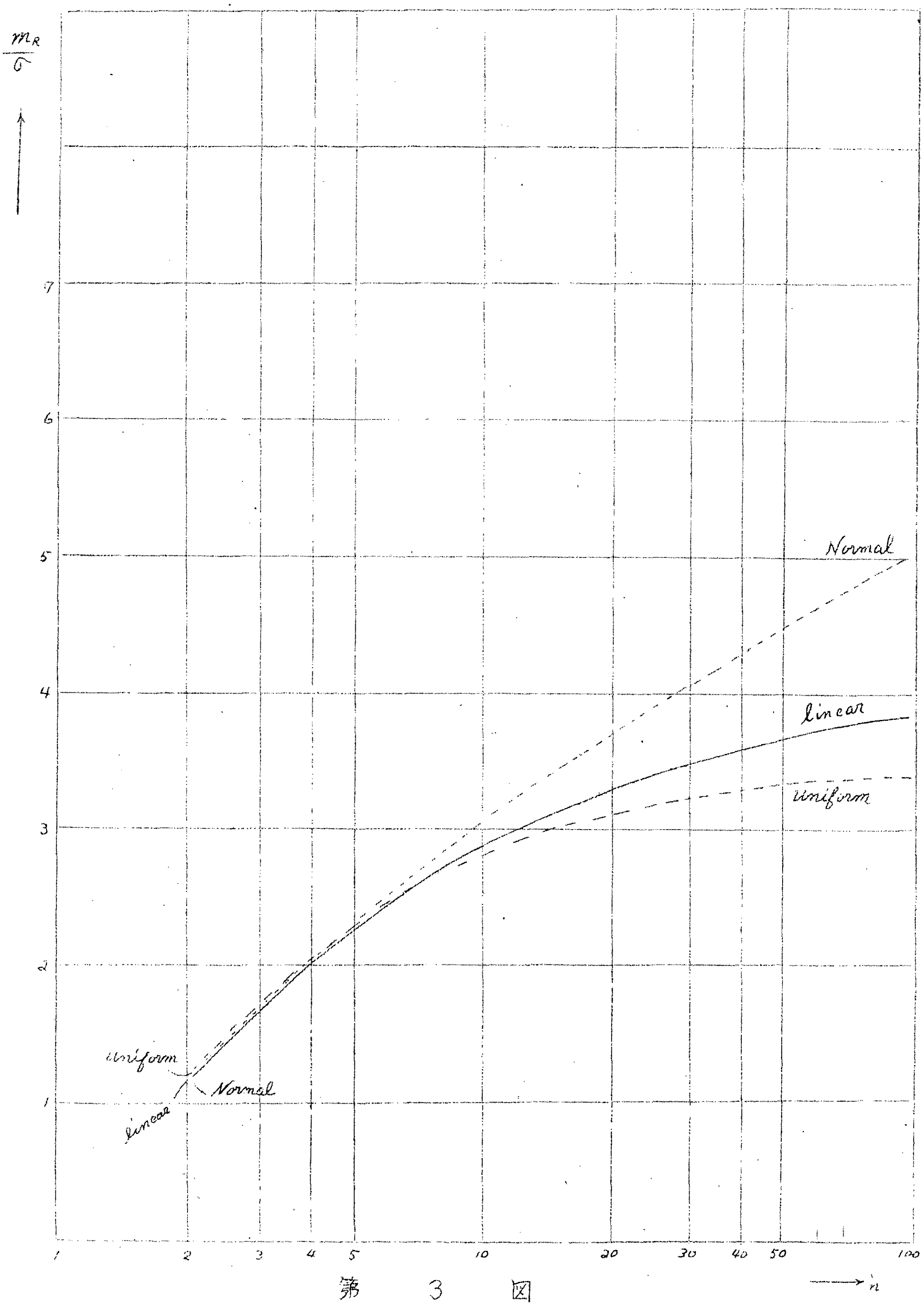
$\beta \neq 0$ のときは種々の場合があつて α, b によつて $\overline{R}_n/\sigma$ も種々の値をとる。

以上の結果を第5表及び第3図で示しておく。実際には $n=10$ 位がよく用いられる場合であろう。このときは何れの場合も $\overline{R}_n \fallingdotseq 3\sigma$ と考えてよいであろう。

第 5 表

	n	2	3	4	5	10	15	20	25	30
$\frac{\overline{R}_n}{\sigma}$	正規分布	1.128	1.693	2.059	2.3259	3.0775	3.4718	3.7350	3.9306	4.0855
	一様分布	1.1547	1.7321	2.0785	2.3094	2.8343	3.0311	3.1342	3.1976	3.2406
	直線分布 ($\beta=0$)	1.1314	1.6970	2.0472	2.2897	2.8940	3.1584	3.3138	3.4185	3.4950

	n	40	50	60	70	80	90	100	∞
$\frac{\overline{R}_n}{\sigma}$	正規分布	4.3216	4.4982	4.6386	4.7547	4.8536	4.9394	5.0152	
	一様分布	3.2951	3.3283	3.3505	3.3665	3.3786	3.3880	3.3955	3.4641
	直線分布 ($\beta=0$)	3.6012	3.6728	3.7252	3.7655	3.7979	3.8245	3.8469	4.2426



$\frac{m_R}{\sigma}$
7
6
5
4
3
2
1
Normal
linear
Uniform
Uniform
Normal
linear
1
2
3
4
5
10
20
30
40
50
100
n

第　3　図

こゝでまたRの分散を求めておく。

$$\sigma_R^2=\int_0^b n(n-1)F'(u)du\int_0^{b-u}x^2F'(u+x)\left(F(u+x)-F(u)\right)^{n-2}dx-\overline{R}_n^2$$

$$=b^2-2\int_0^b x(F(x))^n dx-2\int_0^b(b-x)(1-F(x))^n dx$$

$$+2\int_0^b dx\int_0^{b-x}(F(u+x)-F(x))^n du-\overline{R}_n^2$$

$$=2\int_0^b\left\{x-x(F(x))^n-(b-x)(1-F(x))^n+\int_0^{b-x}(F(u+x)-F(x))^n du\right\}dx$$

$$-\overline{R}_n^2 \tag{29}$$

分布が前述の直線　$y=\alpha x=\frac{2}{b^2}x$　の場合には

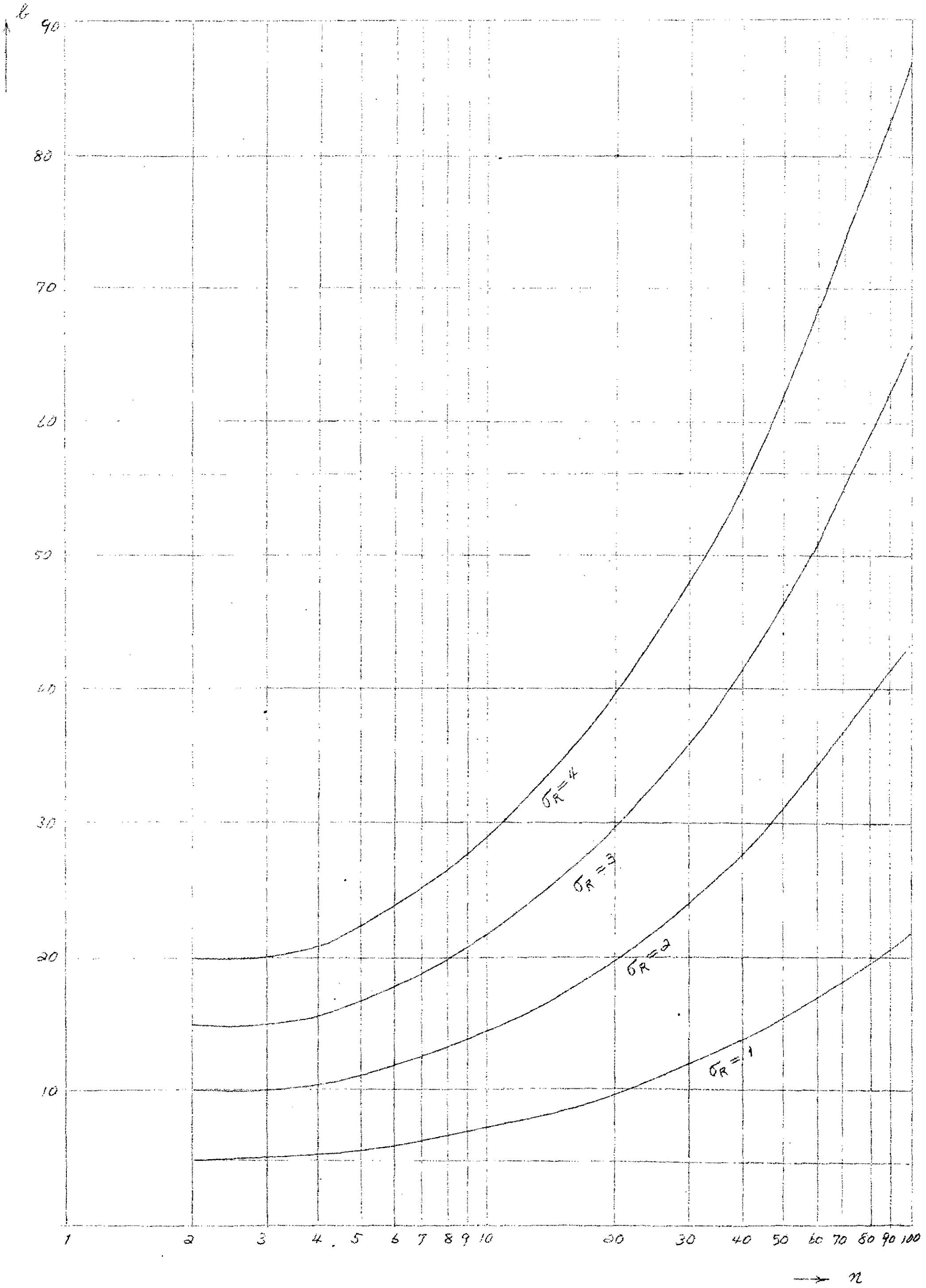
$$\sigma_R^2=b^2\left\{1-\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta\,d\theta\right\}-\overline{R}_n^2$$

$$=b^2\left\{\frac{4n+1}{(2n+1)^2}-\frac{1}{(2n+1)(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta d\theta-\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta\,d\theta\right)^2\right\} \tag{30}$$

n, σ_R　に対するbの値は第6表のようになり，グラフで示せば第4図のようになる。

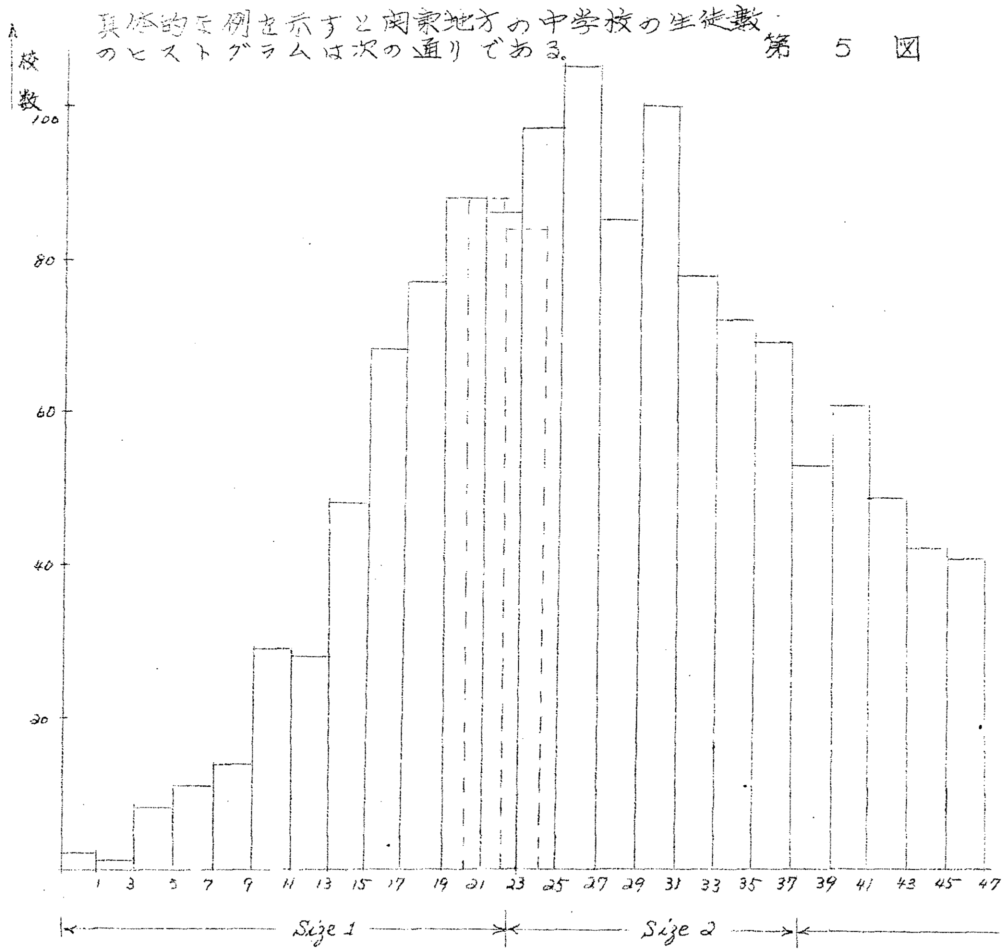
第 6 表

n \ σ_R	1	2	3	4
2	5.000 00	10.000 0	15.000 0	20.000 0
3	5.000 00	10.000 0	15.000 0	20.000 0
4	5.290 57	10.581 1	15.871 7	21.162 3
5	5.634 89	11.269 8	16.904 7	22.539 6
10	7.301	14.60	21.90	29.20
15	8.716	17.43	26.15	34.86
20	9.944	19.89	29.83	39.78
25	11.183	22.37	33.55	44.73
30	12.045	24.09	36.14	48.18
40	13.836	27.67	41.51	55.34
50	15.404	30.81	46.21	61.62
60	16.905	33.81	50.72	67.62
70	18.081	36.16	54.24	72.32
80	19.426	38.85	58.28	77.70
90	20.589	41.18	61.77	82.36
100	21.690	4[illegible].38	65.07	86.76
∞	∞			


b
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
n
$\sigma_R = 4$
$\sigma_R = 3$
$\sigma_R = 2$
$\sigma_R = 1$

具体的な例を示すと関東地方の中学校の生徒数のヒストグラムは次の通りである。

第 5 図



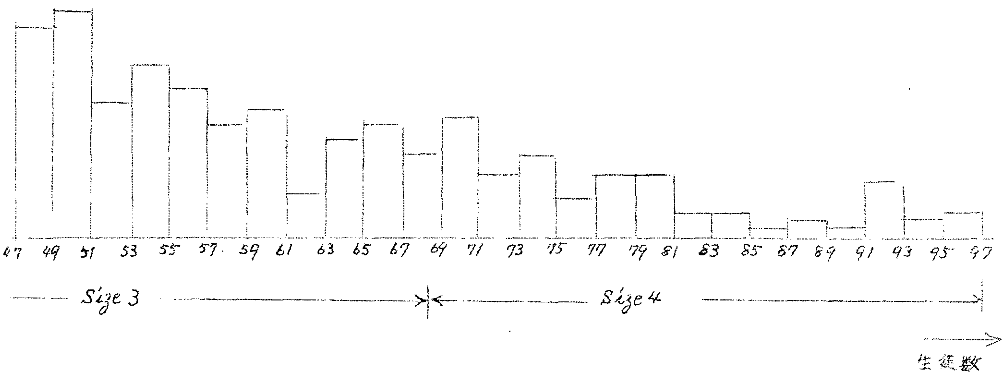
0 〜 22 までを一つの層と考えると，大体直線分布である。この層に於ける生徒数の分散を推定するのに，ランダムに 10 校をえらび，R を求めると 16 となつた。第5,6表により $\sigma_R \doteqdot 3$ となるから

$$\frac{\overline{R_n}}{\sigma} = 2.8940 \doteqdot \frac{16 \pm 3 \times 3}{\sigma}$$

$$\therefore \quad 2.419 < \sigma < 8.639$$

なることが大体 99 % の信頼係数をもつていえる。実際に σ を計算すると 4.58 である。

（ $\frac{\overline{R_n}}{\sigma} = 2.8940 \doteqdot \frac{16}{\sigma}$ より計算すれば $\sigma = 5.53$ が得られる。）



これらの計算，製図には座間宣夫，田中貞子，釣谷絁子の諸氏の援助を得たものであることを附記して感謝の意を表する次第である。

（註１） P.G. Hoel : Introduction to Mathematical Statistics, Oliver and Boyd Co. 1947.

（註２） L.H.C. Tippet : On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population, Biometrika, Vol. 17, 1925.

（註３） L.H.C. Tippet : loc. cit. この中の Range の標準偏

差は下表の通りである。

サンプル size n	標準偏差 (単位 σ)
2	0.853
10	0.797
20	0.729
60	0.639
100	0.605
200	0.566
500	0.524
1000	0.497

（註4）林知己夫，丸山文行： ある層化法に就て，統数研講究録，Vol. 4, No. 10, 1948

青山博次郎： 層別法に就て，同講究録 Vol. 7. No. 4. 1951.