統計数理(2012)
第 60 巻 第 1 号 3–25

特集「時空間統計解析：新たなる分野横断的展開」
［総合報告］

応用空間統計学の二つの潮流：空間統計学と空間計量経済学

堤 盛人[1] ・瀬谷 創[2]

（受付 2011 年 6 月 28 日；改訂 2011 年 9 月 12 日；採択 9 月 13 日）

要　旨

空間統計学(狭義には地球統計学)と空間計量経済学は，地理空間データを対象とした研究の発展に大きく貢献し，その適用は応用空間統計学の 2 つの主流となっている．自然科学への応用から生まれた空間統計学と地域科学から生まれた空間計量経済学は，これまで独自の発展を経てきたが，近年，特に地理情報システムの発展に伴い，社会経済データを用いた研究に後者だけでなく前者が応用される機会も増えている．

本稿では，二つの学問の相違とその長所・短所，発展可能性について，最新の研究動向も踏まえながら，総括的な議論を行う．まず，空間データの特徴である空間的影響(空間的自己相関と空間的異質性)について説明した上で，その代表的な検定手法を整理する．次に，空間計量経済学，空間統計学の差異，特に，対象となる空間の捉え方について議論した上で，最新の研究事例も紹介しながらそれぞれの学問分野の特徴をまとめる．空間計量経済学については空間重み行列の役割について詳しく論じるとともに，空間統計学については予測(空間内挿)について詳しく論じることで，両分野の本質的な差異を議論する．最後に，それぞれの時空間データ適用への拡張の動向について議論する．

キーワード： 空間統計学，空間計量経済学，空間重み行列，定常性，予測．

1. はじめに

近年，地理情報システム(geographical information system (GIS))や衛星リモートセンシング技術の発展によって，位置座標を属性として持つ地理空間情報に関するデータ(以下，「空間データ」と称する)の入手が容易になりつつある．例えば，国土数値情報(国土交通省)では，地価，土地利用，交通データ等の多種多様な空間データが提供されている．空間データの分析手法は，空間統計学(spatial statistics)と呼ばれる分野で発展してきた．空間統計学の代表的なテキストである Cressie (1993), Banerjee et al. (2004)では，空間データを，[1] 地球統計データ(geostatistical data)，[2] 地域(格子)データ(areal/lattice data)，[3] 点過程データ(point pattern data)の 3 つに分類している．今，$s \in \Re^d$ が，次元 d (通常 $d=2$ または 3)のユークリッド空間におけるデータの位置であるとし，$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s})$ は，空間的な位置 $\boldsymbol{s}$ におけるランダムな量であるとしよう．ここで，$\boldsymbol{s}$ がインデックス集合 $D \subset \Re^d$ 内を動くとき，$\{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s}) : \boldsymbol{s} \in D\}$ は，空間過程(spatial

[1] 筑波大学大学院 システム情報系社会工学域：〒305–8573 茨城県つくば市天王台 1–1–1；tsutsumi@sk.tsukuba.ac.jp
[2] 国立環境研究所 地球環境研究センター：〒305–8506 茨城県つくば市小野川 16–2；seya.hajime@nies.go.jp

process)，あるいは確率場(random field)と呼ばれる．さらに，Cressie and Wikle (2011, p. 18)同様，時間軸を導入した時空間過程は，t が $T \subset \Re$ 内を連続的に動くとき，$\{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s};t) : \boldsymbol{s} \in D, t \in T\}$，離散的に動くとき，$\{\boldsymbol{Y}_t(\boldsymbol{s}) : \boldsymbol{s} \in D, t \in T\}$ と表されると仮定する．[1] の地球統計データは，領域 D が連続(continuous)で固定された(fixed)集合である場合の空間データである．ここで，連続というのは，$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s})$ が領域中のいたるところで観測可能であることを意味する．例えば，標高，気温データ等がこれに該当する．[2] の地域データは，領域 D が固定されており，いくつかの領域から構成される場合の空間データである．ここで，$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s})$ は，離散的な領域でのみ観測可能である．例えば，衛星リモートセンシング画像データ，市区町村で集計された各種社会経済データ等がこれに該当する．[3] の点過程データとは，D 自体がランダムな場合の空間データであり，イベントが生起した位置を示す．具体的には，スカラー $Y(\boldsymbol{s}) \equiv 1$, $\forall \boldsymbol{s} \in D$ と定義できる(例えば，Schabenberger and Gotway, 2005)．

さて，空間データの中でも特に，[2] の地域データの分析手法は，空間計量経済学(spatial econometrics)と呼ばれる分野で研究が蓄積され，今や計量経済学の重要なテーマの一つとなっている(Anselin, 2010)．空間計量経済学の分野の代表的なテキストである Anselin (1988)では，空間統計学と空間計量経済学の違いについて議論がされており(Anselin, 1988, p. 10)，前者は，data-driven であるのに対し，後者は model-driven である点に特徴があるとしている．すなわち，前者が与えられたデータセットから空間的な構造や空間過程を抽出(extracting)，同定(identifying)，推定(estimating)することに関心があるのに対し，後者は特定の理論やモデルから考察を開始し，その推定や特定化，空間的影響(spatial effects)の存在に関する検定に着目する．これに対して Cressie (1993, p. 443)は，“From a statistician’s perspective, the distinction is not particularly helpful” と，批判的な見解を述べている．

さて，Anselin (1986)は当時の状況について，“each approach tends to be rather self-contained, with little cross-reference shown in published articles” と述べているが，その状況は現在でも大きく変わっていない．そのため，例えば同一のモデルに対し二つの分野で異なる呼称が用いられるといった混乱が見られ，ある種の相互参入障壁が存在している．また，空間統計学・空間計量経済学の両分野を横断的にレビューした例は，Griffith and Paelinck (2010)等のごく一部の例外を除けば存在しないため，モデルの適切な使い分け等に関する情報の入手が容易でないのが現状である．

本論文は，両分野の基礎的なモデリング技法について最新の研究成果に触れながら議論するとともに，二つの学問分野の相違とその特徴，実証研究における使い分けについて総括的かつ詳細な議論を行うものである．現在，両分野に関して解説した邦書は，前者については，間瀬・武田(2001)，Wackernagel (1998)の邦訳である地球統計学研究会 監訳(2003), 間瀬(2010)等，後者については，塚井(2005)，清水・唐渡(2007)等に限られ，そもそも非常に少ないことに加え，近年の様々な空間データの普及や分析技法の高度化を鑑みれば，両分野のモデルを体系的に俯瞰・整理した論文は有用である．本論文は，両分野を横断的にレビューしているという点に大きな特徴を有する．

なお，本論文では，[1] 地球統計データと [2] 地域データの分析に着目することとし，[3] の点過程データは対象としない．点過程データの分析については，間瀬 他(1992)，Diggle (2003)，種村(2005)等を参照されたい．また，本論文では特に断らない限り，一変量に関する空間過程 $Y(\boldsymbol{s})$ を想定する．多変量モデルについては，Wackernagel (1998)を参照されたい．さらに，本論文は空間データ分析(spatial data analysis)に着目するものであり，領域 D 自体の結合・分割等の解析を行う空間解析(spatial analysis)は対象としない．

本論文における地域データと地球統計データという呼び方は，対象とする空間の大きさの違いというよりは，既述のとおり，数学的な意味での空間の捉え方の違いに本質的な意味がある

ものであり，地域データモデルは社会科学的な研究を中心に，地球統計データモデルは自然科学的な研究を中心に，それぞれ発展した経緯がある．これらのことを踏まえながら，以下，まず第二章では，空間データのモデリングのためのいくつかの仮定について空間統計学と空間計量経済学の比較に重点を置きながら述べる．次に，第三章では地域データのモデリング技法として，空間計量経済学の知見に基づく「地域データモデル」について説明し，第四章では地球統計データのモデリング技法として，空間統計学の知見に基づく「地球統計データモデル」について説明する．その後，第五章において，まとめと今後の両分野の展望について簡単に述べる．

2. 空間データと空間データモデリングの特徴

2.1 空間的自己相関と空間的異質性

統計モデルにおける仮定は，極めて理想的な状況を想定したものであり，実際にはその仮定が満足されないことも多い．空間データ分析においては，地域という空間的な広がりを持った対象を扱うことに起因する特有の問題，具体的には空間的依存性(自己相関)(spatial dependence/autocorrelation)と空間的異質性(spatial heterogeneity)からなる空間的影響(spatial effects)を考慮する必要がある Anselin (1988, p. 7)．ここで，厳密にいえば，空間的依存性と空間的自己相関は同義ではないが，実際には両者ともに自己相関(結合分布のモーメント)の意味で用いられることが多く，本研究でも Anselin and Bera (1998, p. 240)同様，両者は互換的(interchangeably)であるとして議論を進める．

空間的自己相関は，距離の近い確率変数が似たような傾向を示すという「正の空間的自己相関」と，距離の近い確率変数が非常に異なった値を示すという「負の空間的自己相関」に大別される．これらは，距離が近い事物はより強く影響しあうという Tobler (1979)の地理学の第一法則(first law of geography)として知られるものである．しかしながら，後者はいわゆるチェッカーボード・パターンを示すものであり，必ずしも直感的な解釈が可能ではない(Anselin and Bera, 1998)，負の空間的自己相関については(Whittle, 1954; Griffith, 2006)に詳しい．空間的自己相関は，次のような積率条件で表される(Anselin and Bera, 1998)．

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i)\cdot E(Y_j) \neq 0, \quad \forall\, i \neq j, \tag{2.1}$$

ここで，Y_i と Y_j は地点 $\boldsymbol{s}_i \in D, \boldsymbol{s}_j \in D$ における確率変数の値を示す．無論，式(2.1)が，「空間的な」自己相関であるのは，$\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{s}_j$ における確率変数間の相関が 0 でないということに関して，空間的構造(spatial structure)，空間的相互作用(spatial interaction)，空間的位置関係(spatial arrangement)という観点から意味のある解釈が可能な場合である(Anselin and Bera, 1998)．それに対し，空間的異質性とは，単に不均一な分散や係数による構造上の不安定のことを指し，通常の計量経済学の手法で対処可能な場合も多い(Anselin, 2001)．しかしながら，異質性が空間的な構造を持つ場合は，spatially varying coefficient モデル(例えば，Casetti, 1972; Fotheringham et al., 2002; Gelfand et al., 2003)等の専用の技法が必要となる．実際には，空間的異質性は空間的自己相関と同時に発生し，この場合通常の計量経済学の技法(例えば，分散不均一の検定)の使用は，誤りにつながる可能性がある(Anselin and Griffith, 1988)．また，クロスセクションでは，空間的自己相関と空間的異質性は見かけ上同一である場合が多く，例えば，回帰分析の残差が正の空間クラスターを形成しているとき，これは，空間的異質性(グループレベルの分散不均一)とも空間的自己相関(空間過程がクラスターを生じさせている)とも解釈可能である(Anselin, 2001)．従って，例えば model-driven と定義される空間計量経済学では，生じている問題にモデルの特定化(model specification)を通じて構造を課し，モデルの妥当性を統計的に検定するというアプローチを用いる(Anselin and Bera, 1998)．

2.2 空間的自己相関と空間的異質性の検定

本項では，空間的影響の検定方法について，空間的自己相関，空間的異質性の順に述べる．

空間的自己相関の検定には，次式に示す Moran's I（Moran, 1950）が用いられることが多い．

$$I = \frac{N}{S}\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}, \tag{2.2}$$

ここで，$\boldsymbol{W}$ は，3.2 節で詳しく述べる空間重み行列，$S = \sum_i \sum_j w_{ij}$ は基準化定数（重み行列の全要素の和）であり，$\boldsymbol{e}$ は $N \times 1$ の興味の対象である変数（あるいは，線形回帰モデルであれば通常最小二乗法（ordinary least squares（OLS）推定における残差）ベクトルである．相関係数と同様，Moran's I は，–1 から +1 までの値を取り得る．Moran's I の値が 1 に近いことは，正の自己相関の存在を示唆し，逆に–1 に近いとき，負の自己相関の存在を示唆する．Moran's I を標準化すると，漸近的に標準正規分布 N (0,1) に従うため，「与えられた $\boldsymbol{W}$ の下で空間的自己相関が無い」を帰無仮説とする仮説検定が可能となる．Moran's I は，Pearson の相関係数を空間に拡張したものと見なすことができ直感的に分かりやすく，かつ計算が比較的容易であるため広く使用されている．また，誤差項の空間的自己相関だけでなく，従属変数の空間ラグ，分散不均一に対しても検出力を持つ（Anselin and Griffith, 1988; Anselin and Rey, 1991; Florax and de Graaff, 2004）．しかし，その理論的背景は必ずしも明確ではなく，また空間依存の構造を特定化することができないという問題点もある．従って Moran's I と共に，対立仮説に特定の依存性を仮定した最尤法に基づく検定法が用いられることが多い．代表的な検定法として，ワルド検定，尤度比検定，ラグランジェ乗数（Lagrangian multiplier（LM））検定等がある（Anselin, 1988）．LM 検定は，Rao's Score 検定ともよばれる（Anselin, 2001）．LM 検定は，OLS の結果のみを用いて検定が可能という点で簡便である．しかしながら，LM 検定では誤差項が自己回帰型であるか移動平均型であるかの区別ができないという問題点がある．LM 検定の具体的方法については，清水・唐渡（2007）に詳しい．空間的依存性の検定統計量は他にも，Geary's C 統計量（Geary, 1954），Kelejian-Robinson 統計量（Kelejian and Robinson, 1992），局所的な検定に用いる G 統計量（Getis and Ord, 1992）や Anselin (1995）のローカル・モラン統計量，カウントデータのクラスター検出に用いられる Rogerson (1999）の R 統計量など数々のものが提案されている．種々の検定量に関する比較・レビューについては，Lin (2004), Getis (2007）等を参照されたい．

次に，空間的異質性の検定手法について述べる．分散不均一に関する検定統計量としては，Breusch-Pagan，White 等の各種検定統計量がしばしば用いられる．しかしながら，Anselin (1987）は，モンテカルロ実験により，誤差項に空間的な自己相関が存在する場合，これらを用いた検定結果が影響を受けることを指摘している．誤差項に空間的自己相関が存在するということを前提とした検定統計量として，spatially adjusted Breusch-Pagan (SABP）検定統計量が提案されている（Anselin, 1988, pp. 122–123）．一方で，構造の安定性に関する検定としては，チョウ検定が知られているが，同様に空間的自己相関が存在する場合，通常の F 値に基づくチョウ検定は，不適当となる（Anselin, 1988, p. 124）．従って，誤差項の空間的自己相関の存在を前提とした，最尤法推定値に基づく空間調整済みの（spatially adjusted）チョウ検定を用いる必要がある（Anselin, 1988, p. 124）．

2.3 地球統計データモデルと地域データモデルの差異

地球統計データは D を連続的な点の集合とみなすのに対し，地域データでは D を離散的な領域の集合とみなす．これに対応して，両データで用いられるモデリング技法も異なる．地球統計データモデルでは，4 章で詳述するように，通常トレンドを除いた誤差項の空間過程 $u(\boldsymbol{s})$ が，弱定常性（weak stationarity あるいは 2 次定常性（second-order stationarity）），すなわ

ち $\mathrm{Cov}(u(\boldsymbol{s}), u(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h})) = C(\boldsymbol{h})$（ただし $\boldsymbol{h} \in \Re^d$）を満たすとする．ここで，$C(\boldsymbol{h})$ は，共分散関数(covariance function) あるいはコバリオグラム(covariogram) と呼ばれ，これは共分散を $\boldsymbol{h} \in \Re^d$ のみの関数として表したものである．$C(\boldsymbol{h})$ が長さ $||\boldsymbol{h}||$ のみに依存する(すなわち方位には依存しない)とき，空間過程は等方的(isotropic) であるといわれる．一方，地域データモデルでは，誤差項の従う空間過程を(自己回帰型や移動平均型等に)構造化する．その結果として，誤差項の分散は不均一となり，共分散の定常性も(観測値が格子上で得られているといった例外的な場合を除いて)満たされないこととなる．さらに，地球統計データモデルが領域内の任意地点の値の予測(内挿) (spatial prediction/interpolation) を行うことに用いられることが多いのに対して，3.4 で詳しく述べるように，地域データモデルが予測に用いられることはほとんどない．

ところで，空間データが，離散的なユニットでしか入手できないという状況は，特に社会経済データにおいては珍しくない．この場合においても，盲目的に地域データモデルを適用するのではなく，観測データに連続な空間過程を想定するのが自然か，それとも離散的な空間過程を想定するのが自然かという観点から慎重に判断されるべきである．例えば，人口などのカウントデータや比率データに連続な空間過程を想定することはできないが，離散的なメッシュで得られる気温や標高データには，連続な空間過程を想定して地球統計データモデルを適用することは妥当である(Gelfand et al., 2010, pp. 522–523)．なお，観測値の空間単位と興味のある空間単位の乖離の問題(change of support problem (COSP))については，面で得られた観測値から点データの予測値を得る area to point kriging (Kyriakidis, 2004) 等の技術が発展してきており，実証研究においても用いられつつある(Yoo and Kyriakidis, 2009)．COSP に関する包括的レビューについては，Gotway and Young (2002) を参照されたい．

3. 地域データのモデリング

3.1 空間計量経済学の発展経緯

Anselin and Bera (1998) によると，「空間計量経済学」という用語は，1970 年代初頭にベルギーの経済学者である Jean Paelinck が用い始めたものであり，Paelinck and Klaassen (1979) は空間計量経済学の分野における初のテキストとされている．それまで，データの空間的側面は，主要な経済学や計量経済学において長らく無視されていたが，現在ではその状況は大きく変わり，計量経済学の多くの学術雑誌で特集が組まれる等，今や空間計量経済学は，計量経済学のメインストリームとなりつつある．空間計量経済学の現在に至るまでの学問分野としての発展経緯については，Anselin (2010) の過去 30 年の回想論文に詳しいため，そちらを参照されたい．

3.2 地域データモデルと重み行列

観測値が N 個のクロスセクションデータにおいては，$N \times N$ の分散共分散を直接データから求めることはできない．後述する通り，地球統計データモデルでは，共分散関数，又はバリオグラムを用いて，分散共分散行列を直接構造化することでこの問題の解決を図る．一方で，地域データモデルでは，空間過程を構造化することで，この問題に対処することを試みる．空間重み行列(spatial weight matrix) は，観測値間の空間的自己相関を構造化するための，便利で簡潔な道具である(LeSage and Pace, 2009, p. 3)．$N \times N$ の空間重み行列 $\boldsymbol{W}$ は，$\boldsymbol{s}_i$ と依存関係にある近隣集合を $S_i \subset D$ と定義したとき，$\boldsymbol{s}_i$ と $\boldsymbol{s}_j \in S_i$ の関係を記述するものであり，地点/地域 $\boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{s}_j$ に依存関係があれば $w_{ij} \neq 0$ とされ，対角行列の要素は 0 とされる．さらに，それぞれの行 i に対して，$\sum_j w_{ij} = 1$ となるように行基準化(row-normalized) されることが多い(例えば，Fingleton, 2009)．行基準化によって，空間ラグ変数 $\sum_j w_{ij} Y_j$ が，近傍集合における確率変数値から受ける影響の重み付き平均となるなど，解釈が容易になり，また，空間パラメータ

に関するモデル間の比較も可能になる(Anselin and Bera, 1998).さらに,$\boldsymbol{W}$ が対称行列であれば,行基準化によって空間パラメータの取り得る範囲が $(1/\varpi_{\min}, 1)$ となり(ただし,$\varpi_{\min}$ は重み行列の最小固有値),パラメータ推定が容易になる.多くの場合,さらに強い,$|\lambda| < 1$ という制約がおかれることが多いが,通常 $|\varpi_{\min}|<1$ となるため,これは強すぎる(すなわち,制約として不要な)仮定である(Kelejian and Robinson, 1995; Wall, 2004).一方ソーシャルネットワーク分析の分野では,列基準化が行われることもある(Leenders, 2002).この場合,ある確率変数値が,他の確率変数値に与える影響が 1 に基準化されることを意味する(Elhorst, 2010a).$\boldsymbol{W}$ が行基準化される以前に,重み行列が非対称行列である場合(例えば,Seya et al., 2011),空間パラメータは,$(1/\upsilon_{\min}, 1)$ の範囲の値をとる(LeSage and Pace, 2009, pp. 88–89).(ただし,$\upsilon_{\min}$ は行基準化後の重み行列の最小実数固有値).言うまでもなく,距離を用いた重み行列においては,基準化によって距離の持つ意味が失われてしまうため,かえって経済的解釈を難しくするという問題もある(Anselin, 1988, p. 24).

また,重み行列の選択は,地域データモデルのパラメータ推定値,空間的自己相関の検定の両者に重大な影響を及ぼす(例えば,Griffith, 1996).しかしながら,正しい空間重み行列の選択に関するガイドラインは,現状ほとんど存在しない(Anselin, 2002). Stakhovych and Bijmolt (2008) は,重み行列の与え方を,(1) 完全に外生とする,(2) データから決定する,(3) 推定するという 3 つに分類している.(1) は,地域の境界が接しているか否か(隣接行列)や,距離の逆数等で与える典型的な方法である.(2) には,社会ネットワークや,経済的な距離などで与えるアプローチ(渡辺・樋口, 2005; Páez et al., 2008; Corrado and Fingleton, 2011)と,Getis and Aldstadt (2004) の,ローカル統計量 G_i に基づき構築する手法などが該当する.(3) としては,Bhattacharjee and Jensen-Butler (2006) の,$\boldsymbol{W}$ のノンパラメトリック推定が挙げられる. Stakhovych and Bijmolt (2008) は,シミュレーション実験に基づき,(A) 情報量基準による重み行列選択,(B) シンプルな隣接行列の使用,の二つを推奨している.Smith (2009) は,非常に密 (high-density) な空間重み行列を用いた空間誤差モデルと空間ラグモデル(3.3 で述べる)の空間パラメータの最尤推定値は,下方バイアスを持つことを解析的に示している.このことは,不動産分析等で用いられることが多い距離の逆数を用いた重み(例えば,堤 他, 2000a)の使用が,必ずしも望ましいとは言えないことを示唆している.Kostov (2010), LeSage and Pace (2009) は,それぞれブースティング,ベイジアン・アプローチに基づく事後モデル確率を用いたモデル選択を試みている.Folmer and Oud (2008) は,$\boldsymbol{W}$ を用いずに,潜在変数を用いた構造方程式モデルによって空間的自己相関をモデル化する方法を提案している.このように現在までに様々なアプローチが提案されているが,地域データモデルにおいて,$\boldsymbol{W}$ の特定化は極めて重要なステップ:“The Biggest Myth: LeSage and Pace (2010)” であり,解析・シミュレーション研究の蓄積と実データを用いた検証の両方が求められているといえる.ところで,Fingleton (1999) は,空間的自己相関を診断する代表的検定統計量である Moran's I の値が非常に大きい場合,以下で述べる空間誤差モデルのパラメータ λ が特異点 1 に近づき,モデルが不安定になると指摘している (spurious regression). Fingleton (1999) の分析結果は,丹念な説明変数の選定を試みない安易な地域データモデルの適用に警鐘を鳴らすものであると言えよう.

3.3 地域データモデル

空間計量経済学における代表的なモデルは,空間ラグモデル (spatial lag model (SLM)) と空間誤差モデル (spatial error model (SEM)) である.SLM は,次式のように定式化される.

$$\boldsymbol{Y} = \rho \boldsymbol{W} \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3.1}$$

ここで,$\boldsymbol{Y}$ は Y_i からなる $N \times 1$ の従属変数ベクトル,$\boldsymbol{X}$ は $N \times K$ の説明変数行列(定数項を含む),$\boldsymbol{\beta}$ は $K \times 1$ の回帰係数ベクトル,ρ は空間パラメータ,$\boldsymbol{\varepsilon}$ は $N \times 1$ の iid 誤差のベク

トルである．式(3.1)は，時系列モデルとの対比で，空間自己回帰モデル(spatial autoregressive model)と呼ばれることも多い(LeSage and Pace, 2009)．SLM は，空間的・社会的な相互作用の結果起こる均衡をモデル化するものである(Brueckner, 2003)．一時点のクロスセクションデータでは，実際に生じた空間的・社会的な相互作用は観測できないが，相互作用の結果至った均衡における相関構造をモデル化することは可能である．SLM において，従属変数の空間ラグ $\boldsymbol{WY}$ は誤差項と相関を持つため，内生変数として扱わなければならない．従って，内生性を考慮しない OLS による空間パラメータの推定量は，一致性を持たず，$\rho=0$ でなければ，不偏性も満足しない(Anselin, 1988)．

一方，SEM は，誤差項同士の空間的な自己相関関係をモデル化しようとするものであり，経済理論的理由よりは，測定誤差が空間的な意味で系統的に存在する等の，データの問題を処理する目的で用いられることが多い(Anselin, 2006). Dubin (1988)は，残差の空間的自己相関が生じる理由について，定量化が難しい(不可能な)効果の存在を指摘している．代表的な SEM は，空間自己回帰型(SAR)の誤差項を持つ，次式のモデル(以下，SAR 誤差モデル)である．

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{W}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3.2}$$

ここで λ は空間パラメータである．既往研究では，式(3.2)自体を指して(狭義の)SEM と呼ばれることも多い．しかしながら誤差項の空間過程のモデル化手法は他にも多数存在するため，厳密には区別することが望ましい．SAR 誤差モデルにおける $\boldsymbol{u}$ の分散共分散行列は，$E[\boldsymbol{uu}']=\sigma_\varepsilon^2(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W}')^{-1}$ で与えられる．ここで，$\boldsymbol{W}$ が，行基準化された隣接行列であるとすると，$|\lambda|<1$ のとき，レオンチェフ展開により，$(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}=\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{W}+\lambda^2\boldsymbol{W}^2+\lambda^3\boldsymbol{W}^3+\cdots$，が得られ，$\boldsymbol{W}'$ についても同様に展開すれば，分散共分散行列における逆行列の積は，$\boldsymbol{I}+\lambda(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}')+\lambda^2(\boldsymbol{WW}+\boldsymbol{WW}'+\boldsymbol{W}'\boldsymbol{W})+\cdots$，となる．すなわち，SAR 誤差モデルは，ある地点におけるショックが，他のすべての地点に波及するというグローバルな影響のモデル化につながることが分かる．他方，誤差項を移動平均型(spatial moving average (SMA)，以下，SMA 誤差モデル)$\boldsymbol{u}=\gamma\boldsymbol{W\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}$ とすると，$\boldsymbol{u}$ の分散共分散行列は，$E[\boldsymbol{uu}']=\sigma_\varepsilon^2(\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{W})(\boldsymbol{I}+\gamma\boldsymbol{W})'=\sigma_\varepsilon^2[\boldsymbol{I}+\gamma(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}')+\gamma^2\boldsymbol{WW}']$ で与えられる．明らかに，$\boldsymbol{W}$ を通した一次と $\boldsymbol{WW}'$ を通した二次の影響までしか持たず，ローカルな影響のモデル化になっていることが分かる(Fingleton, 2008)．SAR，SMA 誤差モデルにおいては，$\boldsymbol{s}_i$ の近隣集合 $\boldsymbol{s}_j\in S_i$ の個数が地点によって変わるとき，例え $\boldsymbol{\varepsilon}$ の要素が iid であったとしても必然的に分散は不均一になり，従って共分散の定常性は満足されない．定常性が満足されるのは，観測地点が格子点上で得られているといった例外的なケースのみである(堤 他, 2000b)．しかしながら，Anselin (2001) が主張する通り，この点に関する議論は，ほとんど行われていないのが現状である．Kelejian and Robinson (1993, 1995)は，パネルデータ分析(例えば，北村, 2005)で標準的に用いられる誤差構成要素モデル(error component model (ECM))を援用し，SMA に似た誤差項の構造化を行っている．また，Kelejian and Prucha (2007a)は，heteroscedasticity and autocorrelation consistent (HAC)推定量を用いて，分散共分散をノンパラメトリック推定する方法を提示している．SAR 誤差モデルは，ランダムベクトル $\boldsymbol{u}$ の同時分布としてモデル化を行うため，空間統計学の分野では，simultaneous autoregressive model と呼ばれ，近隣集合の条件付き分布に基づいてモデル化を行う conditional autoregressive model (CAR 誤差モデル)と対比して紹介されることが多い(例えば，Cressie, 1993)．CAR 誤差モデルにおいて，$\boldsymbol{s}_i$ における誤差項の条件付期待値は，$E[u_i|u_j, j\neq i]=\eta\sum_j w_{ij}u_j$ で与えられる．$\boldsymbol{W}$ の要素にいくつかの制約をつけると(Cliff and Ord, 1981, pp. 179–183)，誤差項の分散共分散行列は，$E[\boldsymbol{uu}']=\sigma^2(\boldsymbol{I}-\eta\boldsymbol{W})^{-1}$ で与えられる(Besag, 1974)．分散共分散行列の差異により，CAR 誤差モデルは SAR 誤差モデルとは異なった空間的自己相関パターンを示す(Wall, 2004; Anselin, 2006)．CAR 誤差モデルは，

階層ベイズモデルの枠組みで用いるのに便利であり(例えば，深澤 他, 2009)，特に事前分布として用いられることが多い(Hodges et al., 2003)．しかし一方で，CAR 誤差モデルでは，$\boldsymbol{W}$ が対称行列であることが求められるため行基準化が行えず，空間計量経済学の分野では用いられることは稀である．以上では，1 次のモデルのみを説明したが，複数の空間ラグを導入した高次(high-order)のモデルも，実証研究ではしばしば用いられる(例えば，Lacombe, 2004)．このとき特に，SAR 誤差モデルでは，$(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}$ によって影響が波及するため，識別の問題が生じる．パラメータ推定値のバイアスを避け，適切な識別を行うためには，重み行列の要素が，互いにオーバーラップしないことが必要となる(Anselin and Smirnov, 1996)．SAR 誤差モデルにおいて，誤差項は $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ であるため，$\boldsymbol{Y}=\lambda\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}-\lambda\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}$ と変形することができる(清水・唐渡, 2007, p. 52)．この式において $-\lambda\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}$ とおいたモデルは，空間ダービンモデル(spatial Durbin model (SDM))と呼ばれ(Anselin, 1988, pp. 226–229)，$\lambda\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{0}$ の帰無仮説の検定は，common factor 検定と呼ばれる．LeSage and Pace (2009) は，除外変数の影響緩和やパラメータの解釈の観点から，SDM の使用を薦めているが，SDM は，多重共線性の問題に悩まされることが多いのも事実である．

今，SDM に SAR 誤差を加えた，次のような一般的なモデルを考えよう．

$$\boldsymbol{Y}=\rho\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{W}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{3.3}$$

これらのすべての項を入れた場合，パラメータの識別はできない(Elhorst, 2010a)．式(3.3)から $\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}$ の項を落とした，SLM と SAR 誤差モデルの組み合わせは，一般化空間(general spatial (SAC))モデル，あるいは SARAR モデル等と呼ばれる．また，$\rho=\lambda=0$ とし，説明変数の波及効果のみを考慮したモデルは，spatial cross-regressive (SCR) モデル(Florax and Folmer, 1992)と呼ばれる．Anselin (1988) は，SAC モデルにおいて，従属変数の空間ラグと誤差項に同じ $\boldsymbol{W}$ を使用すると，識別の問題が生じると主張したが，Kelejian and Prucha (2007a) は，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$ でなければ，識別可能であることを示している(LeSage and Pace, 2009, p. 53)．以上，空間的自己相関の構造化のための地域データモデルについて述べた．これらのモデルの興味深い拡張として，Deng (2008) は，SLM に，Kyung and Ghosh (2010) は，CAR 誤差モデルに，それぞれの異方性を明示的に導入することを試みている．

ここで，以上説明した地域データモデルのパラメータ推定方法について述べたい．従属変数の空間ラグは，内生性の問題を生じさせるため，SLM における ρ の OLS 推定量は，一致性を持たず，通常不偏性も満足されない．一方，SEM のように誤差項に空間的自己相関が存在する場合，回帰係数推定量の不偏性は保たれるが，回帰係数の分散の推定量は真の分散に比べて過小に推定されることとなる．また，誤差項の分散も過小に推定されるため，これに起因して回帰係数の有意検定の際に t 値や F 値が過大評価され，決定係数も過大になる．従って，地域データモデルのパラメータ推定は，OLS によるべきではない．地域データモデルの代表的なパラメータ推定法は，最尤推定(ML)法である(Ord, 1975; Haining, 1990, 2003)．Lee (2004) は，SLM の最尤推定量が漸近的な一致性，正規性，有効性を持つことを示した．Bao and Ullah (2007) は，SLM (説明変数無) の最尤推定量の小標本特性に関するモンテカルロ実験を行っている．ML 法における問題点は，$\boldsymbol{\varepsilon}$ を $\boldsymbol{Y}$ に変換するヤコビアン(SLM：$|\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W}|$，SAR 誤差モデル：$|\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W}|$)が，時系列分析とは異なり三角行列の行列式とはならず，計算負荷が大きい点である．この点の解決策として，最も広範に用いられているのは，Ord (1975) の近似式である：$|\boldsymbol{I}-\rho\boldsymbol{W}|=\prod_{i=1}^{N}(1-\rho\varpi_i)$，$\varpi_i$ は $\boldsymbol{W}$ の固有値(SLM の例)．Ord (1975) の近似式は，その簡便性から多くの研究で用いられてきたが，サンプル数が大きくなると，固有値の算出が難しくなるという問題点が指摘されている．例えば，Kelejian and Prucha (1999) は，通常の研究者が利用可能な典型的なコンピューターでは，サンプル数 $n=3000$ を超えるような $\boldsymbol{W}$ における固有

値算出は不可能であると述べており，また Anselin (2006) は，一般的に $n>1000$ となるようなデータセットでは，固有値の計算が困難になると指摘している．これに関して，①他のヤコビアン近似手法(例えば，Martin, 1993; Griffith and Sone, 1995; Barry and Pace, 1999; Pace and LeSage, 2002, 2004)，②ヤコビアンを近似せずに直接解く方法(Pace and Barry, 1997a, 1997b; Smirnov and Anselin, 2001)，③他の推定手法，という主に 3 つの方面から代替案が模索されている．Bivand (2010) は，近年提案された複数のヤコビアン近似手法の比較分析を行っている．①，②の手法の適用により，例え大標本であっても，地域データモデルのパラメータの最尤推定は，難しくなくなってきている．しかしながら，実際には，観測データは常に ML 法に耐え得るほど十分に取得できるとは限らず，誤差項に正規分布を仮定することが難しい場合も多い．内生性の問題に対処するための代表的な計量経済学の手法は，操作変数法(instrumental variable method) である．Kelejian and Robinson (1993) は，2SLS による SLM のパラメータ推定方法を提案した．操作変数を用いた 2SLS によるパラメータ推定量は，一致性と正規性を持つが，誤差項が正規分布に従う場合，ML 法による推定量と比べて相対的に有効でないことが知られている (清水・唐渡, 2007, pp. 58–60)．しかしながら，2SLS は，計算負荷が小さく，非正規分布に対して頑健であるという長所がある (清水・唐渡, 2007, p. 57)．2SLS においては，操作変数の選定が重要になる．これについては紙面の都合上，清水・唐渡 (2007) に分かりやすい解説があることを述べるにとどめる．なお，SAR 誤差モデルに関しては，空間パラメータ λ の 2SLS 推定量が一致性を持たないため注意が必要である (Kelejian and Prucha, 1997)．2SLS と並んで用いられることが多いのが，一般化モーメント法(generalized method of moments (GMM)) である．GMM 推定量は，一致性を持ち，有効性に関しても，標本数が比較的大きな場合では，ML 推定量と大きな差はないというシミュレーション結果が得られている (清水・唐渡, 2007, pp. 63–64)．Kelejian and Prucha (1998) は，SAC モデルにおいて，空間ラグパラメータ ρ と回帰係数を 2SLS で，空間自己回帰パラメータ λ を GMM で推定する，一般化空間的 2 段階最小二乗法を提案している．この手法は，ML に比べて計算負荷が非常に小さく，誤差項の非正規性に頑健であるという利点がある．Kelejian and Prucha (2004) は，一般化空間的 2 段階最小二乗法を，連立方程式へと拡張している．LeSage (1997) は，SLM のパラメータを Markov Chain Monte Carlo (MCMC) 法を用いてベイズ推定する方法を提案している．前述のとおり，このベイズ推定法では，誤差項の分散不均一を明示的に考慮している点が特徴である．Kakamu (2009) は，SLM，SDM，SAR 誤差モデルのパラメータをベイズ推定し，小標本特性をモンテカルロ実験で分析している．

以下では，空間的異質性を考慮するためのモデルについて議論する．空間的異質性は，対象とする現象が空間上で構造的に安定しておらず (structural instability)，モデルの構造 (関数形や回帰係数，分散パラメータ) が空間的に均一でないことによって生じる．Casetti (1972) によって提案された expansion method は，回帰係数値を位置座標の関数として与える直感的な方法であり，広く実証研究で用いられてきた (例えば，堤 他, 1999)．しかしながら，このモデルでは複雑な空間パターンを表現するのは難しいという点で問題があった．Fotheringham et al. (1998) は，expansion method を自然に拡張し，カーネル関数を用いてローカルな回帰係数推定値を与える geographically weighted regression (GWR) を提案した．GWR モデルでは，地点 $\boldsymbol{s}_i$ における回帰係数ベクトルの推定量は，$\boldsymbol{\beta}_i=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{y}$ により与えられる．ここで，$N\times N$ 行列 $\boldsymbol{U}_i$ の対角成分 $u_{ij}(j=1,\ldots,N)$ は，地点 j に与えられる重みであり，ガウシアン関数等が用いられる．GWR モデルは，out-of-sample データの予測にも用いられることも多い (Harris et al., 2011)．GWR モデルについては，近年様々な拡張が行われている．理論的観点からは，回帰係数の一部を可変とする mixed-GWR (Mei et al., 2006) や，外れ値への頑健性を考慮し，リッジ回帰や M-Quantile 回帰と組み合わせる方法 (Wheeler, 2007; Salvati et al., 2011)，関数データ解析への応用(Yamanishi and Tanaka, 2003)，時空間への拡張(Huang et al., 2010)等が行われており，実証的観点からは，グリッドシステムと R 言語の統合により大規模データに対応する試み(Harris et al., 2010)等が行われている．またセミパラメトリック統計学の分野においては，GWR モデルは，varying coefficient model という名称で，セミパラメトリックモデルの一つと捉えられている(例えば，Brezger and Kneib, 2005)．一方で，分散不均一の考慮方法は，筆者らの知る限りそれほど多くはない．LeSage (1997) は，式(3.1)の SLM において，$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma_\varepsilon^2 \boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{V} = \mathrm{diag}(v_1, \ldots, v_n)$ と仮定し(diag(·) は · を成分とする対角行列を示す), Geweke (1993) の方法を用いて $\boldsymbol{V}$ の対角成分をベイズ推定する方法を提示している．また前述の通り，Kelejian and Prucha (2007a) は，関数形を特定化しないノンパラメトリック法に基づき，分散共分散行列を特定化している．

3.4 地域データモデルと空間予測

地球統計データのモデリングでは，連続な空間的領域 D において連続な空間過程／確率場を仮定するため，自然な形で予測・内挿(spatial prediction/interpolation)を行うことが可能である．一方，地域データモデルでは，D を離散的とみなし，各ユニットにおける確率変数間の空間的自己相関を空間重み行列を用いて記述するものであり，そもそも任意地点の予測は目的としていない(例えば，堤 他, 2000b)．地域データモデルにおいて予測地点の存在を考慮した場合，SWM の構造も変わるため，領域全体における空間相関関係は，予測地点を含めた全ての離散的なユニット間の自己相関関係として記述することが必要となる(Tsutsumi and Seya, 2009)．従って，地域データモデルにおいては，領域全体に弱定常性と連続性を仮定する地球統計データのモデリングとは異なり，観測地点のデータのみを用いて推定したパラメータを，予測式に単純にプラグインして予測値を求める手法は，アドホックであると考えられる．こういった背景もあり，空間計量経済学の分野においては，堤 他(2000b), Kelejian and Prucha (2007b), Kato (2008) を例外として，予測に関する研究は，ほとんど行われてこなかった．代替的なアプローチとして用いられてきたのは，予測地点におけるデータを Rubin (1976) の意味で “missing at random (MAR)” な欠損データ(missing data)として捉え，EM (expectation maximization) タイプのアルゴリズム(例えば，渡辺・山口, 2000)を用いて復元し，観測データと欠損データからなる完全データ間の自己相関関係を記述する方法である(例えば，Martin, 1984; Haining et al., 1989; LeSage and Pace, 2004a)．現状では，地域データの予測に関する研究は極めて少なく，今後の研究の蓄積が望まれる．数少ない例外として堤 他(2000b)は，データが欠損した無限格子を想定し，空間過程の弱定常性と連続性を仮定した上で，後述の移動平均誤差型のモデルを用いた内挿を行う方法を提示している．

3.5 時空間における地域データモデル

時空間確率場 $\{\boldsymbol{Y}_t(\boldsymbol{s}) : \boldsymbol{s} \in D, t \in T\}$ の実現値が，複数の空間的なユニットで時系列的に得られているとき，このデータはパネルデータと呼ばれ，空間計量経済学の分野では，空間データであることを強調して，空間パネルデータと呼ばれることが多い．パネルデータを用いることで，自由度の上昇(推定量の効率性の改善)，異質性の考慮，多重共線性の改善等が期待できる(北村, 2005). Elhorst (2003) は，標準的なパネルデータモデルである固定効果モデル，ランダム効果モデル，ランダム係数モデルを，地域データモデルに拡張している．空間パネルにおける SLM は，

$$Y_{it} = \rho \sum_{j=1}^{N} w_{ij} Y_{jt} + \boldsymbol{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \mu_i + \varepsilon_{it} . \tag{3.4}$$

で与えられる．ここで，μ_i は，時間不変な空間特有の項であり，これを固定効果とするか，変

量効果とするかは，ハウスマン検定で判断する (Elhorst, 2010b; Mutl and Pfaffermayr, 2011)．同様に，空間パネルにおける SAR 誤差モデルは，

$$Y_{it} = \boldsymbol{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \mu_i + u_{it}, \quad u_{it} = \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}u_{jt} + \varepsilon_{it}. \tag{3.5}$$

で与えられる．Elhorst (2003) は，これらのモデルのパラメータを最尤推定する方法を提示している．Baltagi et al. (2003) は，空間パネルにおける誤差項の空間的自己相関の LM 検定手法を提案しており，Baltagi et al. (2007) ではさらに，時間方向の系列相関を考慮し，空間的自己相関と時間方向の系列相関，変量効果に関する同時 LM 検定手法を提案している．通常のパネルモデル同様，空間パネルモデルの代表的パラメータ方法も，ML と GMM である．Kapoor et al. (2007) は，前述の Kelejian and Prucha (1998) を空間パネルに拡張し，パラメータの GMM 推定法を提案している．Elhorst (2010c) は，近年提案されたいくつかの空間パネルモデルのパラメータ推定手法を RMSE とバイアスの観点から比較し，N が 500 より大きい場合，計算負荷が小さい GMM 推定が有用な方法になるとしている．その他の推定法として，Kakamu and Wago (2008) は，ベイズ推定量の小標本特性について，モンテカルロ実験を用いて分析している．

さて，ここで空間モデルを，時空間モデルに拡張することは，必ずしもパラメータ推定プロセスを複雑にするとは限らないことを指摘しておきたい．例えば，次のようなモデルを想定しよう．

$$Y_{it} = \rho\sum_{j=1}^{N} w_{ij}Y_{jt-1} + \boldsymbol{x}'_{it}\beta + \mu_i + \varepsilon_{it}. \tag{3.6}$$

このモデルでは，空間ラグの内生性の問題がなくなり，誤差に時間方向の系列相関がなければ，パラメータが OLS 推定可能になる (Beck et al., 2006; Hays et al., 2010)．空間パネルモデルの詳細については，例えば，Anselin et al. (2008) を参照されたい．また，以上述べたモデルは，静学的なパネルモデルであるが，時間遅れを考慮した動学的なパネルモデルについても，近年研究が蓄積されている．これらの詳細については，Elhorst (2010a)，Lee and Yu (2010) のレビューを参照されたい．

Pace et al. (1998) は，空間パネルとは異なり，固定された観測地点を前提としない時空間線形モデル (spatio-temporal linear model (STLM)) と呼ばれるモデルを提案している．STLM は，取引場所が毎回異なる不動産データの時空間分析に用いられることが多い (Beamonte et al., 2010)．STLM においては，非常に多くの説明変数を用いることとなるが，Alberto et al. (2010) は，遺伝的アルゴリズムを用いて，効率的に変数選択を行う方法を提案している．

4. 地球統計データのモデリング

4.1 地球統計モデルと定常性

地球統計データの代表的モデルである空間過程 (spatial process) モデルは，回帰モデル $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$ における誤差項ベクトル $\boldsymbol{u}$ が従う分散共分散行列を直接構造化するという点に特徴がある．空間過程モデルでは，分散共分散行列の構造化のために，誤差項が従う分布が弱定常 (stationary) であるという仮定をおく．また，別な種類の定常性に，本質的定常性 (intrinsic stationarity) がある．本質的定常性では，$E[u(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - u(\boldsymbol{s})] = 0$ とともに，$E[u(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - u(\boldsymbol{s})]^2 = \mathrm{Var}(u(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - u(\boldsymbol{s})) = 2\gamma(\boldsymbol{h})$ が仮定される．関数 $2\gamma(\boldsymbol{h})$ は，バリオグラム (variogram)，$\gamma(\boldsymbol{h})$ 自体はセミバリオグラム (semi variogram) と呼ばれる．本質的定常性は，確率変数の差分 $u(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - u(\boldsymbol{s})$ の 1 次と 2 次のモーメントに対する仮定である．ここで，共分散関数とバリオグラムの関係は，次式のように求められる．$2\gamma(\boldsymbol{h}) = \mathrm{Var}(u(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h}) - u(\boldsymbol{s})) = 2\,[C(\boldsymbol{0}) - C(\boldsymbol{h})]$．従って，

$C(\cdot)$ が得られれば，そこから $\gamma(\cdot)$ を求めることが可能である．ただし，逆は常には成り立たない．逆を成り立たせるためには，さらに空間過程がエルゴード性(ergodicity)を持つ，すなわち $||\boldsymbol{h}|| \to \infty$ のときに，$C(\boldsymbol{h}) \to 0$ となる必要がある．これは，確率変数間の 2 点間のラグ $\boldsymbol{h}$ が非常に大きくなれば，2 点間に共分散が無くなるということを意味している．空間過程にエルゴード性を過程したとき，$\lim_{||\boldsymbol{h}||\to\infty}\gamma(\boldsymbol{h}) = C(\boldsymbol{0})$ となり，これにより，$C(\boldsymbol{h}) = \lim_{||\boldsymbol{h}||\to\infty}\gamma(\boldsymbol{h}) - \gamma(\boldsymbol{h})$ が得られる．一般的に，$\lim_{||\boldsymbol{h}||\to\infty}\gamma(\boldsymbol{h})$ は存在する必要はないが，$\lim_{||\boldsymbol{h}||\to\infty}\gamma(\boldsymbol{h})$ が存在するとき，本質的定常過程は弱定常となる．従って，本質的定常性は，必ずしも空間過程が弱定常であることを示唆するものではない．バリオグラムの特徴を示すパラメータは，ナゲット(nugget, τ^2)・レンジ(range, φ)・シル(sill, σ^2)の 3 つがある．ナゲットは，観測誤差や，観測地点間より短いところでのマイクロな変動を表す．レンジは $u\ (\boldsymbol{s})$ と $u\ (\boldsymbol{s}+\boldsymbol{h})$ が相関を持たなくなる最小のラグ $\boldsymbol{h}$ を意味し，シルはこのときのバリオグラムの値を表す．シルは，空間過程の分散であり，シルからナゲットを引いた値は，パーシャルシル(partial sill)と呼ばれる．また，$\gamma(\boldsymbol{h})$ がシルの 95% に達する距離は，有効レンジ(effective range)と呼ばれる．バリオグラムの関数形は多数提案されており，実証研究においては，spherical 型，exponential 型，Gaussian 型等が用いられることが多い．spherical 型は，レンジと有効レンジが一致するため，解釈がしやすい．Warnes (1986) は，後述する kriging 内挿において特に重要となるレンジの変化が，内挿値に及ぼす影響に関する感度分析(sensitivity analysis)を行い，exponential 型はレンジの変化に関して比較的頑健であるが，Gaussian 型は鋭敏であると述べている．ところで近年，計算機性能の飛躍的な向上に伴い，より複雑なバリオグラムを用いることが可能になってきた．例えば，Stein (1999) は，exponential 型や Gaussian 型を内包する一般系である Matérn 型の使用を薦めている．なお，地球統計データモデルの発展経緯については，間瀬(2010)等で紹介されているため，本稿では紙面の都合上省略している．

4.2 地球統計データモデル

地球統計データの代表的なモデリング手法は，以下に示す空間過程モデル(spatial process model (SPM))である．SPM は，共分散関数のパラメータベクトルを $\boldsymbol{\xi} = (\sigma^2, \tau^2, \varphi)'$ とすると，次式のように与えられる．

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} \sim (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\xi})), \tag{4.1}$$

ここで，$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\boldsymbol{H}(\varphi) + \tau^2\boldsymbol{I}$ の成分 $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$ は，前述の共分散関数で直接定式化される．ここで，推定すべきパラメータは，共分散関数のパラメータ $\boldsymbol{\xi}$ と，回帰係数 $\boldsymbol{\beta}$ である．代表的なパラメータの推定方法には，$\boldsymbol{\xi}$ を weighted least squares で，$\boldsymbol{\beta}$ を estimated generalized least squares で推定する方法(EGLS&WALS 法)(Schabenberger and Gotway, 2005, pp. 256–259)，最尤法(Mardia and Marshall, 1984)，制限付最尤法(Kitanidis, 1983)，ベイズ推定法(Banerjee et al., 2004, pp. 129–174)等がある．このうち EGLS&WALS 法については，Wackernagel (1998)，最尤推定については，丸山(2008)で詳しく解説されている．ベイズ推定においては，MCMC 法を用いたパラメータ推定における利便性から，階層モデル $\boldsymbol{Y}\,|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{W}, \tau^2 \sim N(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{W}, \tau^2\boldsymbol{I})$, $\boldsymbol{W}\,|\sigma^2, \varphi \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{H}(\varphi))$ を用いることが多い．詳しくは，Banerjee et al. (2004) を参照されたい．

空間的異質性の考慮法としては，Gelfand et al. (2003) の spatially varying coefficient model (SVCM)が存在する．SVCM では，誤差項ではなく，回帰係数に弱定常な空間過程を仮定する点が特徴である．Wheeler and Calder (2007) は，数値シミュレーション等により，GWR と比較して，SVCM の方が，推定値の精度が高いと述べている．Finley (2011) は，SVCM と GWR は非常に異なった空間パターンを示すが，SVCM のほうが正確に空間パターンを表現できることを示している．

4.3 クリギングと空間予測

空間過程モデルは，空間過程に弱定常性を仮定するため，自然な形で任意地点の値の予測（内挿）に用いることができる．この任意地点の内挿は，提案者の南アフリカの D. G. Krige にちなんで，クリギング（kriging）と呼ばれる（間瀬, 2010, p. 2）．クリギングによる予測量は，予測誤差分散最小化により合理的に求められ，任意地点の最良線形不偏予測量（best linear unbiased predictor（BLUP））を与える．ここでクリギングは，トレンド成分 $\boldsymbol{X}$ が無い場合，ordinary kriging，トレンド成分がある場合 universal kriging と呼ばれることが多いが，名称は必ずしも統一されているわけではない．Hengl et al. (2004) は，トレンド成分が経緯度座標のみである場合に universal kriging という呼び名を使い，それ以外のトレンドが存在する場合は，regression kriging (RK) と呼ぶことを提案している．RK による地点 $\boldsymbol{s}_0$ における値の予測量とクリギング分散と呼ばれる予測誤差の分散（prediction error variance）は，次式により与えられる．

$$\hat{Y}(\boldsymbol{s}_0) = x_0'\hat{\boldsymbol{\beta}}_{egls} + \hat{\boldsymbol{c}}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{egls}). \tag{4.2}$$

$$\sigma^2(\boldsymbol{s}_0) = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{c})'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{c}). \tag{4.3}$$

実データを用いた分析においては，バリオグラムの形状が方向によって異なるという異方性（anisotropy）が観察されることが少なくない．異方性には，レンジのみが方向によって異なり，シルは方位に関係なく一定である幾何学的異方性（geometric anisotropy）と，レンジは一定であるがシルが異なる帯状異方性（zonal anisotropy）の 2 種類がある（例えば，Zimmerman, 1993）．このうち幾何学的異方性については，アフィン変換等の座標変換によって比較的簡単に考慮することが可能である．すなわち，

$$[\boldsymbol{s}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} [\boldsymbol{s}]. \tag{4.4}$$

ここで，ψ は座標系の回転の角度を表すパラメータであり，δ は異方性比（anisotropy ratio）と呼ばれる，2 方向のレンジの比を表すパラメータである．帯状異方性については，バリオグラムが，等方的なバリオグラムと，より大きなシルを持つ方向に関するバリオグラムの和で与えられるという入れ子構造（nested structure）を想定したモデル化によって対処可能である．しかしながら，このようなモデル化では，空間過程の分散が 0 になってしまう場合があり（Chilès and Delfiner, 1999, p. 96），必ずしも確立された手法とはいえない．従って実際には帯状異方性が仮定されることは稀であり，通常は幾何学的異方性が存在するものとして処理されることが多い．

ところで，空間過程に対する定常性の仮定は，非常に強い仮定であるため，この仮定を緩和する努力が数多くなされている．Haas (1990, 1995) は moving window regression residual kriging (MWRRK) と呼ばれるクリギング内挿手法を提案している．これは，各内挿地点を中心とした円形の移動窓（moving window）を設定し，窓の中のサンプルのみをバリオグラムのパラメータ推定に用いるという手法であり，窓の中では共分散の定常性が満足されるとする．移動窓の大きさは，推定の安定性と，定常性のバランスで決定される．しかしながらこの手法によって求められた共分散関数の推定値は，必ずしも全地点に関する正定値行列につながらないため，アドホックであるという指摘もある（Cressie and Johannesson, 2008）．Sampson and Guttorp (1992) は，非定常領域 G を，定常領域 D に投影する deformation アプローチを提案している．投影関数としては，薄板スプラインが用いられている．しかしながら最も統計学的に洗練された手法は，畳み込みカーネルを用いるものである．今，$v(\cdot)$ をホワイトノイズ過程，$k(\cdot)$ を，カーネル関数としたとき，空間過程は，$u(\boldsymbol{s}) = \int_{\Re^2} k(\boldsymbol{r})v(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r}$ と，畳み込みカーネルを通して表現できる．畳み込みカーネルを適切に選定することで，通常のパラメトリックモデルと比

べて，よりフレキシブルな共分散関数クラスを表現でき，特に非定常な空間過程を構成するのに有用である．Higdon (1998), Higdon et al. (1999) は，$k(\boldsymbol{r})$ を $k_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{r})$ と，位置に依存する形で与えることで，非定常モデルを構築している．Fuentes (2002) は，ホワイトノイズ仮定に空間相関を導入する方法で，非定常性を考慮している．畳み込みカーネルアプローチに関する詳細については，Calder and Cressie (2007) のレビューが参考になる．空間統計学のその他の重要なトピックについては，Gelfand et al. (2010), Haining et al. (2010) を参照されたい．

4.4 時空間における地球統計データモデル

地球統計データの時空間モデルに関する理論・実証研究は，大きな発展を見せている．今，連続な時空間過程 $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s};t)$ における，時空間過程モデル $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s};t)=\mu(\boldsymbol{s};t)+u(\boldsymbol{s};t)$ を考えよう．このモデルにおいては，時間と空間の相互作用を，共分散関数を通してどのようにモデル化するかという点が問題となる．例えば，ユークリッド空間 $\Re^3$ において共分散関数を定式化するような素朴なアプローチは，性質の異なる時間と空間を同一視しているという点で問題があるだろう．最も単純な方法は，分離可能(separable)型の，時間方向と空間方向に別々に定義した共分散関数の積，あるいは和で与える方法である(Schabenberger and Gotway, 2005, p. 434)．しかしながらこれらの方法では，時間と空間の相互作用を考慮することができない．Cressie and Huang (1999), Gneiting (2002) は，時間と空間の相互作用を考慮した分離不可能(non-separable)型の様々な共分散関数を提案している．井上 他(2009) は，Cressie and Huang (1999) の共分散関数を用いたクリギング内挿(時空間クリギング)により，東京 23 区全体の地価マップを作成し，分離不可能型共分散関数を用いたクリギングの高い予測精度を示している．しかしながら時空間過程モデルでは，確率変数間の自己相関関係を共分散関数で記述するため，時間の前後関係が考慮されず，過去が将来に影響を及ぼすだけでなく，将来も過去に影響を及ぼす構造になっている．このアプローチは，空間予測の正確度(accuracy)の点では優れているが，因果律を考えれば，時間の前後関係を明示的に考慮したアプローチが望ましい場合もあろう．

Stroud et al. (2001) は，時間方向を離散と見た，時空間 $\boldsymbol{Y}_t(\boldsymbol{s})$ における状態空間モデルを構築し，カルマンフィルタによる実用的なパラメータ推定法を提案している．Delicado et al. (2010) は，空間統計モデルの関数データ解析(functional data analysis)分野への適用について，詳細なレビューを行っている．

5. おわりに

第 3 章でも述べたとおり，地域データモデルは，分析者が予め設定する重み行列 $\boldsymbol{W}$ を通して空間過程を(自己回帰型等に)モデル化することにより，通常の計量経済学の膨大な知見を援用し，モデルの特定化を行えるという点に利点がある．実際，HAC 推定量等，既往の手法の多くは時系列における計量経済モデルが空間に持ち込まれたものである．しかしながら $\boldsymbol{W}$ の特定化の誤りが，分析結果を大きく左右するという点に本質的な限界がある．

一方で地球統計モデルは，第 4 章でも述べたとおり，空間に連続性と定常性を仮定し，分散共分散行列を距離の関数で直接構造化することで，空間パターン(構造)に関する直観的な理解が可能である．しかしながら，定常性の仮定は，非常に強い仮定であるため，特に社会経済データへの適用はまだ少ないのが現状である．

第 1 章で述べた通り，両分野は，空間という同一の事象を扱っているにも関わらず，互いの文献を参照することは少ない．空間データモデリングという統合的な観点からみれば，両分野が互いの研究を取り入れながら，相互補完的に発展することで，互いの短所を補うようなモデル開発の余地は十分に残されていよう．

参 考 文 献

Alberto, I., Beamonte, A., Gargallo, P., Mateo, P. M. and Salvador, M. (2010). Variable selection in STAR models with neighborhood effects using genetic algorithms, *Journal of Forecasting*, **29** (8), 728–750.

Anselin, L. (1986). Some further notes on spatial models and regional science, *Journal of Regional Science*, **26** (4), 799–802.

Anselin, L. (1987). Spatial dependence and spatial heterogeneity, a closer look at alternative modeling approach, Working paper, Department of Geography, University of California, Santa Barbara.

Anselin, L. (1988). *Spatial Econometrics*: *Methods and Models*, Kluwer, Dordrecht.

Anselin, L. (1995). Local indicators of spatial association–LISA, *Geographical Analysis*, **27** (2), 93–115.

Anselin, L. (2001). Spatial econometrics, *A Companion to Theoretical Econometrics* (ed. B. Baltagi), 310–330, Blackwell, Oxford.

Anselin L. (2002). Under the food: Issues in the specification and interpretation of spatial regression models, *Agricultural Economics*, **27** (3), 247–267.

Anselin, L. (2006). Spatial econometrics, *Palgrave. Handbook of Econometrics*: *Volume 1* (eds. T. C. Mills and K. Patterson), 901–969, Palgrave Macmillan, Basingstoke.

Anselin, L. (2010). Thirty years of spatial econometrics, *Papers in Regional Science*, **89** (1), 3–25.

Anselin, L. and Bera, A. K. (1998). Spatial dependence in linear regression models with an introduction to spatial econometrics, *Handbook of Applied Economic Statistics* (eds. A. Ullah and D. E. Giles), 237–289, Marcel Dekker, New York.

Anselin, L. and Griffith, D. A. (1988). Do spatial effects really matter in regression analysis?, *Papers of the Regional Science Association*, **65**, 11–34.

Anselin, L. and Rey, S. J. (1991). Properties of tests for spatial dependence in linear regression models, *Geographical Analysis*, **23** (2), 112–131.

Anselin, L. and Smirnov, O. (1996). Efficient algorithms for constructing proper higher order spatial lag operators, *Journal of Regional Science*, **36** (1), 67–89.

Anselin, L., Le Gallo, J. and Jayet, H. (2008). Spatial panel econometrics, *The Econometrics of Panel Data, Fundamentals and Recent Developments in Theory and Practice* (eds. L. Matyas and P. Sevestre), 3rd ed., 627–662, Kluwer, Dordrecht.

Baltagi, B. H., Song, S. H. and Koh, W. (2003). Testing panel data regression models with spatial error correlation, *Journal of Econometrics*, **117** (1), 123–150.

Baltagi, B. H., Song, S. H., Jung, B. C. and Koh, W. (2007). Testing for serial correlation, spatial autocorrelation and random effects using panel data, *Journal of Econometrics*, **140** (1), 5–51.

Banerjee, S., Carlin, B. P. and Gelfand, A. E. (2004). *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

Bao, Y. and Ullah, A. (2007). Finite sample properties of maximum likelihood estimator in spatial models, *Journal of Econometrics*, **137** (2), 396–413.

Barry, R. P. and Pace, R. K. (1999). Monte Carlo estimates of the log determinant of large sparse matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **289** (1), 41–54.

Beamonte, A., Gargallo, P. and Salvador, M. (2010). Analysis of housing price by means of STAR models with neighborhood effects: A Bayesian approach, *Journal of Geographical Systems*, **12** (2), 227–240.

Beck, N., Gleditsch, K. S. and Beardsley, K. (2006). Space is more than geography: Using spatial econometrics in the study of political economy, *International Studies Quarterly*, **50** (1), 27–44.

Besag, J. (1974). Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems (with discussion), *The Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **36**(2), 192–236.

Bhattacharjee, A. and Jensen-Butler, C. (2006). Estimation of spatial weights matrix, with an application to diffusion in housing demand, Working Paper, School of Economics and Finance, University of St. Andrews, U.K.

Bivand, R. (2010). Computing the Jacobian in spatial models: An applied survey, NHH Department of Economics Discussion Paper No. 20/2010, Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1680467.

Brezger, A. and Kneib, R. (2005). BayesX: Analyzing Bayesian structured additive regression models, *Journal of Statistical Software*, **14**(11).

Brueckner, J. K. (2003). Strategic interaction among governments: An overview of empirical studies, *International Regional Science Review*, **26**(2), 175–188.

Calder, C. A. and Cressie, N. A. C. (2007). Some topics in convolution-based spatial modeling, *Proceedings of the 56th Session of the International Statistics Institute, Lisbon, Portugal, August 22–29, 2007.*

Casetti, E. (1972). Generating models by the expansion method: applications to geographic research, *Geographical Analysis*, **4**(1), 81–91.

Chilès, J. P. and Delfiner, P. (1999). *Geostatistics, Modeling Spatial Uncertainty*, Wiley, New York.

Cliff, A. and Ord, J. K. (1981). *Spatial Processes*: *Methods and Applications*, Pion, London.

Corrado, L. and Fingleton, B. (2011). Where is the economics in spatial econometrics?, *Journal of Regional Science* (forthcoming).

Cressie, N. A. C. (1993). *Statistics for Spatial Data*, Revised ed., Wiley, New York.

Cressie, N. A. C. and Huang, H.-C. (1999). Classes of nonseparable, spatio-temporal stationary covariance functions, *Journal of the American Statistical Association*, **94**(448), 1330–1340.

Cressie, N. A. C. and Johannesson, G. (2008). Fixed rank kriging for very large spatial data sets, *Journal of the Royal Statistical Society*, **70**(1), 209–226.

Cressie, N. A. C. and Wikle, C. K. (2011). *Statistics for Spatio-temporal Data*, Wiley, New York.

Delicado, P., Giraldo, R., Comas, C. and Mateu, J. (2010). Statistics for spatial functional data: Some recent contributions, *Environmetrics*, **21**(3–4), 224–239.

Deng, M. (2008). An anisotropic model for spatial processes, *Geographical Analysis*, **40**(1), 26–51.

Diggle, P. J. (2003). *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*, 2nd ed., Arnold, London.

Dubin, R. A. (1988). Estimation of regression coefficient in the presence of spatially autocorrelated error terms, *The Review of Economics and Statistics*, **70**(3), 466–474.

Elhorst, J. P. (2003). Specification and estimation of spatial panel data models, *International, Regional Science Review*, **26**(3), 244–268.

Elhorst, J. P. (2010a). Applied spatial econometrics: Raising the bar, *Spatial Economic Analysis*, **5**(1), 9–28.

Elhorst, J. P. (2010b). Spatial panel data models, *Handbook of Applied Spatial Analysis* (eds. M. M. Fischer and A. Getis), 377–407, Springer-Verlag, Berlin.

Elhorst, J. P. (2010c). Dynamic panels with endogenous interaction effects when T is small, *Regional Science and Urban Economics*, **40**(5), 272–282.

Fingleton, B. (1999). Spurious spatial regression: Some Monte Carlo results with a spatial unit root and spatial cointegration, *Journal of Regional Science*, **39**(1), 1–19.

Fingleton, B. (2008). A generalized method of moments estimator for a spatial model with moving average errors, with application to real estate prices, *Empirical Economics*, **34**(1), 35–57.

Fingleton, B. (2009). Spatial autoregression, *Geographical Analysis*, **41**(4), 385–391.

Finley, A. O. (2011). Comparing spatially-varying coefficients models for analysis of ecological data with non-stationary and anisotropic residual dependence, *Methods in Ecology and Evolution*,

2(2), 143–154.

Florax, R. J. G. M. and Folmer, H. (1992). Specification and estimation of spatial linear regression models: Monte Carlo evaluation of pre-test estimators, *Regional Science and Urban Economics*, **22**(3), 405–432.

Florax, R. J. G. M. and de Graaff, T. (2004). "The performance of diagnostic tests for spatial dependence in linear regression models: A meta-analysis of simulation studies, *Advances in Spatial Econometrics* (eds. L. Anselin, R. J. G. M. Florax and S. J. Rey), 29–65, Springer-Verlag, Berlin.

Folmer, H. and Oud, J. (2008). How to get rid of W: A latent variables approach to modelling spatially lagged variables, *Environment and Planning A*, **40**(10), 2526–2538.

Fotheringham, A. S., Brunsdon, C. and Charlton, M. E. (1998). Geographically weighted regression: A natural evolution of the expansion method for spatial data analysis, *Environment and Planning A*, **30**(11), 1905–1927.

Fotheringham, A. S., Brunsdon, C. and Charlton, M. E. (2002). *Geographically Weighted Regression: The Analysis of Spatially Varying Relationships*, Wiley, Chichester.

Fuentes, M. (2002). Spectral methods for nonstationary spatial processes, *Biometrika*, **89**(1), 197–210.

深澤圭太，石濱史子，小熊宏之，武田知己，田中信行，竹中明夫(2009). 条件付自己回帰モデルによる空間自己相関を考慮した生物の分布データ解析，日本生態学会誌，**59**(2), 171–186.

Geary, R. C. (1954). The contiguity ratio and statistical mapping, *The Incorporated Statistician*, **5**(3), 115–145.

Gelfand, A. E., Kim, H.-J., Sirmans, C. F. and Banerjee, S. (2003). Spatial modeling with spatially varying coefficient processes, *Journal of the American Statistical Association*, **98**(462), 387–396.

Gelfand, A. E., Diggle, P. J., Fuentes, M. and Guttorp, P. (eds.) (2010). *Handbook of Spatial Statistics*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

Getis, A. (2007). Reflections on spatial autocorrelation, *Regional Science and Urban Economics*, **37**(4), 491–496.

Getis, A. and Aldstadt, J. (2004). Constructing the spatial weights matrix using a local statistic, *Geographical Analysis*, **36**(2), 90–104.

Getis, A. and Ord, J. K. (1992). The analysis of spatial association by use of distance statistics, *Geographical Analysis*, **24**(3), 189–199.

Geweke, J. (1993). Bayesian treatment of the independent student-t linear model, *Journal of Applied Econometrics*, **8**(S1), 19–40.

Gneiting, T. (2002). Nonseparable stationary covariance functions for space-time data, *Journal of the American Statistical Association*, **97**(458), 590–600.

Gotway, C. A. and Young, L. J. (2002). Combining incompatible spatial data, *Journal of the American Statistical Association*, **97**(458), 632–648.

Griffith, D. A. (1996). Some guidelines for specifying the geographic weights matrix contained in spatial statistical models, *Practical Handbook of Spatial Statistics* (ed. S. L. Arlinghaus), 65–82, CRC Press, Inc., Boca Raton.

Griffith, D. A. (2006). Hidden negative spatial autocorrelation, *Journal of Geographical System*, **8**(4), 335–355.

Griffith, D. A. and Paelinck, J. H. P. (2010). *Non-standard Spatial Statistics and Spatial Econometrics*, Springer-Verlag, Berlin.

Griffith, D. A. and Sone, A. (1995). Trade-offs associated with normalizing constant computational simplications for estimating spatial statistical models, *Journal of Statistical Computation and*

Simulation, **51**, 165–183.

Haas, T. C. (1990). Lognormal and moving window methods of estimating acid deposition, *Journal of the American Statistical Association*, **85**(412), 950–963.

Haas, T. C. (1995). Local prediction of a spatio–temporal process with an application to wet sulfate deposition, *Journal of the American Statistical Association*, **90**(432), 1189–1199.

Haining, R. (1990). *Spatial Data Analysis in the Social and Environmental Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge.

Haining, R. (2003). *Spatial Data Analysis*: *Theory and Practice*, Cambridge University Press, Cambridge.

Haining, R., Griffith, D. A. and Benett, D. (1989). Maximum likelihood with missing spatial data and with an application to remotely sensed data, *Communications in Statistics Theory and Methods*, **18**(5), 1875–1894.

Haining, R. P., Kerry, R. and Oliver, M. A. (2010). Geography, spatial data analysis, and geostatistics: An overview, *Geographical Analysis*, **42**(1), 7–31.

Harris, R., Singleton, A., Grose, D., Brunsdon, C. and Longley, P. (2010). Grid-enabling geographically weighted regression: A case study of participation in higher education in England, *Transactions in GIS*, **14**(1), 43–61.

Harris, P., Brunsdon, C. and Fotheringham, A. S. (2011). Links, comparisons and extensions of the geographically weighted regression model when used as a spatial predictor, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **25**(2), 123–138.

Hays, J. C., Kachi, A. and Franzese, Jr., R. J. (2010). A spatial model incorporating dynamic, endogenous network interdependence: A political science application, *Statistical Methodology*, **7**(3), 406–428.

Hengl, T., Heuvelink, G. B. M. and Stein, A. (2004). A generic framework for spatial prediction of soil variables based on regression-kriging, *Geoderma*, **120**(1–2), 75–93.

Higdon, D. (1998). A process-convolution approach to modeling temperatures in the North Atlantic Ocean, *Journal of Environmental and Ecological Statistics*, **5**(2), 173–190.

Higdon, D. M., Swall, J. and Kern, J. (1999). Non-stationary spatial modeling, *Bayesian Statistics 6* (eds. J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. David and A. F. M. Smith), 761–768, Oxford University Press, Oxford.

Hodges, J. S., Carlin, B. P. and Fan, Q. (2003). On the precision of the conditionally autoregressive prior in spatial models, *Biometrics*, **59**(2), 317–322.

Huang, B., Wu, B. and Barry, M. (2010). Geographically and temporally weighted regression for modeling spatio-temporal variation in house prices, *International Journal of Geographical Information Science*, **24**(3), 383–401.

井上 亮，清水英範，吉田雄太郎，李勇鶴(2009). 時空間クリギングによる東京 23 区・全用途地域を対象とした公示地価の分布と変遷の視覚化，GIS ― 理論と応用，**17**(1), 13–24.

Kakamu, K. (2009). Small sample properties and model choice in spatial models: A Bayesian approach, *Far East Journal of Applied Mathematics*, **34**(1), 31–56.

Kakamu, K. and Wago, H. (2008). Small-sample properties of panel spatial autoregressive models: Comparison of the Bayesian and maximum likelihood methods, *Spatial Economic Analysis*, **3**(3), 305–319.

Kapoor, M., Kelejian, H. H. and Prucha, I. R. (2007). Panel data models with spatially correlated error components, *Journal of Econometrics*, **140**(1), 97–130.

Kato, T. (2008). A further exploration into the robustness of spatial autocorrelation specifications, *Journal of Regional Science*, **48**(3), 615–639.

Kelejian, H. H. and Prucha, I. R. (1997). Estimation of spatial regression models with autoregressive errors by two–stage least squares procedures: A serious problem, *International Regional Science Review*, **20**(1), 103–111.

Kelejian, H. H. and Prucha, I. R. (1998). A generalized spatial two–stage least squares procedure for estimating a spatial autoregressive model with autoregressive disturbances, *Journal of Real Estate Economics*, **17**(1), 99–121.

Kelejian, H. H. and Prucha, I. R. (1999). A generalized moments estimator for the autoregressive parameter in a spatial model, *International Economic Review*, **40**(2), 509–533.

Kelejian, H. H. and Prucha, I. R. (2004). Estimation of simultaneous systems of spatially interrelated cross sectional equations, *Journal of Econometrics*, **118**(1–2), 27–50.

Kelejian, H. H. and Prucha, I. R. (2007a). HAC estimation in a spatial framework, *Journal of Econometrics*, **140**(1), 131–154.

Kelejian, H. H. and Prucha, I. R. (2007b). The relative efficiencies of various predictors in spatial models containing spatial lags, *Regional Science and Urban Economics*, **37**(3), 283–432.

Kelejian, H. H. and Robinson, D. P. (1992). Spatial autocorrelation: A new computationally simple test with an application to per capita country police expenditures, *Regional Science and Urban Economics*, **22**(3), 317–331.

Kelejian, H. H. and Robinson, D. P. (1993). A suggested method of estimation for spatial interdependent models with autocorrelated errors, and an application to a county expenditure model, *Papers in Regional Science*, **72**(3), 297–312.

Kelejian, H. H. and Robison, D. P. (1995). Spatial correlation: A suggested alternative to the autoregressive model, *New Directions in Spatial Econometrics* (eds. L. Anselin and R. J. G. M. Florax), 75–95, Spriger-Verlag, Berlin.

北村行伸(2005).『パネルデータ分析』, 岩波書店, 東京.

Kitanidis, P. K. (1983). Statistical estimation of polynomial generalized covariance functions and hydrological applications, *Water Resources Research*, **19**(4), 909–921.

Kostov, P. (2010). Model boosting for spatial weighting matrix selection in spatial lag models, *Environment and Planning B*, **37**(3), 533–549.

Kyriakidis, P. C. (2004). A geostatistical framework for area-to-point spatial interpolation, *Geographical Analysis*, **36**(3), 259–289.

Kyung, M. and Ghosh, S. K. (2010). Maximum likelihood estimation for directional conditionally autoregressive models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**(11), 3160–3179.

Lacombe, D. J. (2004). Does econometric methodology matter? An analysis of public policy using spatial econometric techniques, *Geographical Analysis*, **36**(2), 105–118.

Lee, L. F. (2004). Asymptotic distributions of quasi-maximum likelihood estimators for spatial autoregressive models, *Econometrica*, **72**(6), 1899–1925.

Lee, L. F. and Yu, J. (2010). Some recent developments in spatial panel data models, *Regional Science and Urban Economics*, **40**(5), 255–271.

Leenders, R. T. A. J. (2002). Modeling social influence through network autocorrelation: Constructing the weight matrix, *Social Networks*, **24**(1), 21–47.

LeSage, J. P. (1997). Bayesian estimation of spatial autoregressive models, *International Regional Science Review*, **20**(1), 113–131.

LeSage, J. P. and Pace, R. K. (2004a). Models for spatially dependent missing data, *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, **29**(2), 233–254.

LeSage, J. P. and Pace, R. K. (2009). *Introduction to Spatial Econometrics*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

LeSage, J. P. and Pace, R. K. (2010). The biggest myth in spatial econometric, Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1725503.

Lin, G. (2004). Comparing spatial clustering tests based on rare to common spatial events, *Computers, Environment and Urban Systems*, **28**(6), 691–699.

Mardia, K. V. and Marshall, R. J. (1984). Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression, *Biometrika*, **71**(1), 135–146.

Martin, R. J. (1984). Exact maximum likelihood for incomplete data from a correlated Gaussian process, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **13**(10), 1275–1288.

Martin, R. J. (1993). Approximation to the determinant term in Gaussian maximum likelihood estimation of some spatial models, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **22**(1), 189–205.

丸山祐造(2008). 空間統計学入門,『GIS の理論』(村山祐司,柴崎亮介 編),朝倉書店,東京.

間瀬 茂(2010). 『地球統計学とクリギング法』,オーム社,東京.

間瀬 茂,武田 純(2001). 『空間データモデリング』,共立出版,東京.

間瀬 茂,尾形良彦,種村正美(1992). 点配置データの統計—理論と応用の現状—,数学,**44**(3), 193–204.

Mei, C. L., Wang, N. and Zhang, W. X. (2006). Testing the importance of the explanatory variables in a mixed geographically weighted regression model, *Environment and Planning A*, **38**(3), 587–598.

Moran, P. A. (1950). A test for the serial dependence of residuals, *Biometrika*, **37**, 178–181.

Mutl, J. and Pfaffermayr, M. (2011). The Hausman test in a Cliff and Ord panel model, *The Econometrics Journal*, **14**(1), 48–76.

Ord, J. K. (1975). Estimation methods for models of spatial interaction, *Journal of American Statistical Association*, **79**(349), 120–126.

Pace, R. K. and Barry, R. (1997a). Quick computation of spatial autoregressive estimators, *Geographical Analysis*, **29**(3), 232–246.

Pace, R. K. and Barry, R. (1997b). Sparse spatial autoregressions, *Statistics and Probability Letters*, **33**(3), 291–297.

Pace, R. K. and LeSage, J. P. (2002). Semiparametric maximum likelihood estimates of spatial dependence, *Geographical Analysis*, **34**(1), 76–90.

Pace, R. K. and LeSage, J. P. (2004). Chebyshev approximation of log-determinants of spatial weight matrices, *Computational Statistics and Data Analysis*, **45**(2), 179–196.

Pace, R. K., Barry, R., Clapp, J. M. and Rodriguez, M. (1998). Spatiotemporal autoregressive models of neighborhood effects, *The Journal of Real Estate Finance & Economics*, **17**(1), 15–33.

Paelinck, J. and Klaassen, L. (1979). *Spatial Econometrics*, Saxon House, Farnborough.

Páez, A., Scott, D. M. and Volz, E. (2008). Weight matrices for social influence analysis: An investigation of measurement errors and their effect on model identification and estimation quality, *Social Networks*, **30**(4), 309–317.

Rogerson, P. A. (1999). The Detection of clusters using a spatial version of the chi-square goodness-of-fit statistic, *Geographical Analysis*, **31**(2), 130–147.

Rubin, D. B. (1976). Inference with missing data, *Biometrika*, **63**(3), 581–592.

Salvati, N., Tzavidis, N., Pratesi, M. and Chambers, R. (2011). Small area estimation via M-quantile geographically weighted regression, *TEST* (forthcoming).

Sampson, P. D. and Guttorp, P. (1992). Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structure, *Journal of the American Statistical Association*, **87**(417), 108–119.

Schabenberger, O. and Gotway, C. A. (2005). *Statistical Methods for Spatial Data Analysis*, Chapman & Hall/CRC, Bacon Raton.

Seya, H., Tsutsumi, M. and Yamagata, Y. (2011). Income convergence in Japan: A Bayesian spatial Durbin model approach, *Economic Modelling* (forthcoming).

清水千弘，唐渡広志(2007).『不動産市場の計量経済分析』，朝倉書店，東京.

Smirnov, O. and Anselin, L. (2001). Fast maximum likelihood estimation of very large spatial autoregressive models: A characteristic polynomial approach, *Computational Statistics & Data Analysis*, **35**(3), 301–319.

Smith, T. E. (2009). Estimation bias in spatial models with strongly connected weight matrices, *Geographical Analysis*, **41**(3), 307–332.

Stakhovych, S. and Bijmolt, T. H. A. (2008). Specification of spatial models: A simulation study on weights matrices, *Papers in Regional Science*, **88**(2), 389–408.

Stein, M. L. (1999). *Interpolation of Spatial Data*: *Some Theory for Kriging*, Springer-Verlag, New York.

Stroud, J. R., Müller, P. and Sansó, B. (2001). Dynamic models for spatiotemporal data, *Journal of the Royal Statistical Society*: *Series B*, **63**(4), 673–689.

種村正美(2005). マルコフ連鎖モンテカルロ法の空間統計への応用,『計算統計 II (統計科学のフロンティア 12)』(甘利俊一，竹内　啓，竹村彰通，伊庭幸人 編)，107–152, 岩波書店，東京.

Tobler, W. (1979). Cellular geography, *Philosophy in Geography* (eds. S. Gale and G. Olsson), 379–386, Reidel, Dordrecht.

塚井誠人(2005). 空間統計モデルのフロンティア，土木計画学研究・論文集，**22**(2), 1–13.

Tsutsumi, M. and Seya, H. (2009). Hedonic approaches based on spatial econometrics and spatial statistics: Application to evaluation of project benefits, *Journal of Geographical Systems*, **11**(4), 357–380.

堤　盛人，清水英範，井出裕史(1999). 誤差項の仮定からの違背が空間データを用いた回帰分析の結果に及ぼす影響—地価回帰モデルによる実証研究，GIS—理論と応用，**7**(1), 19–26.

堤　盛人，清水英範，井出裕史(2000a). 空間的自己相関を記述するための重み行列の構造が分析結果に及ぼす影響，土木計画学研究・論文集，**17**, 321–325.

堤　盛人，清水英範，井出裕史(2000b). 誤差要素モデルに基づく Kriging を用いた空間内挿，応用力学論文集，**3**, 125–132.

Wackernagel, H. (1998). *Multivariate Geostatistics*: *An Introduction with Applications*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin (地球統計学研究会 監訳(2003).『地球統計学』(青木謙治 訳編)，森北出版，東京).

Wall, M. M. (2004). A close look at the spatial structure implied by the CAR and SAR models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **121**(2), 311–324.

Warnes, J. J. (1986). A sensitivity analysis for universal kriging, *Mathematical Geology*, **18**(7), 653–676.

渡辺美智子，山口和範(2000). 『EM アルゴリズムと不完全データの諸問題』，多賀出版，東京.

渡辺　理，樋口洋一郎(2005). ネットワーク自己相関分析：モバイル IT システム利用行動における連携利用パターンの把握と活用に関する考察，情報処理学会論文誌，**46**(5), 1222–1232.

Wheeler, D. C. (2007). Diagnostic tools and a remedial method for collinearity in geographically weighted regression, *Environment and Planning A*, **39**(10), 2464–2481.

Wheeler, D. C. and Calder, C. A. (2007). An assessment of coefficient accuracy in linear regression models with spatially varying coefficients, *Journal of Geographical Systems*, **9**(2), 145–166.

Whittle, P. (1954). On stationary process in the plane, *Biometrika*, **41**(3-4), 434–449.

Yamanishi, Y. and Tanaka, Y. (2003). Geographically weighted functional multiple regression analysis: A numerical investigation, *Journal of Japanese Society of Computational Statistics*, **15**(2), 307–317.

Yoo, E.-H. and Kyriakidis, P. C. (2009). Area-to-point Kriging in spatial hedonic pricing models, *Journal of Geographical Systems*, **11**(4), 381–406.

Zimmerman, D. L. (1993). Another look at anisotropy in geostatistics, *Mathematical Geology*, **25**(4), 453–470.

Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics Vol. 60, No. 1, 3–25 (2012) 25

Basics of Applied Spatial Statistics: Spatial Statistics and Spatial Econometrics

Morito Tsutsumi[1] and Hajime Seya[2]

[1]Division of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba
[2]National Institute for Environmental Studies Center for Global Environmental Research

Applied spatial statistics mainly involves applying spatial statistics and spatial econometrics, both of which provide excellent tools for modeling geospatial data. Spatial statistics, which includes elements of geostatistics, originated in mining engineering, and spatial econometrics originated in regional science. Thus, both these fields of study developed independently of each other. However, the recent diffusion of geographic information systems (GIS) has provided researchers with access to detailed spatial datasets and allowed them, for example, to apply spatial statistics to socioeconomic data.

This paper reviews the different modeling techniques used in spatial statistics and spatial econometrics and discusses the similarities and differences among them. It also discusses the possible future direction of these fields. First, the two characteristic properties of spatial data, spatial autocorrelation and spatial heterogeneity, are explained, and the methods used to detect these properties are reviewed. Second, the differences between the two fields are highlighted, especially the differences in regard to how target space is grasped. These differences are characterized by discussing, in detail, the roles of the so-called spatial weight matrix in spatial econometrics and prediction (spatial interpolation) in spatial statistics; relevant examples are provided. Third, the possible future application of these fields to spatio-temporal data is discussed.

Key words: Spatial statistics, spatial econometrics, spatial weight matrix, stationarity, prediction.