統計数理（2011）
第 59 巻 第 1 号 125–140

特集「金融リスクの統計解析」
［研究詳解］

拡散型確率過程の推定における極限定理

吉田 朋広[†]

（受付 2010 年 10 月 15 日；改訂 2011 年 6 月 1 日；採択 6 月 1 日）

要　　旨

拡散型確率過程の統計的推定を，極限定理の観点から議論する．疑似尤度解析，非同期共分散推定について解説し，新しい話題にも言及する．

キーワード： 拡散，ボラティリティ，非同期共分散推定，漸近混合正規性，マルチンゲール漸近展開．

1. 拡散係数の推定

d 次元確率過程 $X=(X_t)_{t\in[0,T]}$ が確率微分方程式

$$\begin{cases} dX_t = a_t dt + b_t dw_t, & t\in[0,T] \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

を満たすとする．ここで，$w=(w_t)_{t\in[0,T]}$ は r 次元標準 Wiener 過程，$a=(a_t)_{t\in[0,T]}$, $b=(b_t)_{t\in[0,T]}$ は発展的可測(progressively measurable)で，それぞれ $\mathbb{R}^d$-値, $\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^{\mathsf{r}}$-値であり，$\int_0^T(|a_t|+|b_t|^2)dt<\infty$ a.s. が成り立つものとする．a_t をドリフト係数，b_t を拡散係数と呼ぶ．観測 $(X_{t_j})_{j=0,1,\dots,N(n)}$ を得たときに a や b に関する未知の量をデータから推定することが統計の問題になる．ここで，$(t_j)_{j=0,1,\dots,N(n)}$ は離散的な観測時点を表し，$0=t_0<t_1<\cdots<t_{N(n)}=T$ とする．統計量の性質を調べるとき，漸近論に訴えることになり，$n\in\mathbb{N}$ はその近似の度合いを決める既知のパラメータである．観測時点 t_j は n にも依存しており，t_j^n と書くべきであるが，記号が煩雑になるので，t_j と略記する．一般に t_j^n と t_j^{n+1} は異なり，t_j と書いても，異なった n に対しては異なった値を表す．同様に，T も一般に n に依存し，さらに状況によっては a と b も n に依存する．

例 1. $X_t=\sqrt{\theta}w_t$, $t_j=j/n$, $T=1$ とする．$\theta\in(0,\infty)$ が未知の統計パラメータであるとして，データ $(X_{j/n})_{j=0,1,\dots,n}$ から θ を推定したい. (1.1) において $a_t=0$, $b_t=\sqrt{\theta}$, $x_0=0$ の状況である．パラメータの真値を θ^* とするとき，統計量 $\hat\theta_n=\sum_{j=1}^n(X_{j/n}-X_{(j-1)/n})^2$ に対して，

$$\begin{aligned}\hat\theta_n-\theta^* &= \theta^*\sum_{j=1}^n\left\{\left(w_{\frac{j}{n}}-w_{\frac{j-1}{n}}\right)^2-\frac{1}{n}\right\} \\ &= \frac{\theta^*}{n}\sum_{j=1}^n\left\{\left(\sqrt{n}\left(w_{\frac{j}{n}}-w_{\frac{j-1}{n}}\right)\right)^2-1\right\}\end{aligned} \tag{1.2}$$

となり，右辺は平均 0 の独立確率変数列(三角列)であるから，大数の法則によって，$\hat\theta_n\to^p\theta^*$ $(n\to\infty)$ となることがわかる．つまり $\hat\theta_n$ は θ の一致推定量である．さらに，偏差の表示(1.2)

[†] 東京大学大学院 数理科学研究科：〒153–8914 東京都目黒区駒場 3–8–1

から，中心極限定理によって，推定量の漸近正規性 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta^*)\to^d N(0,2(\theta^*)^2)$ $(n\to\infty)$ も得られる．この例の場合 $b_t=\sqrt{\theta}$ であるから，θ は拡散係数の 2 乗積分 $\theta=\int_0^1 b_t^2dt$ である．

例 1 のように，確率過程の推定量の漸近挙動，とくに分散構造のそれにまつわる極限定理について議論するのが本小論の目的である．当然のことながら，統計量の分布に関する情報が統計推測において重要である．統計量の極限分布はその情報の一部にすぎず，例えば，(極限に行く手前の) 統計量の裾確率のより詳細な情報なしには統計学の標準的な問題すら扱う事はできない．この意味で，本稿の呼ぶ極限定理は，とくに前半では，確率論での意味より広く，統計モデルの有り様から漸近決定論的議論を経て得られる統計量の漸近挙動を含んでいる．いっぽう後半では，確率過程の統計学を動機とするが，狭義の極限定理としても (つまり統計学的観点を離れても) 新しいものを幾つか紹介しようと思う．ただし，すべての結果が統計学の問題を解決することを目的としていることは本文中に述べる通りである．

2.　いろいろな漸近近似

式 (1.1) を満たす拡散型確率過程 $X=(X_t)_{t\in[0,T]}$ を考える．アイデアを明確にするためにパラメトリックの場合を考える．すなわち，

$$a_t=a(X_t,\theta_2),\quad b_t=b(X_t,\theta_1) \tag{2.1}$$

と，a_t，b_t が未知パラメータ θ_2,θ_1 をそれぞれ含む適当な関数 a，b で表現されているとする．θ_1，θ_2 のパラメータ空間をそれぞれ $\Theta_1\subset\mathbb{R}^{m_1}$, $\Theta_2\subset\mathbb{R}^{m_2}$ とする．確率過程 $(X_{t_j})_{j=0,1,\dots,n}$ の実際の観測 $(x_{t_j})_{j=0,1,\dots,n}$ に対して推定を行うために，確率モデルのどのような近似 (漸近論) に基づいて統計量を作ればよいかという問いに答えはない．ベイズ法のように小標本における最適性を根拠にすることは可能であるが，確率過程の推移確率は多くの場合クローズドフォームがないので尤度の近似が介在するし，誤差評価や事前分布の問題もある[1)]．統計量はデータの変換であるが，定義が明確でその構造が理論的に解析でき，何らかの合理性 (たとえば一致性) を満たす変換であることが望ましい．どのような近似が良い近似であるかは，個々のケースにより，データが予測を通じ選択するか，統計学以外の考察によって決定される．

我々のモデルにおいては，$T\to\infty$ であるか，T が固定であるかによって，近似法が 2 つに大別される．$T\to\infty$ のケースでは，多くの場合システム中の適当な要素にエルゴード性が仮定される．一致性のない推定量は，データを多く観測することの是非が判断できないから，推定量の一致性は前提とされる．その源泉が大数の法則であるから，エルゴード性は理論の側からは自然な要求である[2)]．

サンプリングスキームとして基本的なのは，等間隔の正則サンプリング $t_j=jT/n$ である．$h=h_n=T/n$ と表す．$h\to 0$ のときスキームは高頻度であるといい，そうでないとき低頻度であるという．低頻度の場合は，粗い意味で離散時間非線形時系列解析の対象と認識できるが，正確には連続時間モデルの局所特性量を離散時間時系列の特性量に関係づけて推論するところが常に問題となるので，それはむしろ連続時間のブランチであり，狭義の離散時間非線形時系列解析とは別のものである．ただし，推定量の最適収束率は高頻度と低頻度では異なるので，連続時間の範疇でもこの両者の区別は必要である．ここでは漸近的に確率過程の局所構造が直接的に見えてくる高頻度の場合を以後扱うことにする．

3.　疑似尤度解析：長期観測

$T=T_n\to\infty(n\to\infty)$ の場合を考える．我々のモデルは (1.1), (2.1) で，高頻度正則サンプリングを想定している．確率過程 X はマルコフ型であるが，推移確率の陽表現は一般論として

は期待できない．しかしながら，スキームの高頻度特性を利用すると，疑似尤度解析が有効な手段であることが明らかになる．$B(x,\theta_1)=bb'(x,\theta_1)$ は (x,θ_1) に関して一様に最小固有値が正(一様楕円的)であるとする．疑似尤度のうち最も基本的なものは局所ガウス近似に基づく次の関数である：

$$p_n(\boldsymbol{x}_n,\theta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(2\pi h)^{d/2}|B(X_{t_{j-1}},\theta_1)|^{1/2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2h}B(X_{t_{j-1}},\theta_1)^{-1}\left[(\Delta_j X - ha(X_{t_{j-1}},\theta_2))^{\otimes 2}\right]\right). \tag{3.1}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_n=(X_{t_j})_{j=0,1,\dots,n}$，$\Delta_j X = X_{t_j}-X_{t_{j-1}}$ である．

X がミキシング条件を満足すると仮定する：ある正定数 a に対して，

$$\alpha_X(h) \le \mathsf{a}^{-1}e^{-\mathsf{a}h} \qquad (h>0).$$

ここで，

$$\alpha_X(h) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \sup_{\substack{A\in\sigma[X_r;r\le t],\\ B\in\sigma[X_r;r\ge t+h]}} |P_{\theta^*}[A\cap B]-P_{\theta^*}[A]P_{\theta^*}[B]|.$$

疑似尤度関数 p_n に対して統計的確率場 $\mathbb{H}_n$ を

$$\mathbb{H}_n(\theta_1,\theta_2)=\log\left\{(2\pi h)^{nd/2}p_n(\boldsymbol{x}_n,\theta)\right\} \tag{3.2}$$

と定める．パラメータ $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ の真の値を $\theta^*=(\theta_1^*,\theta_2^*)$ で表す．$\mathbb{Y}(\theta_1;\theta^*)$ を

$$\mathbb{Y}(\theta_1;\theta^*) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left\{\mathrm{Tr}\left(B(x,\theta_1)^{-1}B(x,\theta_1^*)-I_d\right)+\log\frac{|B(x,\theta_1)|}{|B(x,\theta_1^*)|}\right\}\nu(dx)$$

と定義する．ただし，ν は θ^* に対応する X の不変確率測度である．拡散とドリフトの局所的な大きさを考えると，(3.1) における $\Delta_j X - ha(X_{t_{j-1}},\theta_2)$ の主要項は $\Delta_j X$ であり，さらに，確率過程の増分 2 乗和が分散行列に収束すること (例 1 あるいは (5.1) 参照) を思えば，(3.1) に関する対数尤度比 $\log p_n(\boldsymbol{x}_n,\theta)/p_n(\boldsymbol{x}_n,\theta^*)$ に対して，スケーリング極限をとると，$\mathbb{Y}(\theta_1;\theta^*)$ の式の形が現れることがわかる．あるいは，正規多変量解析からの類推でこの関数形が現れることは明らかであろう．次の分離条件は緩い仮定である：ある正数 $\chi(\theta^*)$ に対して，

$$\mathbb{Y}(\theta_1;\theta^*) \le -\chi(\theta^*)|\theta_1-\theta_1^*|^2 \qquad (\forall\theta_1\in\Theta_1).$$

非線形時系列モデルに対して，Ibragimov-Has′minskiĭのプログラム[3)]の適用可能性を示したのは Yu. Kutoyants である．その際，問題は尤度比確率場に対する大偏差不等式の証明に集約される．いっぽう，大偏差評価の一般的な方法が無かったため，非線形系への適応は課題として残っていた．たとえば多次元非線形拡散過程に対してもそれは未知であった．もともと Ibragimov-Has′minskiĭの思想がそうであったように，尤度解析に現れる統計量の漸近的性質は，尤度比確率場の収束を介して普遍的にもたらされ，その意味ではもはや元々の統計モデルに個別の確率論的構造によらない議論が可能である．大偏差不等式の証明も実はモデルの個性によらない普遍的な方法が可能で，それは尤度比確率場の局所漸近構造と大域的収束があればよい．多くの場合，前者は局所漸近 2 次構造であり，後者は一様大数法則である (Yoshida, 2005, 2006)．

正則サンプリングスキームにさらに，$nh^2\to 0$ を仮定する．$\mathbb{U}_n^1(\theta_1^*)=\{u_1\in\mathbb{R}^{d_1};\theta_1^*+n^{-1/2}u_1\in\Theta_1\}$，$V_n^1(r,\theta_1^*)=\{u_1\in\mathbb{U}_n^1(\theta_1^*);\,r\le|u_1|\}$ とする．疑似尤度比確率場

$$\mathbb{Z}_n^1(u_1;\theta_1^*,\theta_2)=\exp\left\{\mathbb{H}_n(\theta_1^*+n^{-1/2}u_1,\theta_2)-\mathbb{H}_n(\theta_1^*,\theta_2)\right\}$$

に Yoshida (2005, 2006) の多項式型大偏差不等式を適用して，多項式型大偏差不等式

$$P_{\theta^*}\left[\sup_{(u_1,\theta_2)\in V_n^1(r,\theta_1^*)\times\Theta_2}\mathbb{Z}_n^1(u_1;\theta_1^*,\theta_2)\geq e^{-r}\right]\leq\frac{C_L}{r^L}\qquad(r>0,\,n\in\mathbb{N})\tag{3.3}$$

を得る．ここで L は任意の正数であるが，問題によっては適当な大きさに制限されることもある．不等式 (3.3) の導出に関しては次のように考えればよい．$\mathbb{Z}_n^1(u_1;\theta_1^*,\theta_2)$ がたとえば局所漸近 2 次構造（対数疑似尤度比が局所的に u_1 のランダムな 2 次関数で近似できること）を持てば，中程度に大きい u_1 に対して 2 次関数の性質から $\mathbb{Z}_n^1(u_1;\theta_1^*,\theta_2)$ が評価でき，大きな u_1 に対しては上記の大域的な分離条件によってやはりそれが可能となる．これらの評価をつないで (3.3) を得ることができる．

p_n に対する最尤型推定量を $\hat{\theta}_n=(\hat{\theta}_{1,n},\hat{\theta}_{2,n})$ とすると，(3.3) より，$|u_1|$ が大きいところ（つまり $u_1\in V_n^1(r,\theta_1^*)$）で確率場 $\mathbb{Z}_n^1$ が大きくなることは稀だから，$\hat{\theta}_{1,n}$ が真値から大きく離れることも稀である．この議論を定量的に行って，$\hat{\theta}_{1,n}$ のモーメント の有界性

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}P_{\theta^*}\left[|\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1,n}-\theta_1^*)|^p\right]<\infty$$

を得る[4)]．p は任意の正数である．$\hat{\theta}_{1,n}$ は一般に一意ではないが，任意の推定量系列が統制されていることは注意すべきである．これと，そのような良い性質を持つ推定量系列が存在するということとは大きな開きがある．

次に統計的確率場

$$\mathbb{Z}_n^2(u_2;\hat{\theta}_{1,n},\theta_2^*)=\exp\left(\mathbb{H}_n(\hat{\theta}_{1,n},\theta_2^*+(nh)^{-1/2}u_2)-\mathbb{H}_n(\hat{\theta}_{1,n},\theta_2^*)\right)$$

を考える．今度は $\mathbb{Y}(\theta_2;\theta^*)$[5)] を

$$\mathbb{Y}(\theta_2;\theta^*)=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}B(x,\theta_1^*)^{-1}[(a(x,\theta_2)-a(x,\theta_2^*))^{\otimes 2}]\,\nu(dx)\tag{3.4}$$

によって定め，θ_2 に対する識別可能条件を仮定する：ある正数 $\chi'(\theta^*)$ に対して，

$$\mathbb{Y}(\theta_2;\theta^*)\leq-\chi'(\theta^*)|\theta_2-\theta_2^*|^2\qquad(\theta_2\in\Theta_2).$$

θ_1 に対するステップ同様，一般的に得られている Yoshida (2005) の多項式型大偏差不等式を適用して，

$$P_{\theta^*}\left[\sup_{u_2\in V_n^2(r,\theta_2^*)}\mathbb{Z}_n^2(u_2;\hat{\theta}_{1,n},\theta_2^*)\geq e^{-r}\right]\leq\frac{C_L}{r^L}\qquad(r>0,\,n\in\mathbb{N})\tag{3.5}$$

を得る．ここで，$V_n^2(r,\theta_2^*)=\{u_2\in\mathbb{U}_n^2(\theta_2^*);\,r\leq|u_2|\}$, $\mathbb{U}_n^2(\theta_2^*)=\{u_2\in\mathbb{R}^{m_2};\,\theta_2^*+(nh)^{-1/2}u_2\in\Theta_2\}$ である．この確率場に対する大偏差評価からの帰結として，$\hat{\theta}_{2,n}$ のモーメントの有界性

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}P_{\theta^*}\left[|\sqrt{nh}(\hat{\theta}_{2,n}-\theta_2^*)|^p\right]<\infty$$

を得る．

$u_i\in\mathbb{R}^{m_i}$ $(i=1,2)$ に対して，$\theta_1^\dagger=\theta_1^*+n^{-1/2}u_1$, $\theta_2^\dagger=\theta_2^*+(nh)^{-1/2}u_2$ とする．このとき，局所漸近正規性

$$\begin{aligned}&\mathbb{H}_n(\theta_1^\dagger,\theta_2^\dagger)-\mathbb{H}_n(\theta_1^*,\theta_2^*)\\&\quad\to^{d_f}\Delta_1[u_1]+\Delta_2[u_2]-\frac{1}{2}\left\{\Gamma_1(\theta^*)[u_1^{\otimes 2}]+\Gamma_2(\theta^*)[u_2^{\otimes 2}]\right\}\end{aligned}\tag{3.6}$$

を示すことは容易である．この収束は (u_1, u_2) の有限次元収束である．Δ_1 と Δ_2 は直交する正規確率ベクトルであり，平均 0，それぞれの共分散行列は

$$\Gamma_1(\theta^*)[u_1^{\otimes 2}] := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left\{\partial_{\theta_1}^2 B^{-1}(x,\theta_1)[u_1^{\otimes 2}, B(x,\theta_1^*)] + \partial_{\theta_1}^2 \log\frac{|B(x,\theta_1)|}{|B(x,\theta_1^*)|}[u_1^{\otimes 2}]\right\}\bigg|_{\theta_1=\theta_1^*}\nu(dx)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Tr}\left\{B^{-1}(\partial_{\theta_1}B)B^{-1}(\partial_{\theta_1}B)(x,\theta_1^*)[u_1^{\otimes 2}]\right\}\nu(dx)$$

と

$$\Gamma_2(\theta^*)[u_2^{\otimes 2}] = \int_{\mathbb{R}^d} B(x,\theta_1^*)^{-1}[\partial_{\theta_2}a(x,\theta_2^*)[u_2], \partial_{\theta_2}a(x,\theta_2^*)[u_2]]\,\nu(dx)$$

で与えられる．再び多項式型大偏差不等式を適用すると，(3.6) の収束が，$\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2}$ 上の確率場としての分布収束，すなわち，無限大で 0 となる $\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2}$ 上の連続関数のなす空間上の法則の弱収束に持ち上がる．この収束は連続関数の一様収束であり，極限と $\mathrm{argmax}_{(u_1,u_2)}$ の交換を保証する．つまり，収束の式の左辺を最大にする (u_1, u_2) の値（規格化された疑似最尤推定量）が右辺のそれへ収束する．さらにこのとき，規格化された疑似最尤推定量の裾確率は大偏差不等式によって強く制約されている．結論として次の定理を得る．

定理 1.（Yoshida, 2005, 2006） 任意の疑似最尤推定量系列 $\theta = (\hat\theta_{1,n}, \hat\theta_{2,n})$ に対して，$n\to\infty$ のとき，

$$\left(\sqrt{n}(\hat\theta_1-\theta_1^*), \sqrt{nh}(\hat\theta_2-\theta_2^*)\right) \to^d (\zeta_1,\zeta_2) \sim N_{m_1+m_2}\left(0, \mathrm{diag}\,[\Gamma_1(\theta^*)^{-1}, \Gamma_2(\theta^*)^{-1}]\right).$$

さらに，収束 $E_{\theta^*}\left[f(\sqrt{n}(\hat\theta_{n,1}-\theta_1^*), \sqrt{nh}(\hat\theta_{2,n}-\theta_2^*))\right] \to \mathbb{E}[f(\zeta_1,\zeta_2)]$ が任意の高々多項式オーダーの連続関数 f に対して成立する[6)]．

いずれも緩いが，ここで省略した正則条件については上記論文を参照されたい．最尤型推定量の分布収束に関しては以前から知られている（Yoshida, 1992; Kessler, 1997）．完全観測 1 次元拡散過程に対して局所時間を用いた大偏差不等式の導出は Kutoyants (2004) が与えている．

我々の統計モデルは 2 種類のパラメータ θ_1，θ_2 を持つ．これらは対応する情報量の発散のオーダーが異なり，区別して扱うのが自然である．最尤型推定量の挙動がそれぞれのパラメータに対応した大偏差不等式から従ったことはそれを示唆している．そこでは 2 種の異なったレベルの大数の法則が働いている．

統計的確率場に対する大偏差不等式の方法を述べた．それは付随する統計量の裾確率評価およびモーメント収束を誘導する．これらは，統計的予測や情報量規準の理論的な計算，漸近展開における高次項の評価など，現代理論統計学の展開に必要な基本的な性質である[7)]．また，その導出のために特殊な仮定が必要なわけでもなく，確率過程の統計学の操作性が向上したのだと言えよう．

Uchida (2010) は離散観測エルゴード的拡散過程に対して，コントラストに基づく新しい情報量規準（Contrast-based information criterion, CIC）を提案した．推定量が代入された汎関数の期待値を厳密に扱う必要があり，多項式型大偏差不等式が用いられている．また，尤度の計算には Malliavin 解析が必要となり，技巧的な議論を展開している．確率過程の理論統計学の深さと新しい方向性を示した仕事である．

これまでは最尤型推定を扱ったが，今度はベイズ法を考えよう．2 種のベイズ型推定量が定義できる．ひとつは (θ_1, θ_2) に同時に事前分布を入れ，フルパラメータに対する疑似尤度関数からベイズ型推定を行うものである．これを simultaneous Bayes estimator (SBE) と呼ぶ．もう一つは，まず疑似尤度関数の θ_2 に任意の値 $\theta_2^\star$ を代入し，θ_1 の事前分布に関してベイズ型推定

量 $\tilde{\theta}_{1,n}$ を作り，次にその推定量あるいは同等によい推定量を疑似尤度関数の θ_1 に代入して θ_2 の事前分布に関して θ_2 のベイズ型推定量 $\tilde{\theta}_{2,n}$ を計算する方法である．これを adaptive Bayes estimator（ABE，adaBayes estimator）と呼ぶ．少なくとも数値計算上扱いやすいのは積分の次元が低い ABE であるので，これについて述べる．2 次損失関数を考えると，ABE の漸近挙動は，それを定義する疑似尤度比確率場の u_1 あるいは u_2 に関する積分で定まる統計量の同時収束に帰着する．コンパクト空間上，積分は連続関数空間上の連続写像だから，疑似尤度比確率場の裾での積分が制御できれば ABE の収束が従うことになる．ABE の裾確率評価とモーメント収束も同時に得られる．すなわち，$(\mathbb{Z}_n^1(u_1;\theta_1^*,\theta_2^*),\mathbb{Z}_n^2(u_2;\tilde{\theta}_{1,n},\theta_2^*))$ の収束と，多項式型大偏差不等式(3.3)および

$$P_{\theta^*}\left[\sup_{u_2\in V_n^2(r,\theta_2^*)}\mathbb{Z}_n^2(u_2;\tilde{\theta}_{1,n},\theta_2^*)\geq e^{-r}\right]\leq\frac{C_L}{r^L}\qquad(r>0,\ n\in\mathbb{N}),\tag{3.7}$$

によって，次の結果を得る．

定理 2.（Yoshida, 2005, 2006） $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ の ABE $(\tilde{\theta}_{1,n},\tilde{\theta}_{2,n})$ に対して，$n\to\infty$ のとき，

$$\left(\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{1,n}-\theta_1^*),\sqrt{nh}(\tilde{\theta}_{2,n}-\theta_2^*)\right)\to^d(\zeta_1,\zeta_2)\sim N_{m_1+m_2}\left(0,\mathrm{diag}\ [\Gamma_1(\theta^*)^{-1},\Gamma_2(\theta^*)^{-1}]\right).$$

さらに，$E_{\theta^*}\left[f(\sqrt{n}(\tilde{\theta}_{1,n}-\theta_1^*),\sqrt{nh}(\tilde{\theta}_{2,n}-\theta_2^*))\right]\to\mathbb{E}[f(\zeta_1,\zeta_2)]$. ここで，$f$ は任意の高々多項式オーダーの連続関数である．

推定量の最適性の議論も可能である．エルゴード的な，ジャンプのある確率微分方程式の最尤型推定量の構成と漸近挙動に関しては Shimizu and Yoshida (2006) とその文献を見よ．ジャンプがある場合，確率過程の増分（並んだ観測値の差）がジャンプを含んでいるか否かを判断するジャンプ/非ジャンプフィルタの導入が鍵になる．最近 Ogihara and Yoshida (2010) は疑似尤度解析を構成し，疑似最尤推定量および ABE の漸近正規性およびモーメント収束を示した．

Yoshida (2005, 2006) において，極限の確率場の分離性と一様収束から疑似尤度比確率場に対する多項式型大偏差不等式が導かれた．同論文で言及されているが，この方法は推定関数の零点として定まる統計量（“Z-推定量”）に対しても有効であり，大偏差不等式を得ることは容易である．これは零点問題が最小（最大）問題に帰着できることからも自明である．

4. 疑似尤度解析：有限時間離散観測

ここでは，正則サンプリングだが T 固定の有限時間観測の場合を扱う．すなわち，我々のサンプリングスキームは $t_j=jh,\ h=T/n$ である．モデル (2.1) のようにドリフトパラメータがあったとしても，拡散が非退化であれば，それは一致推定不可能である．離散観測の極限である連続観測においてさえ，θ_2 のシフトに対する確率測度の変更は絶対連続な変更になる（Girsanov の定理）ので，それはモデルの確率分布族が極限において相互特異的に分離しないことを意味している．したがってこの場合，ドリフト項の一致推定はできず，理論統計としての興味は拡散項のパラメータ推定に向く．我々の問題は，θ_1 を p 次元パラメータ θ として，

$$a_t:\text{未知},\quad b_t=b(X_t,\theta)\tag{4.1}$$

なるセミパラメトリックな問題になる．

疑似尤度解析はここでも有効であるが，ドリフトの情報を使えないのでここでの疑似対数尤度は

$$\mathbb{H}_n(\theta)=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\left\{\log\det B(X_{t_{j-1}},\theta)+h^{-1}B^{-1}(X_{t_{j-1}},\theta)[(\Delta_jX)^{\otimes 2}]\right\}$$

ととる．$\mathbb{U}_n = \{u \in \boldsymbol{R}^p \ ; \ \theta^* + (1/\sqrt{n})u \in \Theta\}$, $V_n(r) = \{u \in \mathbb{U}_n \ ; \ r \leq |u|\}$ とする．確率場 $\mathbb{Z}_n(u)$ $(u \in \mathbb{U}_n)$ を

$$\mathbb{Z}_n(u) = \exp\left\{\mathbb{H}_n\left(\theta^* + \frac{1}{\sqrt{n}}u\right) - \mathbb{H}_n(\theta^*)\right\},$$

で定義する．確率場

$$\mathbb{Y}(\theta) = -\frac{1}{2T}\int_0^T \left\{\log\left(\frac{\det B(X_t,\theta)}{\det B(X_t,\theta^*)}\right) + \mathrm{tr}\left(B^{-1}(X_t,\theta)B(X_t,\theta^*) - I_d\right)\right\} dt$$

に対して，$\chi_0 = \inf_{\theta\neq\theta^*} \frac{-\mathbb{Y}(\theta)}{|\theta-\theta^*|^2}$ とおく．χ_0 が正であることがモデルの分離性を表すが，いまは χ_0 は一般にランダムなので，χ_0 が 0 からどのくらい離れているかを確率的に精密に評価する必要がある．正則条件のもと，各 $L > 0$ に対して，定数 $c_L > 0$ が存在して，すべての $r > 0$ に対して，

$$P[\chi_0 \leq r^{-1}] \leq \frac{c_L}{r^L} \tag{4.2}$$

が成り立つことから，確率場 $\mathbb{Z}_n$ に対する多項式型大偏差不等式が得られる: 任意の $L > 0$ に対して，正定数 C_L が存在して，不等式

$$P\left[\sup_{u\in V_n(r)} \mathbb{Z}_n(u) \geq e^{-r}\right] \leq \frac{C_L}{r^L}$$

がすべての $r > 0$ と $n \in \boldsymbol{N}$ に対して成立する．(4.2) を示すところは拡散過程の非退化性を用いた少し複雑な考察が必要であるが，詳しいことは省略する．$t = 0$ において統計モデルが完全に退化(1 点になり識別不可能)という状況が自然に起こるので，(4.2) は自明ではない．

一旦多項式型大偏差不等式が得られれば，Ibragimov-Has′minskiĭ-Kutoyants のプログラムによって，疑似尤度に由来する統計量である最尤型推定量およびベイズ型推定量の漸近挙動が導かれる．今の場合は疑似尤度比確率場は局所漸近混合正規(LAMN)となるので，推定量の極限分布も混合正規分布になる．

ランダム行列 $\Gamma(\theta^*)$ を

$$\Gamma(\theta^*)[u^{\otimes 2}] = \frac{1}{2T}\int_0^T \mathrm{Tr}\left\{(\partial_\theta B)B^{-1}(\partial_\theta B)B^{-1}(X_t,\theta^*)[u^{\otimes 2}]\right\} dt$$

で定義し，ζ を $\Gamma(\theta^*)$ と独立な p 次元標準正規確率変数とする．

定理 3.（Uchida and Yoshida, 2009） 疑似最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ に対して $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^*) \to^{d_s} \Gamma(\theta^*)^{-1/2}\zeta$. さらに，$n \to \infty$ のとき，

$$E\left[f(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^*))\right] \ \to \ \mathbb{E}\left[f(\Gamma(\theta^*)^{-1/2}\zeta)\right].$$

ここで f は任意の高々多項式オーダーの連続関数，d_s は安定的収束を表す．

注 1. 標語的に言うと，ζ は確率過程が定義されているもとの確率空間に住んでいない．したがって，極限の表現では確率空間を拡張している．安定的収束とは，極限定理の対象となっている確率変数と，確率過程が定義されているもとの確率空間上の任意の確率変数との結合分布の収束が常に起きることを意味している．そのような性質は重要で，たとえばスチューデント化を行うとき必要になる．

注 2. Uchida and Yoshida (2009) ではより一般の確率回帰モデルに対して同様の結果を示している．定理 3 の疑似最尤推定量の漸近混合正規性は Genon-Catalot and Jacod (1993) による．

定理 4.（Uchida and Yoshida, 2009）疑似ベイズ型推定量 $\tilde{\theta}_n$ に対して，$\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta^*) \to^{d_s} \Gamma(\theta^*)^{-1/2}\zeta$. さらに，$n\to\infty$ のとき，

$$E\big[f(\sqrt{n}(\tilde{\theta}_n - \theta^*))\big] \to \mathbb{E}\big[f(\Gamma(\theta^*)^{-1/2}\zeta)\big]$$

ここで f は任意の高々多項式オーダーの連続関数である.

拡散係数の推定は理論統計学者の興味を引いてきた．多くの文献の中でたとえば，Dohnal (1987), Prakasa Rao (1983, 1988), Yoshida (1992), Kessler (1997), Sørensen and Uchida (2003), Iacus et al. (2009), Uchida (2010), Shimizu and Yoshida (2006). 有限時間の場合はこの節で見たように，推定量の混合正規性が顕著な性質である．たとえば，Dohnal (1987), Genon-Catalot and Jacod (1993)．局所漸近混合正規性に関しては Gobet (2001).

5. 分散共分散構造推定量と一般化

モデル (1.1) に対して，$r_n = \max_j(t_j - t_{j-1}) \to 0$ $(n\to\infty)$ のとき，

$$V_n := \sum_{j=1}^{N(n)} (X_{t_j} - X_{t_{j-1}})^{\otimes 2} \to^p \int_0^T b_t^{\otimes 2} dt \tag{5.1}$$

となる．これは確率論でよく知られている事実である．疑似尤度は 2 次形式を含むので，分散共分散推定量 V_n の誤差分布を導く方法論は確率過程の理論統計学では 90 年代には周知のものとなり，離散観測での推定論に応用されてきた(たとえば前節であげた論文や Genon-Catalot and Jacod, 1993; Yoshida, 1997; Jacod, 1997)．極限に混合正規分布が現れるのが典型であり，第 4 節の結果の証明においても使われている．このような背景はともかく，“リアライズド・ボラティリティ”として高頻度金融データに用いられ普及するようになったのは比較的新しい(現在では膨大な数の論文があるが，その中でたとえば，Andersen and Bollerslev, 1998; Andersen et al., 2001a, Andersen, 2001b; Barndorff-Nielsen and Shephard, 2002).

分散推定量の一般化としては，非同期化(時間軸の多次元化)と指数における高次元化がある.

5.1 非同期共分散推定

この節では分散共分散推定量の非同期化を扱う．上で見たように，X が多次元であっても，観測時刻がすべての成分で共通であれば，V_n が分散共分散推定を与える．したがって問題となるのは，X の各成分が別個の時点で観測される非同期の場合である．株の取引が成立した時点でその価格が観測されると見なすと，異なった銘柄は異なった観測時刻の列を持ち，非同期的な観測となる．X は局所的にガウス的な構造なので，X の 2 成分間の共分散構造を調べることが基本となる．記述を簡単にするために 2 次元の確率過程 $(X_t, Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ がある確率基底の上に定義されており，確率微分方程式

$$\begin{cases} dX = a_t^X dt + b_t^X dB_t^X, & X_0 = x_0 \\ dY = a_t^Y dt + b_t^Y dB_t^Y, & Y_0 = y_0 \end{cases}$$

を満たすとする．ここで，$B^X = (B_t^X)_{t\in\mathbb{R}_+}$ と $B^Y = (B_t^Y)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は標準 Wiener 過程であるが，相関があり，$\mathrm{d}\langle B^X, B^Y\rangle = \rho_t dt$ であるとする．a^X, a^Y, b^X, b^Y, ρ は発展的可測で $\int_0^T (|a_t^X| + |a_t^Y| + |b_t^X|^2 + |b_t^Y|^2)dt < \infty$ a.s. を満たすものとする．X に対して観測時刻は停止時の増大列 $0 = S_0 \le S_1 \le \cdots \le S_i \le \cdots \to \infty$ a.s., Y に対して観測時刻は停止時の増大列 $0 = T_0 \le T_1 \le \cdots \le T_j \le \cdots \to \infty$ a.s. で与えられるものとする．データ $\{X_{S_i};\, i\in\mathbb{Z}_+,\, S_i \le t\}$, $\{Y_{T_j};\, j\in\mathbb{Z}_+,\, T_j \le t\}$

から X と Y の共分散構造

$$\langle X,Y\rangle_t = \int_0^t b_s^X b_s^Y \rho_s ds \qquad (t\in\mathbb{R}_+)$$

を推定することがここでの課題である．

ナイーブなアイデアは，はじめに等間隔のグリッド $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を置き，補間によって t_k 上の X, Y のデータ $\hat{X}_k$，$\hat{Y}_k$ を生成し，$\hat{X}_k$，$\hat{Y}_k$ に対してリアライズド・ボラティリティを計算し推定値とすることである．しかしながらこの方法はバイアスを生じることが知られている(cf. Hayashi and Yoshida, 2005)．

推定量を作るためにまず最も単純な場合を考える．すなわち，$a_t^X=0$, $a_t^Y=0$ であって，b_t^X, b_t^Y，ρ_t はランダムでない関数であるとする．さらに，S^i，T^j もランダムでなく，ある固定された $t>0$ に対して $t\in\{S^i\}\cap\{T^j\}$ であるとする．つまり，$[0,t]$ の端点 t で X,Y が観測されるとしよう．$I_i=(S_{i-1},S_i]$, $J_j=(T_{j-1},T_j]$ とし，区間 $(a,b]$ 上の確率過程 Z の増分 Z_b-Z_a を $Z((a,b])$ で表す．つぎの統計量を考える：

$$U=\sum_{i,j} X(I_i)Y(J_j)1_{\{I_i\cap J_j\neq\emptyset\}}$$

ここで i,j は，$i,j\in\mathbb{N}$, $S_i\le t$, $T_j\le t$ なる範囲を動く．U は Hayashi and Yoshida (2005)の非同期共分散推定量(HY 推定量)である．今の仮定のもとで (X,Y) は独立増分になるから，U の期待値は

$$\begin{aligned}
E[U] &= \sum_{i,j} E[X(I_i)Y(J_j)]1_{\{I_i\cap J_j\neq\emptyset\}}\\
&= \sum_{i,j}\int_{I_i\cap J_j} b_s^X b_s^Y \rho_s ds\\
&= \langle X,Y\rangle_t
\end{aligned}$$

となって，U は $\langle X,Y\rangle_t$ の不偏推定量であることがわかる．このように考えると U の構成は自明であるが，さらに U の形はきれいなので一致性があることが直感的に予想される．

X と Y の時間軸を x-y 平面にとり，x 軸上に I_i を，y 軸上に J_j を配置し，長方形 $I_i\times J_j$ をすべて並べてみる．このとき，U の和に貢献する (i,j) に対する $I_i\times J_j$ は直線 $y=x$ が通る長方形である．I_i, J_j の長さの最大値が 0 に近づく(高頻度)の場合，そのような長方形の和集合 $\mathcal{A}$ は $[0,t]^2$ の対角線に近づく．したがって和はほとんど 1 次元的であり，$n\to\infty$ のとき $\langle X,Y\rangle_t$ に収束する $U'=\sum_k X(L_k)Y(L_k)$ $(L_k=((k-1)t/n,kt/n])$ に対応する集合 $\cup_k L_k^2$ の中に，U の漸近論の時間を進めると $\mathcal{A}$ がほぼ含まれるようにすることができる．2 つの集合の差 $\mathcal{S}$ に対応する X,Y の増分積和の 2 乗の期待値は $\mathcal{S}$ の面積相当であり $O(1/n)$ になることが，独立増分性と集合 $\mathcal{S}$ が $y=x$ 周辺にあるということからわかるだろう．したがって U と U' は漸近同等になるであろうと予想される．実際には U の分散を計算し，$\mathrm{Var}[U]\to 0$ となることが確認でき，一致性 $U\to^p\langle X,Y\rangle_t$ が示される(Hayashi and Yoshida, 2005)．

X,Y,S_i,T_j が一般の場合に戻る．非同期共分散過程 $\mathcal{C}_t$ は次のように定義される統計量である：

$$\mathcal{C}_t=\sum_{i,j\in\mathbb{N}:S_i\le t,\,T_j\le t}(X_{S_i}-X_{S_{i-1}})(Y_{T_j}-Y_{T_{j-1}})1_{\{(S_{i-1},S_i]\cap(T_{j-1},T_j]\neq\emptyset\}}.$$

これは U の確率過程バージョンである．漸近論を考えるとき，S_i，T_j したがって $\mathcal{C}_t$ も n に依存するので $\mathcal{C}_t^n$ と表す．高頻度における一致性は証明されている．さらに，混合ガウス過程への安定的収束も証明できる．すなわち，$n\to\infty$ のとき，

$$b_n^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{C}^n-\langle X,Y\rangle)\to^{d_s}\int_0^\cdot \gamma_s d\tilde{w}_s \qquad \text{in } \mathbb{D}(\mathbb{R}_+). \tag{5.2}$$

ここで，$\tilde{w}$ はもとの確率空間の σ-加法族と独立な Wiener 過程であり，b_n は 0 に収束する正数列で以下のバランス条件を満たすものである:

$$H_n^1(t)=\sum_i |I^i(t)|^2,\ H_n^2(t)=\sum_j |J^j(t)|^2,$$
$$H_n^{1\cap 2}(t)=\sum_{i,j} |\left(I^i\cap J^j\right)(t)|^2,\ H_n^{1*2}(t)=\sum_{i,j} |I^i(t)||J^j(t)|K_t^{ij}$$

とするとき，あるランダムな非減少関数 $H^k(k=1,2,1\cap 2,1*2)$ が存在して，密度関数 h^k に対して $H^k=\int_0^t h_s^k ds$ とかけ，各 $t\in\mathbb{R}_+$ に対して，$n\to\infty$ のとき，$b_n^{-1}H_n^k(t)\xrightarrow{p}H^k(t)$ となるものと仮定する．ただし，区間 I に対して $|I|$ はその長さを表し，$I(t)=I\cap(0,t]$, さらに $I^i=(S_{i-1},S_i]$, $J^j=(T_{j-1},T_j]$, $K_t^{ij}=1_{\{I^i(t)\cap J^j(t)\neq\emptyset\}}$ である．b_n の取り方としてはたとえば $b_n=n$ で，X,Y それぞれの観測回数が平均的に n に比例するのが典型的な状況である．収束 (5.2) において，γ_s は

$$\gamma_s=\sqrt{(b_s^X b_s^Y)^2 h_s^{1*2}+\left(b_s^X b_s^Y \rho_s\right)^2\left(h_s^1+h_s^2-h_s^{1\cap 2}\right)} \tag{5.3}$$

で与えられる．収束 (5.2) は Hayashi and Yoshida (2008a, 2008b, 2009) による．必要な正則条件等については同論文を参照されたい．

マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズのある場合の共分散推定も研究が進行している．マイクロストラクチャー・ノイズのある場合に取られる分散共分散構造推定法の多くは，粗い等間隔のグリッドを取り，局所的に平均化することでノイズを除去し，正則サンプリングでの方法に戻るものである．人工的に指定したグリッド上に仮想的なデータを生成する方法は，補間の仕方そのものがチューニングパラメータになり，推定値が一意に決まらないばかりでなく，推定バイアスを生じ得るから，その良さは微妙である．幾つか試みはあったが，Hayashi and Yoshida (2005) で示したように，非同期性はバイアスの一因であり，それを無視して同期データの古典的問題に帰着する方法には，個人的には大変違和感があった．実際そのような方法では最適レートは達成できない．最近 Bibinger (2010) は，非同期共分散推定の方法とプレアグリゲーションの方法を組み合わせて推定量を構成した．$\mathcal{C}_t^n$ は本質的に 1 次元的な和であり，適当な非減少列 $g_k,l_k\in\{S_i\}$, $\gamma_k,\lambda_k\in\{T_j\}$ をとって，

$$\mathcal{C}_t^n=\sum_{k=0}^N (X_{g_k}-X_{l_k})(Y_{\gamma_k}-Y_{\lambda_k})$$

と表される．$g_i,l_i,\gamma_i,\lambda_i$ の取り方は一意ではないが，その違いは本質的ではない．多くの研究でなされるように，マイクロストラクチャーのある場合，観測されるものは，X,Y に独立なノイズが加わった

$$\tilde{X}_{S_i}=X_{S_i}+\epsilon_i^X,\quad \tilde{Y}_{T_j}=Y_{T_j}+\epsilon_i^Y$$

であると仮定する．ここで，ϵ_i^X, ϵ_j^Y はそれぞれ平均 0 の同一分布に従う独立変数列で，X,Y とも独立であるとする．$\mathcal{C}_t^n$ の X,Y をここでの観測 $\tilde{X},\tilde{Y}$ に置き換えたものは

$$\langle X,Y\rangle_t^{HY}=\sum_{k=0}^N (\tilde{X}_{g_k}-\tilde{X}_{l_k})(\tilde{Y}_{\gamma_k}-\tilde{Y}_{\lambda_k})$$

となる．この形を念頭に置き，非同期性を考慮してプレアグリゲーションして次の統計量を得る:

$$\langle X,Y\rangle_t^{sub,i}=\frac{1}{i}\sum_{k=i-1}^N (\tilde{X}_{g_k}-\tilde{X}_{l_{k-i+1}})(\tilde{Y}_{\gamma_k}-\tilde{Y}_{\lambda_{k-i+1}}).$$

さらにこの重み付き和

$$\langle X,Y\rangle_t^{multi} = \sum_{i=1}^{M}\left(\frac{12i^2}{M^3} - \frac{6i}{M^2}\right)\langle X,Y\rangle_t^{sub,i}$$

を考える．Bibinger (2010) は $M \sim \sqrt{N}$，$N \to \infty$ のとき，$\langle X,Y\rangle_t^{multi}$ が $\langle X,Y\rangle_t$ への最適収束率 $N^{-1/4}$ を達成すると報告している．

Malliavin and Mancino (2002) はフーリエ解析の方法で非同期共分散推定量を与えた．Hoshikawa et al. (2006) は Hayashi and Yoshida (2005) の推定量を含む様々な非同期共分散推定量の漸近的性質の比較を行っている．Mykland (2010) はガウシアン解析の立場から HY 推定量を考察している．Ubukata and Oya (2008) はマイクロストラクチャー・ノイズの検出と自己共分散推定を扱っている．Robert and Rosenbaum (2010, 2011) は uncertainty zone の導入によりマイクロストラクチャーをモデリングし，このモデルによるデータの特性や非同期推定の問題を議論している．Bergomi (2010) は非同期多次元オプション評価の文脈で HY 推定量が現れることを指摘している[8)]．

マイクロストラクチャー・ノイズ下での分散推定に関する文献は多い (たとえば，Zhou, 1996; Zhang et al., 2005; Hansen and Lunde, 2006; Bandi et al., 2008)．

5.2 パワー，バイパワーバリエーション

1 次元確率過程 Y が等間隔 $1/n$ で正則サンプリングされるとき，

$$V(Y;r,s)_t^n = n^{\frac{r+s}{2}-1}\sum_{j=1}^{[nt]}\left|Y_{\frac{j}{n}} - Y_{\frac{j-1}{n}}\right|^r\left|Y_{\frac{j+1}{n}} - Y_{\frac{j}{n}}\right|^s \tag{5.4}$$

をオーダー (r,s) のリアライズド・バイパワーバリエーション過程 (realized bipower variation process) と呼ぶ．ただし $0^0 = 1$ とする．分散推定において，この統計量はジャンプに対してロバストであると言われる (Barndorff-Nielsen and Shephard, 2004)．$V(Y;r,s)^n$ に対する中心極限定理が Barndorff-Nielsen et al. (2006) に与えられている．また，マイクロストラクチャー・ノイズがある場合に Podolskij and Vetter (2009) はバイパワーバリエーションを変形した統計量 (modulated bipower variation) によって，Y の拡散係数のベキの積分の推定量を構成し，誤差の $n^{1/4}$ スケーリングに対して漸近混合正規性を示している．Hayashi et al. (2008) では，非正則サンプリングにおけるパワーバリエーションの漸近混合正規分布への安定的収束を示している．

6. これからの課題

6.1 漸近展開

伊藤過程 (1.1) の有限時間正則サンプリング下で，b_t が本質的に線形にパラメータ付けされるとき，パラメータに対する自然な M 推定量は漸近正規であり，Yoshida (1997) におけるようにマルチンゲール展開の方法で漸近展開が可能である．一般の非線形パラメトリゼーションの場合，すでに述べたように，推定量は一般に漸近混合正規である．推定量や V_n の誤差の確率展開は，主要項が 2 重伊藤積分で表され，マルチンゲールの摂動になる．このマルチンゲールの極限が混合正規分布になり，そのような状況での漸近展開は，極限定理における標準的な方法では証明ができない．つまり標準的な状況では，マルチンゲール M^n に対して，$e^{iuM_t^n}$ にポテンシャルをつけてマルチンゲールを作るとき，そのポテンシャルが漸近的にランダムでない量に収束し，$E[e^{iuM_t^n}]$ の期待値とポテンシャルの交換ができ，中心極限定理やより一般に独立増分過程への収束の証明がなされたのだが，極限が混合正規の場合このスキームが働かない．

筆者は最近極限が混合正規の場合にマルチンゲールの漸近展開を拡張した(Yoshida, 2008)．公式は無限次元解析的な表現を伴い，従来の不変原理とは本質的に異なるものになる．応用として V_n の漸近展開が導かれる(Yoshida, 2010)．条件つき分布の漸近展開は同じ技巧で解決される．ボラティリティ・デリバティブや統計推測への応用が今後の課題である．株式とヨーロピアンオプションで確率過程の 2 次変動の関数(ペイオフ)が複製可能なとき，リスクは実現ボラティリティの確率的振れになり，その評価が例である．

非同期共分散推定量に対する漸近展開が Dalalyan and Yoshida (2006) で与えられている．これは独立サンプリング，拡散係数へのフィードバックなしの場合だが，ガウシアン解析と Malliavin 解析によって漸近展開を導いた．フィードバック有りの場合は推定量は漸近混合正規になり，新しいマルチンゲール展開の方法が有効であろう．ただし，非同期共分散推定量の観測時点で決まる小区間 I^i, J^j の汎関数の挙動を精密に調べる必要があり，観測時刻がポアソン配置のときでも計算は複雑である．

6.2　リード・ラグ推定

株が 2 銘柄あるとき，片方の株価が他方の株価を追随している現象が見られることがある．このリーダー/フォロワー関係を両者の動きのラグを推定することで定量的に測ることができる．ラグの推定量としては，非同期共分散推定量の変形として得られるリード・ラグ推定量がある(Hoffmann et al., 2008)．実際の高頻度株価データでリード・ラグによる企業間の興味深い順序関係が見られるが，このような観察の意義は今後現場で判断されるのであろう．

6.3　非線形モデルに対する非同期サンプリング

非同期共分散推定はいまのところ 2 次形式に対して性質が解明されているが，一般のパラメトリックスで疑似尤度解析を行う場合，非同期性の扱いはより難しくなる．モーメント型の推定は自明であるが，それはモデルの非線形性を真に反映した推定法とは言い難い．一般のパラメトリックスで疑似尤度解析の研究が進行中である．

注.

1) ベイズ法は良い方法である．実際，確率過程に対してベイズ法の良さは漸近論の枠組みでも証明できる．

2) マルチンゲール収束定理などエルゴード性の代わりをする構造がある場合はそれが使われる．

3) 漸近決定論の基礎的な理論である．本質的な部分は以下で説明しているが，詳しくは Ibragimov and Has´minskiĭ (1981) を参照されたい．

4) 確率分布の裾確率による積率の表示を思い起こせばこのことはより明瞭になろう：X を非負確率変数とするとき，$p>0$ に対して，$E[X^p]=\int_0^\infty pt^{p-1}P[X\geq t]dt$.

5) これは先の $\mathbb{Y}(\theta_1;\theta^*)=\mathbb{Y}(\theta_1,\theta_2;\theta^*)$ とは別物である．

6) 規準化された推定量の積率が n に関して一様に有界であることからの帰結である．

7) 情報量規準の導出の筋道に関しては，坂元 他 (2003) あるいは拙著吉田 (2007) を参照して頂きたい．漸近展開における統計量の確率展開の剰余項の評価における多項式型大偏差評価は，自然な議論で行き着くため，必要性が古くから認識されている(たとえば吉田 (2007) の第 5 章を参照)．剰余項はしばしば推定量の誤差の多項式として表される．

8) この推定量に関連した文献は，たとえば Google で “Hayashi-Yoshida” “estimator” を検索して頂くとよい．

参 考 文 献

Andersen, T. G. and Bollerslev, T. (1998). Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts, *International Economic Review*, **39**, 885–905.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys, P. (2001a). The distribution of realized exchange rate volatility, *Journal of the American Statistical Association*, **96**(453), 42–55.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Ebens, H. (2001b). The distribution of realized stoch return volatility, *Journal of Financial Economics*, **61**, 43–76.

Bandi, F. M., Russell, J. R. and Yang, C. (2008). Realized volatility forecasting and option pricing, *Journal of Econometrics*, **147**, 34–46.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002). Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Statistical Methodology*, **64**(2), 253–280.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2004). Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps, *Journal of Financial Econometrics*, **2**, 1–48.

Barndorff-Nielsen, O. E., Graversen, S. E., Jacod, J., Podolskij, M. and Shephard, N. (2006). A central limit theorem for realised power and bipower variations of continuous semimartingales, *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance*, 33–68, Springer, Berlin.

Bergomi, L. (2010). Correlations in asynchronous markets, *Social Science Research Network*, http://ssrn.com/abstract=1635866.

Bibinger, M. (2010). Integrated covariance estimation for asynchronous noisy high-frequency data (preprint).

Dalalyan, A. and Yoshida, N. (2006). Estimation of the covariance of two asynchronously observed diffusion processes, *Annales de l'Institut Henri Poincaré* (to appear).

Dohnal, G. (1987). On estimating the diffusion coefficient, *Journal of Applied Probability*, **24**(1), 105–114.

Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1993). On the estimation of the diffusion coefficient for multi-dimensional diffusion processes, *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques*, **29**(1), 119–151.

Gobet, E. (2001). Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion: A Malliavin calculus approach, *Bernoulli*, **7**, 899–912.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2006). Realized variance and market microstructure noise, *Journal of Business and Economic Statistics*, **24**, 127–161.

Hayashi, T. and Yoshida, N. (2005). On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **11**(2), 359–379.

Hayashi, T. and Yoshida, N. (2008a). Asymptotic normality of a covariance estimator for nonsynchronously observed diffusion processes, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **60**(2), 367–406.

Hayashi, T. and Yoshida, N. (2008b). Nonsynchronous covariance estimator and limit theorem II, Research Memo., No. 1067, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Hayashi, T. and Yoshida, N. (2009). Nonsynchronous covariation process and limit theorems, *Stochastic Processes and Their Applications* (to appear).

Hayashi, T., Jacod, J. and Yoshida, N. (2008). Irregular sampling and central limit theorems for power variations: The continuous case, *Annales de l'Institut Henri Poincaré* (to appear).

Hoffmann, M., Rosenbaum, M. and Yoshida, N. (2008). Estimation of the lead-lag parameter from non-synchronous data (preprint).

Hoshikawa, T., Kanatani, T., Nagai, K. and Nishiyama, Y. (2006). Nonparametric estimation methods of integrated multivariate volatilities (preprint).

Iacus, S. M., Uchida, M. and Yoshida, N. (2009). Parametric estimation for partially hidden diffusion processes sampled at discrete times, *Stochastic Processes and Their Applications*, **119**(5), 1580–1600.

Ibragimov, I. A. and Has′minskiĭ, R. Z. (1981). *Statistical Estimation: Asymptotic Theory.* Applications of Mathematics, Volume 16, Springer-Verlag, New York (Translated from the Russian by Samuel Kotz).

Jacod, J. (1997). On continuous conditional Gaussian martingales and stable convergence in law, *Séminaire de Probabilités, XXXI*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 1655, 232–246, Springer, Berlin.

Kessler, M. (1997). Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, **24**(2), 211–229.

Kutoyants, Y. A. (2004). *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*, Springer Series in Statistics, Springer, London.

Malliavin, P. and Mancino, M. E. (2002). Fourier series method for measurement of multivariate volatilities, *Finance and Stochastics*, **6**(1), 49–61.

Mykland, P. (2010). A Gaussian calculus for inference from high frequency data, *Annals of Finance*, DOI:10.1007/S10436-010-0152-8.

Ogihara, T. and Yoshida, N. (2010). Quasi-likelihood analysis for the stochastic differential equation with jumps, *Statistical Inference for Stochastic Processes* (submitted).

Podolskij, M. and Vetter, M. (2009). Estimation of volatility functionals in the simultaneous presence of microstructure noise and jumps, *Bernoulli*, **15**(3), 634–658.

Prakasa Rao, B. L. S. (1983). Asymptotic theory for nonlinear least squares estimator for diffusion processes, *Mathematische Operationsforschung und Statistik Series Statistics*, **14**(2), 195–209.

Prakasa Rao, B. L. S. (1988). Statistical inference from sampled data for stochastic processes, *Statistical Inference from Stochastic Processes (Ithaca, NY, 1987)*, Contemporary Mathematics, Volume 80, 249–284, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Robert, C. Y. and Rosenbaum, M. (2010). Volatility and covariation estimation when microstructure noise and trading times are endogenous, *Mathematical Finance*, DOI:10.1111/j.1467-9965.2010.00454.x.

Robert, C. Y. and Rosenbaum, M. (2011). A new approach for the dynamics of ultra-high-frequency data: The model with uncertainty zones, *Journal of Financial Econometrics*, **9**, 344–366.

坂元慶行，石黒真木夫，北川源四郎(2003).『情報量統計学』，共立出版，東京.

Shimizu, Y. and Yoshida, N. (2006). Estimation of parameters for diffusion processes with jumps from discrete observations, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9**(3), 227–277.

Sørensen, M. and Uchida, M. (2003). Small-diffusion asymptotics for discretely sampled stochastic differential equations, *Bernoulli*, **9**(6), 1051–1069.

Ubukata, M. and Oya, K. (2008). A test for dependence and covariance estimator of market microstructure noise, *Discussion Papers in Economics and Business, 07–03, Feb. 2007.*

Uchida, M. (2010). Contrast-based information criterion for ergodic diffusion processes from discrete observations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **62**(1), 161–187.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2009). Estimation of the volatility for stochastic differential equations, *Asymptotical Statistics of Stochastic Processes VII, March 16–19, 2009, LeMans.*

Yoshida, N. (1992). Estimation for diffusion processes from discrete observation, *Journal of Multivariate Analysis*, **41**(2), 220–242.

Yoshida, N. (1997). Malliavin calculus and asymptotic expansion for martingales, *Probability Theory and Related Fields*, **109**(3), 301–342.

Yoshida, N. (2005). Polynomial type large deviation inequalities and quasi-likelihood analysis for stochastic differential equations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* (to appear).

Yoshida, N. (2006). Polynomial type large deviation inequalities and convergence of statistical random fields, Research Memo., No. 1021, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

吉田朋広(2007).『数理統計学 第 2 刷，講座 数学の考え方 21』, 朝倉書店，東京.

Yoshida, N. (2008). Expansion of asymptotically conditionally normal law, *Finance and Related Mathematical and Statistical Issues*, *September 3–6*, *2008*, *Kyoto Research Park*, *Kyoto*.

Yoshida, N. (2010). Expansion of the asymptotically conditionally normal law, Research Memo., No. 1125, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Zhang, L., Mykland, P. A. and Aït-Sahalia, Y. (2005). A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data, *Journal of the American Statistical Association*, **100**(472), 1394–1411.

Zhou, B. (1996). High-frequency data and volatility in foreign-exchange rates, *Journal of Business & Economic Statistics*, **14**, 45–52.

Limit Theorems in Estimation of Diffusion

Nakahiro Yoshida

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

We discuss limit theorems in estimation problems for diffusion. We treat quasi-likelihood analysis and nonsynchronous covariance estimation and mention new topics in this field.

Key words: Diffusion, volatility, nonsynchronous covariance estimation, mixed normality, martingale expansion.