経験推定可能なアフィン不変ダイバージェンス

藤澤　洋徳　数理・推論研究系　准教授

はじめに

近年になって様々なダイバージェンスが提案されている．その中でもγ-ダイバージェンスは他のダイバージェンスと少し違った性質を持っていることが知られている．スーパーロバストネスをもたらし，また，それをもたらすために普通のダイバージェンスよりも柔軟なダイバージェンスを考える必要があった．

本研究では，様々なダイバージェンスを含む広いクラスのダイバージェンスを考えることで，よりスムーズな理解を目指す．その研究の中でキーになったのが「経験推定可能性」と「アフィン不変性」である．

本研究は，名古屋大学の金森敬文先生との共同研究である．また，proper scoring rule との関係もあるが，本ポスターでは省略する．

相互エントロピーとダイバージェンス

p, q: $p(x) \geq 0$. $q(x) \geq 0$.　普通は密度関数だけに制限される．

相互エントロピー $d(p,q)$:

$$d(p,q) \geq d(p,p).$$

pとqが密度関数であれば，等号は$p=q$のときのみに成り立つ．

ダイバージェンス $D(p,q)$:

$$D(p,q) = d(p,q) - d(p,p) \geq 0$$

Bregmanダイバージェンス

Bregmanダイバージェンス (G: (狭義)凸汎関数．G^*: 劣微分)

$$\begin{aligned} d(p,q) &= -G(q) - \int G^*(q,x)\{p(x)-q(x)\}dx \\ D(p,q) &= G(p) - G(q) - \int G^*(q,x)\{p(x)-q(x)\}dx \end{aligned}$$

可分Bregmanダイバージェンス (U: (狭義)凸関数)

$$\begin{aligned} d(p,q) &= -\int U(q(x))dx - \int U'(q(x))\{p(x)-q(x)\}dx \\ D(p,q) &= \int \left\{U(p(x)) - U(q(x)) - U'(q(x))\{p(x)-q(x)\}\right\} dx \end{aligned}$$

例

KL-ダイバージェンス ($U(a) = a\log a - a$)

$$d_{\mathrm{KL}}(p,q) = -\int p(x)\log q(x)dx + \int q(x)dx$$

β-ダイバージェンス ($U(a) \propto a^{1+\beta}$)

$$d_\beta(p,q) = -\frac{1}{\beta}\int p(x)q(x)^\beta dx + \frac{1}{1+\beta}\int q(x)^{1+\beta}dx$$

γ-ダイバージェンス　(可分型ではない)

$$d_\gamma(p,q) = -\frac{1}{\gamma}\log\int p(x)q(x)^\gamma dx + \frac{1}{1+\gamma}\log\int q(x)^{1+\gamma}dx$$

注：　$d_\gamma(p,q) = 0 \iff p \propto q$　($p=q$ではない．)

Hölderダイバージェンス

$$\begin{aligned} d_H(p,q) &= \phi\left(\int p(x)q(x)^\gamma dx \Big/ \int q(x)^{1+\gamma}\right)\int q(x)^{1+\gamma}dx \quad \text{for } \gamma > 0 \\ &= -\int p(x)\log q(x)dx + \int q(x)dx \ \ (= d_{\mathrm{KL}}(p,q)) \quad \text{for } \gamma = 0 \end{aligned}$$

$$\phi(1) = -1 \qquad \phi(z) \geq -z^{1+\gamma} \quad (z \geq 0)$$

例

γ-相互エントロピー: $\phi(z) = -z^{1+\gamma}$　(これは下限)

β-相互エントロピー: $\phi(z) = \beta - (1+\beta)z$

アフィン不変性と経験推定可能性

アフィン変換　$\theta = (\Sigma, \mu)$

$$y = \Sigma^{-1}(x-\mu) \qquad p_\theta(y) = |\det(\Sigma)|\, p(\Sigma y + \mu)$$

アフィン不変ダイバージェンス

$$D(p,q) = h(\theta)D(p_\theta, q_\theta)$$

共変推定量をもたらす：$(\widehat{p})_\theta = \widehat{p_\theta}$

定理：相互エントロピーが次のクラスだとする（経験推定可能）：

$$d(p,q) = \psi\left(\int p(x)\chi(q(x))dx, \int \rho(q(x))dx\right).$$

適当な条件の下では，対応するダイバージェンスがアフィン不変ならば，それはHölderダイバージェンスになる．

ダイバージェンスの関係

Bregman と Hölder の関係

ある種の共通部分は，β-相互エントロピーとγ-相互エントロピーを一つのパラメータで繋ぐダイバージェンス族になる：

$$d(p,q) = \left(\int q(x)^{1+\gamma}dx\right)^{\kappa/(1+\gamma)}\left(1 - \frac{1}{\kappa} - \int p(x)q(x)^\gamma dx \Big/ \int q(x)^{1+\gamma}\right).$$