

非対称な確率分布の正規近似

統計数理研究所 清 水 良 一
" 湯 浅 扶 子

(1984年10月 受付)

序

確率分布を近似するための一つの一般的な方法は、中心極限定理を利用することである。 X_1, X_2, \dots, X_n を平均 μ 、分散 σ^2 の分布 F からの標本とし、基準化された和

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma}}$$

の分布および標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数をそれぞれ、 $F_n(x)$ 、 $\Phi(x)$ とすると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| = 0.$$

したがって、 n が十分大きければ

$$(1) \quad \Pr\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x\} \doteq \Phi(x - n\mu) / \sqrt{n\sigma}$$

という近似が成り立つ、という訳である。ガンマ、ポアソン、2項など、多くの分布がこの方法で正規近似できるだけでなく、たとえ、分布 F が具体的に与えられていなくても、平均値 μ と分散 σ^2 さえ分ればよいから、この方法の適用範囲は広い、しかし、収束の速さ、いいかえると、近似 (1) の精度は分布 F に大きく依存しており、いつでも十分によい近似が得られる訳ではない。実際、上述の諸分布を含めて、多くの場合に近似は悪いのである。その原因として、

- (i) 分布の非対称性、
- (ii) 裾の重さ、
- (iii) 分布の不連続性、とくに格子分布であること、

などが挙げられる。これらの原因を解消して、近似の精度を高める一般的な方法として、Edgeworth 展開や、Cornish-Fisher 展開がある。(Edgeworth (1905), Cornish-Fisher (1937))。いずれも、 F の高次モーメントを使い、前者は $F_n(x)$ を $\Phi(x)$ のまわりで展開したもの、後者は $\Phi^{-1}F_n(x)$ を x のまわりで、あるいは $F_n^{-1}\Phi(y)$ を y のまわりで展開したものである。 $\Phi^{-1}F_n(S_n)$ は $N(0,1)$ に従う変数である。逆に Y が $N(0,1)$ に従う変数なら、 $F_n^{-1}\Phi(Y)$ は分布 F_n に従う。Cornish-Fisher 展開は、それらに対する近似であり、とくに、十分大きな n に対しては、上述の諸原因を解消し、中心極限定理に比べて精度の高い近似を与える。

小論の目的は、非対称な分布 F からとられた標本の基準化された和 S_n に対する変換で、 n が小さいときでも十分によい正規近似が得られる一般的、かつ簡単なものを探ることである。このような変換の可能性は Bol'shev (1959) が論じているが、ここで述べるのは、そのようなものの一つの具体化である。また、よく知られたいくつかの分布については、それぞれ夥しい数の近似法が提案されているので、それらのいくつかとの数値的な比較も行う。

最近の論文の中で、Efron (1982) は一次元の parametric family が一つの変換でどこまで正

規近似できるか、という大変興味ある問題を論じているがこの小論は、問題を中心極限定理の精密化に限定している。 n が十分に大きくさえあれば、満足すべき正規近似が得られる、という case である。比較的小さな n でどこまでよい近似が可能か、また、3次または4次までのモーメントだけを使って何ができるか、ということが興味の対象である。

1. Edgeworth 展開と Cornish-Fisher 展開

小論で扱う分布 F は、絶対連続または、格子 $0, \pm\rho, \pm2\rho, \dots$ に集中している格子分布である。格子分布の場合は一般性を失うことなく $\rho=1$ としておく。以下の議論で標本 X_1, X_2, \dots, X_n の基準化された和 S_n というのは、

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu (+1/2)}{\sqrt{n}\sigma}$$

を指す。分子の $+1/2$ は F が格子分布の場合に限ってつけ加えるいわゆる連続修正の項である。 S_n の分布関数を $F_n(x)$ と書く

基準化された変数 $(X_1 - \mu)/\sigma$ の p 次モーメントを α_p と書く。 $k \geq 1$ とし、 $k+2$ 次までのモーメントの存在を仮定するとき、次の Edgeworth 展開が得られる。詳しいことは Cramér (1970), Petrov (1975), 竹内 (1975), 清水 (1976), 柴田 (1981) などを見よ。

$$(2) \quad F_n(x) = \Phi(x) + \varphi(x) \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j P_j(x) + R_{k+2,n}(x),$$

ただし、 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ は $N(0,1)$ の密度関数、 $P_j(x)$ は F のモーメントで決まる多項式であり、とくに、

$$P_1(x) = \alpha_3(1-x^2)/6$$

$$P_2(x) = -(\alpha_4 - 3)(x^3 - 3x)/24 - \alpha_3^2(x^5 - 10x^3 + 15x)/72 \quad (+x/24\sigma^2)$$

である。 P_2 の $+x/24\sigma^2$ は F が格子分布の場合に限ってつく項である。誤差の項 R は、

$$(3) \quad |R_{k+2,n}(x)| \leq C_{k+2,n}(1/\sqrt{n})^{k+1}$$

を満たす。ただし、格子分布のときは、 $x = (j - n\mu + 1/2)/\sqrt{n}\sigma$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対してだけ考えるものとする。 $C_{k+2,n}$ は分布 F によって決まる正の数である。

$$C_{2,n} \leq E |(X_1 - \mu)/\sigma|^3$$

であることはよく知られている (Berry-Esseen の不等式。詳しいことは、Petrov (1975) を見よ) が、 $k \geq 1$ のとき、 $C_{k+2,n}$ の F との関係は複雑である。ただ、 F が単降 (unimodal) で、有界な密度関数 $f(x)$ をもてば、

$$(4) \quad |R_{3,n}(x)| = |F_n(x) - \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}(x^2 - 1)\varphi(x)| \\ \leq \frac{2}{n\pi} \left\{ 3\alpha_4 + \frac{\alpha_3^2}{9} + \frac{1}{2} |\alpha_3| \alpha_4 + 12\alpha_4 (\sup f(x))^2 \right\}$$

が成り立つ (清水 1974) という部分的な結果はある。

中心極限定理のもう一つの精密化は、 F_n と Φ について、

$$\Phi(y) = F_n(x)$$

を満足する x と y の関係を近似的に求めることによって得られる。この関係は形式的に、

$$(5) \quad y = \Phi^{-1} F_n(x)$$

あるいは、

$$(6) \quad x = F_n^{-1} \Phi(y)$$

と書き直すことができる。 S_n が分布 $F_n(x)$ に従うなら、 $\Phi^{-1} F_n(S_n)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うから、(5)を近似することによって、 S_n を変換し、その変換されたものの分布を正規近似することができる。Cornish-Fisher 展開はそのような近似の1つで、Edgeworth 展開(2)と $\Phi(y)$ を $y=x$ のまわりで Taylor 展開したものから得られる。すなわち、3次、または4次のモーメントを使って得られる、

$$(7) \quad y_1 = x + \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} (1-x^2)$$

および、

$$(8) \quad y_2 = y_1 + \frac{1}{72n} \{(9(\alpha_4-3) - 14\alpha_3^2)x + (8\alpha_3^2 - 3(\alpha_4-3))x^3 + 3x/\sigma^2\}$$

はそれぞれ(5)の近似式である。同様に、

$$(9) \quad x_1 = y - \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} (1-y^2)$$

および

$$(10) \quad x_2 = x_1 - \frac{1}{72n} \{(9(\alpha_4-3) - 10\alpha_3^2)y + (4\alpha_3^2 - 3(\alpha_4-3))y^3 + 3y/\sigma^2\}$$

表1. ガンマ分布(指数分布の和)の近似誤差

$$\mu = \sigma^2 = 1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 9$$

n	C.L.T (1)	ED1 (2), $k=1$	ED2 (2), $k=2$	CE1 (7)	CF2 (8)
1	0.1587	0.1587	0.1183	0.1587	0.1217
5	0.0596	0.0179	0.0080	0.0497	0.0097
10	0.0421	0.0080	0.0025	0.0104	0.0038
20	0.0298	0.0037	0.0008	0.0045	0.0014
30	0.0243	0.0024	0.0004	0.0029	0.0007
40	0.0210	0.0018	0.0003	0.0022	0.0004

表2. 平均 n のポアソン分布の近似誤差

$$\mu = \sigma^2 = \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 4$$

n	C.L.T (1)	ED1 (2), $k=1$	ED2 (2), $k=2$	CF1 (7)	CF2 (8)
1	0.0593	0.0153	0.0121	0.0190	0.0149
5	0.0290	0.0057	0.0015	0.0067	0.0029
10	0.0207	0.0024	0.0004	0.0032	0.0010
20	0.0148	0.0012	0.0002	0.0015	0.0003
30	0.0121	0.0008	0.0001	0.0010	0.0002
40	0.0105	0.0006	0.0001	0.0007	0.0001

が(6)に対する近似である。Yが $N(0,1)$ に従う変数のとき $F_n^{-1}\Phi(Y)$ は分布 F_n に従う変数である。このことから、近似式(9),(10)は、 F_n のパーセント点を $N(0,1)$ のそれを使って近似計算するために使われる。

表1と表2は、いくつかの n の値に対するEdgeworth展開(2)($k=1$ と2)およびCornish-Fisher展開(7),(8)の最大誤差の例である。前者については $\sup_x |R_{k+2,n}(x)|$ を、また後者については、 $\sup_x |\Phi(y) - F_n(x)|$, $j=1, 2$ を示してある。

4. 正規化のための変換

前節の例はCornish-Fisher展開によって、中心極限定理による近似が相当程度改良され得ること、少なくともその可能性があることを示している。これをさらに改良するのがこの論文の目的である。

以下 $\alpha_3 > 0$ とする。分布 F の重心が左に偏っていて、左側に比べて右側の裾がやや重い、という場合である。この分布からの標本に基づく標準化された和 S_n の分布 F_n もこのような性質をもっており、その確率密度はたとえば図1のようになる。

中心極限定理によって、 S_n は近似的に正規分布に従う。 S_n の一つの実現値を x とすると、Cornish-Fisherの変換(7)の第2項は、正規近似をよくするための修正項とみることができ

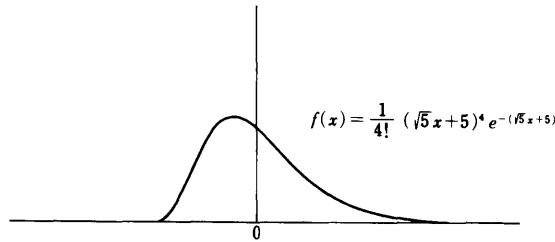


図1. $\alpha_3 > 0$ の分布の例

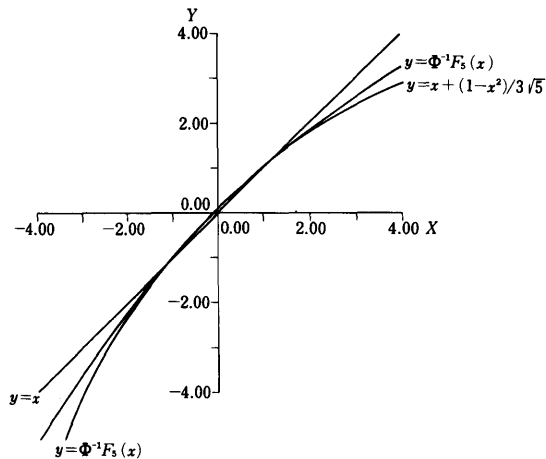


図2. 正確な変換とその近似

る。この項が S_n の分布 F_n の偏りを小さくするように働くことは容易に理解されるであろう。しかし、 n が余り大きくないとき、大きな $x (> 1)$ に対する修正は、負の方向に大きくなり過ぎてしまう可能性がある。図 2 は $F(x) = 1 - e^{-x}$ の場合について、 $y = x$ 、 $y = \Phi^{-1}F_n(x)$ および、その近似としての Cornish-Fisher 変換 $y = x + (1 - x^2)/3\sqrt{5}$ を画いたものである。 x が大きいところで y_1 の修正項がきき過ぎていること、反対側ではむしろ修正が不十分であることが分る。次の点を考慮して、別の変換を考える。

- (i) 変換はなるべく簡単で一般性のあること。
- (ii) 大きな n に対しては、少なくとも Cornish-Fisher 展開と同程度の近似精度が得られること。
- (iii) 小さな n に対しても十分によい近似を与えるものであること。

小西 (1981) はこれと同じ趣旨で、ある種の optimality を考慮して変換を作る方法を提案している。ここで述べるものは、原理的には簡単な、しかし、いささか、ad hoc な方法である。まず、正規分布 $N(0,1)$ の分布関数 $\Phi(y)$ を $y = x$ のまわりで展開して、

$$\Phi(y) = \Phi(x) + \varphi(x)(y-x) - \frac{1}{2}x^*\varphi(x^*)(y-x)^2, \quad |x-x^*| \leq |x-y|$$

と表わしておく。これと Edgeworth 展開 (2), $k=1$, から、

$$(11) \quad F_n(x) = \Phi(y) + U_n(x) + V_n(x) + R_{3,n}(x)$$

である。ただし、

$$(12) \quad U_n(x) = -(y-x - \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}(1-x^2))\varphi(x)$$

$$(13) \quad V_n(x) = \frac{1}{2}x^*\varphi(x^*)(y-x)^2$$

とする。問題は $\sup |F_n(x) - \Phi(y)|$ がなるべく小さくなるように $y = y(x)$ を決めてやることである。 $|U_n + V_n + R_{3,n}|$ を小さくすればよいが、一般論としては、 F_n に関して使える情報は α_3 の値だけである。 $R_{3,n}$ が難物で、 $|U_n + V_n + R_{3,n}|$ の最小化を直接目指すのは困難と思われる。 $R_{3,n}$ については、(3) のような評価式もあるので、当面この項を無視して、 $|U_n + V_n|$ を小さくすることを考える。

Cornish-Fisher 展開 (7) は、 $U_n(x) \equiv 0$ によって y を定義したものであり、 $|V_n(x)|$ が十分小さい、という保障はない。ここでは $y = x$ に対する修正項として、

$$r(1+\delta x)^\varepsilon$$

またはこれに近いものを考える。 $0 < \varepsilon < 1$ にとることによって、修正が大きくなり過ぎるのを防ぐことができる、という期待があるからである。もう少し一般化して、変換を

$$(14) \quad y = \alpha + \beta x + r \{(1+\delta x)^\varepsilon - 1\}$$

とする。 $\beta = 0$ のとき、この形は Bol'shev (1959) が与えたものと同等である。最後の項を展開して、

$$(15) \quad y = \alpha + (\beta + \gamma\varepsilon\delta)x + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon(1-\varepsilon)\delta^2x^2 + \frac{1}{6}\gamma\varepsilon(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\delta^3x^3 + \dots$$

であるが、条件(ii)を満たすためには、 $U_n(x) = O(1/n)$ であることが必要かつ十分である (Bol'shev (1959)) ので $O(1/n)$ の項を無視して、

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha_3 / 6\sqrt{n}, \\ \beta + \gamma\epsilon\delta = 1, \\ \gamma\epsilon(1-\epsilon)\delta^2 = 2\alpha_3 / 6\sqrt{n} \end{cases}$$

の解として, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ を決めなければならない. もちろん, 無数の解があるが, 一つの簡単な解,

$$\beta = 0, \gamma = \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \frac{6\sqrt{n}}{\alpha_3}, \delta = \frac{2}{1-\epsilon} \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}, \quad 0 < \epsilon < 1$$

をとって, 変換

$$(17) \quad \text{SP}_1(\epsilon): y = A + \frac{1-\epsilon}{2\epsilon} \frac{1}{A} \left\{ \left(1 + \frac{2}{1-\epsilon} Ax \right)^\epsilon - 1 \right\}$$

$$(18) \quad A = \alpha_3 / 6\sqrt{n}$$

が得られる. $0 < \epsilon < 1$ は任意であるが, いくつかの分布での経験では $\epsilon = 1/3$ がよいようで, このとき

$$(19) \quad \text{SP}_1(1/3): y = A + \frac{1}{A} \{ (1 + 3Ax)^{1/3} - 1 \}$$

である. $1 + 3Ax \leq 0$ に対してはこの変換は定義されないが, このときは $1 + 3Ax = 0$ と置き

$$y = A - 1/A$$

と定義する.

同様に考えて, Cornish-Fisher 展開 (8) を

$$(20) \quad \begin{aligned} y_2 &= x + A(1-x^2) + Bx + Cx^3, \\ B &= \{9(\alpha_4 - 3) - 14\alpha_3^2 + 3/\sigma^2\} / 72n \\ C &= \{8\alpha_3^2 - 3(\alpha_4 - 3)\} / 72n \end{aligned}$$

と書いたとき, これと (15) から $o(1/n\sqrt{n})$ を無視して,

$$\begin{cases} \alpha = A \\ \beta + \gamma\epsilon\delta = 1 + B \\ \gamma\epsilon(1-\epsilon)\delta^2 = -2A \\ \gamma\epsilon(1-\epsilon)(2-\epsilon)\delta^3 = 6C \end{cases}$$

である. これの一つの解を (14) に代入して,

$$\begin{aligned} \text{SP}_2(\epsilon): y &= A + \left\{ 1 - \frac{2(2-\epsilon)}{3(1-\epsilon)} \frac{A^2}{C} \right\} x \\ &+ \frac{2-\epsilon}{3\epsilon} \frac{A}{C} \left(\frac{2(2-\epsilon)}{3(1-\epsilon)} \frac{A^2}{C} + B \right) \left\{ \left(1 + \frac{3}{2-\epsilon} \frac{C}{A} x \right)^\epsilon - 1 \right\} \end{aligned}$$

が得られる. $0 < \epsilon < 1$ であるが, とくに, $\epsilon = 1/4$ にとると,

$$(21) \quad \text{SP}_2(1/4): y = A + \left(1 - \frac{14}{9} \frac{A^2}{C} \right) x + \left(\frac{98}{27} \frac{A^3}{C^2} + \frac{7}{3} \frac{AB}{C} \right) \left\{ \left(1 + \frac{12}{7} \frac{C}{A} x \right)^{1/4} - 1 \right\}$$

となる.

ところで (5) と (6) とは互いに他の逆関数になっているが, これらを近似する (7) と (9) とは近似的に逆関数になっているに過ぎない. 実際, $y_1(x_1(y))$ と y との違い, あるいは $x_1(y_1(x))$

と x との違いは無視できるほど小さくはない ($1/\sqrt{n}$ の order である) から、一方がよい近似式になっている場合には、他方がよい近似になっていることは疑わしいとしなければならないであろう。しかし、もし (5) を精度よく近似する変換があれば、その逆関数は (6) のよい近似式になっている筈である。だから、(19) が (5) のよい近似を与えていると見做される場合には、(6) の近似として、(19) の逆関数

$$(22) \quad \text{SI}_1(1/3): x_0 = \{(1+(y-A)A)^3 - 1\} / 3A$$

を使うことができる。SP₁(1/3) と SI₁(1/3) とは、

$$(23) \quad \sup_x |F_n(x) - \Phi(y_1)| = \sup_y |F_n(x_0) - \Phi(y)|$$

という意味で、同じ近似誤差をもつ。

変換 SP₂(1/4) は SP₁(1/3) よりよい近似を与えるものと期待されるが、逆関数が簡単には求まらない。SP₂(1/4) の代りに、(16) で $\beta=0$ と置いたものを使うとよい:

$$(24) \quad \text{SP}: y = \alpha + \gamma \{(1 + \delta x)^\epsilon - 1\}$$

これと (22) とが $O(1/n)$ の項まで一致するよう $\alpha, \gamma, \delta, \epsilon$ を選ぶ。一つの選択は、

$$(25) \quad \begin{cases} \alpha = A \\ \gamma = \frac{A(1+B)^2}{3C(1+B) - 4A^2} \\ \delta = \frac{3C(1+B) - 2A^2}{A(1+B)} \\ \epsilon = \frac{3C(1+B) - 4A^2}{3C(1+B) - 2A^2} \end{cases}$$

あるいは、これをもっと簡略化した

$$(26) \quad \begin{cases} \alpha = A \\ \gamma = \frac{A(1+B)^2}{3C - 4A^2} \\ \delta = \frac{3C(1+B) - 2A^2}{A(1+B)} \\ \epsilon = \frac{3C - 4A^2}{3C - 2A^2} \end{cases}$$

である。SP の逆関数

$$(27) \quad \text{SI}: x = \{(1 + (y - \alpha)/\gamma)^{1/\epsilon} - 1\} / \delta$$

が、 $x = F_n^{-1}\Phi(y)$ の 1 つの近似式である。

3. 誤差の評価

$y = y(x)$ を前節の近似式 SP₁(1/3) あるいは SP₂(1/4) とする。分布 F からの標本の基準化された和を S_n とすれば $y(S_n)$ は近似的に正規分布 $N(0,1)$ に従うと期待される。近似の誤差

$$\Delta_n(x) = |\Pr\{S_n \leq x\} - \Phi(y(x))|$$

が問題になる。この節では SP₁(1/3) について、

$$(28) \quad |\Delta_n(x)| \leq 0.95a_3^2/n + |R_{3,n}(x)|$$

が成り立つことを証明する。とくに、 F が単峰のときには、(4)と(28)から

$$(29) \quad \sup |\Delta_n(x)| \leq \frac{1}{n\pi} \{6(1+4(\sup f(x))^2)a_4 + 4a_3^2 + |a_3|a_4\}$$

という評価式が成り立つことになる。

以下、 $A \equiv a_3/6\sqrt{n} \leq 1/2$ を仮定する。チェビシエフの不等式によって、 $x \leq -1/3A$ に対しては、(28)が成り立つことは自明である。 $x > -1/3A$ の場合だけを考える。まず、(12)、(13)で定義した U_n, V_n が $x > -1/3A$ においてそれぞれ不等式

$$(30) \quad |U_n(x)| \leq 20A^2$$

および

$$(31) \quad |V_n(x)| \leq 30A^2$$

を満足することを示す。0とxの間に \bar{x} を適当にとると、

$$(32) \quad \begin{aligned} \xi(x) &\equiv y - x - A \cdot (1 - x^2) \\ &= \frac{5}{3}A^2 \cdot (1 + 3A\bar{x})^{-8/3} x^3 \end{aligned}$$

と書ける。 $c=0.235$ と置く。 $x \geq -c/A$ に対して $|1+3A\bar{x}|^{-8/3} \leq (1-3c)^{-8/3} \leq 25.94$ だから、(32)から、

$$\sup_{x \geq -c/A} |U_n(x)| \leq \frac{5}{3}A^2 \cdot 25.94(\sqrt{3})^3 \varphi(\sqrt{3}) \leq 20A^2.$$

また、 $\xi(x)$ は単調増加で $\xi(0)=0$ であることから

$$\begin{aligned} \sup_{-1/3A \leq x \leq -c/A} |U_n(x)| &\leq \left| \xi\left(-\frac{1}{3A}\right) \right| \varphi(-c/A) = \frac{5}{9A} \varphi\left(\frac{c}{A}\right) \\ &= \frac{5}{9c^3} A^2 \left(\frac{c}{A}\right)^3 \varphi\left(\frac{c}{A}\right) \leq 20A^2. \end{aligned}$$

これで(30)がいえた。

次に、

$$(33) \quad \eta(x) \equiv x - y = x - A - \frac{1}{A} \{(1 + 3Ax)^{1/3} - 1\} = \left\{ \frac{A}{3}(y-A)^3 + (y-A)^2 - 1 \right\} A$$

である。 $x \geq 0$ のときはyの定義式(19)によって $y-A \geq 0$ となるから(33)から

$$-A \leq \eta(x) \leq \left(\frac{A}{3}y^3 + y^2 - 1\right)A \leq y^3A$$

である。とくに $x \geq y \geq 1$ なら $x^* \geq y \geq 1$ 、

したがって、

$$|V_n(x)| \leq \frac{1}{2}y\varphi(y)(y^3A)^2 \leq 6A^2.$$

また $y \leq 1$ か、あるいは $x \leq y$ ならば、 $|\eta(A)| \leq A$ となるので、結局 $x \geq 0$ に対して(31)が成り立つ。次に、 $x \leq 0$ とする。 $\eta(x)$ は単調減少である。とくに、 $0 \leq \eta(-1) \leq 2A$ だから、 $-1 \leq x \leq 0$ に対して $|V_n(x)| \leq 2A^2$ となり、(31)は正しい。最後に $-1/3A \leq x \leq -1$ とする。このとき $\leq x \leq -1$ だから、 $x^* \leq x \leq -1$ となり、とくに

$$|x^*| \varphi(x^*) \leq |x| \varphi(x)$$

である。

$$c = (1 - (1 - \sqrt{2/3})^3)/3, \quad q = (1 - (1 - 3c)^{1/3})/c$$

とおく。容易に確かめられるように、 $-c/A \leq x \leq -1$ に対して $\eta(x) \geq 0 \geq y - A \geq qx$ が成り立つから、(33)を使って、

$$\sup_{-c/A \leq x \leq -1} |V_n(x)| \leq \frac{1}{2} |x| \varphi(x) \eta^2(x) \leq \frac{1}{2} q^4 A^2 |x|^5 \varphi(x) \leq 34A^2.$$

また、 $\eta(x)$ の減少性を使って

$$\begin{aligned} \sup_{-1/3A \leq x \leq -c/A} |V_n(x)| &\leq \frac{1}{2} \left| -\frac{c}{A} \right| \varphi\left(-\frac{c}{A}\right) \eta^2\left(-\frac{1}{3A}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{c}{A} \varphi\left(\frac{c}{A}\right) \left(\frac{2}{3A}\right)^2 = \frac{2}{9c^4} A^2 \left(\frac{c}{A}\right)^5 \varphi\left(\frac{c}{A}\right) \\ &\leq 34A^2. \end{aligned}$$

これで(31)も証明された。

さて、 $x \leq -1$ および $x \geq 0$ において、 $U_n(x)$ と $V_n(x)$ は異符号であり、上の証明から分るように $-1 \leq x \leq 0$ において $|U_n(x)| \leq 20A^2$ かつ、 $|V_n(x)| \leq 2A^2$ であるから、結局、すべての $x \geq -1/3A$ に対して、

$$(34) \quad |U_n(x) + V_n(x)| \leq 34A^2 \leq 0.95\alpha_3^2/n$$

が成り立つことになり、(28)が証明された。

評価式(34)はさらに改良の余地はあるが、本当の誤差は $|U_n(x) + V_n(x) + R_{3,n}(x)|$ であり、 $R_{3,n}$ に関する十分によい誤差評価ができない限り、(34)を改良することは余り意味はない。むしろ、実例によって真の誤差の程度がどれ位であるかをみておく事が必要であろう。次の節でそれを行う。

4. 数値的な検討

Cornish-Fisher 展開はもちろん、§2で定義した SP_1, SP_2, SP などは特定の分布を対象としたものではなく、適当な条件を満たす分布に対して一般に適用できるものである。しかし、前節で述べた誤差評価などは十分でないので、実際に使ってみるためには、いくつかの分布についての経験が必要である。また、これらは分布 F のモーメントだけを使う近似法であるけれども、特定の分布に対しては、適当な修正によってさらに精度をあげることも可能になる。この節では、そのような修正も含めて、いくつかのよく知られた近似法との数値的な比較を行う。

(I) ガンマ分布 $G(\lambda)$, $\lambda \geq 1$

確率密度

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-x}, \quad x > 0$$

をもつガンマ分布 $G(\lambda)$ は、平均 $\mu = \lambda/[\lambda]$ をもつガンマ分布 $G(\mu)$ からの大きさ $n = [\lambda]$ の標本 X_1, X_2, \dots, X_n の和 $G = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ の分布である。

$$\sigma^2 = \mu = \lambda/[\lambda], \quad \alpha_3 = 2\sqrt{1/\mu}, \quad \alpha_4 = 6/\mu + 3$$

表3. ガンマ分布の近似の誤差
(最大誤差×10000)

λ	$SP_1(1/3)^*$ (36)	$SP_2(1/4)$ (37)	SP (38)
1	121.90	75.56	503.28
5	12.69	2.65	5.85
10	6.06	0.96	1.43
20	2.90	0.35	0.41
30	1.90	0.19	0.21
40	1.40	0.13	0.13

*) Wilson-Hilferty の近似

となるから, Cornish-Fisher 展開 (20) の係数は

$$(35) \quad A = \frac{1}{3\sqrt{\lambda}}, \quad B = -\frac{1}{36\lambda}, \quad C = \frac{7}{36\lambda}$$

である. 変数 G の実現値を g とすると, $x = (g - \lambda) / \sqrt{\lambda}$ が標準化された和 $S_n = (G - \lambda) / \sqrt{\lambda}$ の実現値である. 前節で述べた変換 (19), (21) および (24) と (26) は, それぞれ,

$$(36) \quad SP_1(1/3): y_1 = \frac{1}{3\sqrt{\lambda}} + 3\sqrt{\lambda} \left\{ \left(\frac{g}{\lambda} \right)^{1/3} - 1 \right\}$$

$$(37) \quad SP_2(1/4): y_2 = \xi(g, \lambda) \equiv \frac{1}{9\sqrt{\lambda}} \left\{ g - 33\lambda + 4 + (32\lambda - 1) \left(\frac{g}{\lambda} \right)^{1/4} \right\}$$

および

$$(38) \quad SP: y_3 = \frac{1}{3\sqrt{\lambda}} + \frac{12\sqrt{\lambda}}{5} \left(1 - \frac{1}{36\lambda} \right) \left\{ \left(\frac{13g - \lambda}{12\lambda} \right)^{5/13} - 1 \right\}$$

である. $SP_1(1/3)$ は Wilson-Hilferty (1931) の近似としてよく知られているものである. $SP_2(1/4)$ はこれよりやや複雑だが, 加減乗除の演算の他 $\sqrt{\quad}$ だけが必要で, メモリー1つのついた電卓で計算が可能である. 表3は上記3つの近似式の誤差をいくつかの λ の値について求めたものである. 表1と合わせて見よ.

Cornish-Fisher 展開 (10) はいまの場合, $x_1 = y - (1 - y^2) / 3\sqrt{\lambda}$ となる. y が $N(0, 1)$ の $100\alpha\%$ 点 u_α なら, x_1 は標準化された変数 $(G - \lambda) / \sqrt{\lambda}$ の $100\alpha\%$ 点の近似値である. ゆえに, $G(\lambda)$ の $100\alpha\%$ 点は

$$(39) \quad CF1: g = \sqrt{\lambda} u_\alpha - (1 - u_\alpha^2) / 3 + \lambda$$

で近似される. 同様にして, Cornish-Fisher 展開 (11) は

$$x_2 = y - (1 - y^2) / 3\sqrt{\lambda} - (7y - y^3) / 36\lambda$$

で, これに対応する $G(\lambda)$ の $100\alpha\%$ 点の近似値は

$$(40) \quad CF2: g = \sqrt{\lambda} u_\alpha - (1 - u_\alpha^2) / 3 - (7u_\alpha - u_\alpha^3) / 36\sqrt{\lambda} + \lambda$$

である.

(36) の SP_1 と (38) の SP_3 は容易に逆関数が求まる:

$$(41) \quad SI_1(1/3): g = \lambda \left(1 - \frac{1}{9\lambda} + \frac{u_\alpha}{3\sqrt{\lambda}} \right)^3$$

表 4. ガンマ分布のパーセント点 g の近似精度, $\lambda = 10$

$$\left(\left(\int_0^g \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-x} dx - \alpha \right) \times 10000 \text{ の値} \right)$$

α	CF1 (39)	CF2 (40)	WHI (41)	SI ₃ (42)
0.10	-45.10	0.39	2.07	0.94
0.15	-51.75	-0.71	4.22	0.78
0.20	-52.05	-1.50	5.49	0.73
0.25	-48.13	-2.05	6.02	0.74
0.30	-41.38	-2.42	5.96	0.78
0.35	-32.77	-2.63	5.44	0.83
0.40	-23.05	-2.73	4.56	0.88
0.45	-12.84	-2.72	3.42	0.92
0.50	- 2.64	-2.64	2.11	0.95
0.55	7.11	-2.47	0.74	0.96
0.60	15.97	-2.25	-0.63	0.95
0.65	23.55	-1.97	-1.89	0.92
0.70	29.44	-1.63	-2.94	0.88
0.75	33.22	-1.24	-3.70	0.83
0.80	34.38	-0.80	-4.04	0.77
0.85	32.36	-0.32	-3.82	0.72
0.90	26.40	0.20	-2.88	0.67
0.95	15.47	0.66	-1.06	0.62

および

$$(42) \quad SI_3: g = \frac{\lambda}{13} \left\{ 1 + 12 \left(1 + \frac{15\sqrt{\lambda}}{36\lambda - 1} \left(u_\alpha - \frac{1}{3\sqrt{\lambda}} \right) \right)^{13/5} \right\}$$

が $G(\lambda)$ の $100\alpha\%$ 点の近似値を与える。SI₁(1/3) は Wilson-Hilferty の変換である。表 4 はいくつかの数値例である。

(II) ポアソン分布 $P_0(\lambda)$

平均 λ のポアソン分布 $P_0(\lambda)$: $\Pr\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ に対する Cornish-Fisher 展開の係数は、

$$(43) \quad A = \frac{1}{6\sqrt{\lambda}}, \quad B = -\frac{1}{36\lambda}, \quad C = \frac{5}{72\lambda}$$

である。

$$x = (k - \lambda + 1/2) / \sqrt{\lambda}$$

と置き、

$$(44) \quad SP_1(1/3): y = \frac{1}{6\sqrt{\lambda}} + 6\sqrt{\lambda} \left\{ \left(1 + \frac{x}{2\sqrt{\lambda}} \right)^{1/3} - 1 \right\}$$

$$(45) \quad SP_2(1/4): y = \frac{17}{60\sqrt{\lambda}} + \frac{x}{15} + \frac{196}{75}\sqrt{\lambda} \left\{ \left(1 + \frac{5}{112\lambda} x \right)^{1/4} - 1 \right\}$$

である。

竹内 (1975) は変換

$$(46) \quad TA: y = \frac{3}{2}\sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{1}{36\lambda} \right) \left\{ \left(\frac{k+1/2}{\lambda} \right)^{2/3} - \left(1 - \frac{1}{9\lambda} \right) \right\}$$

を、また Molenaar (1970, p. 62) は

$$(47) \quad \text{Mol: } y = 2\{\sqrt{k+(t+4)/9} - \sqrt{\lambda+(t-8)/36}\}$$

$$(48) \quad t = (k - \lambda + 1/6)^2 / \lambda$$

をそれぞれ提案している。その他、よく知られた高精度の近似として Peizer-Pratt (1968) の変換がある。

$$(49) \quad \text{PP: } y = \frac{k - \lambda + 2/3 + 1/50(k+1)}{|k+1/2-\lambda|} \left\{ (2k+1) \log \frac{2k+1}{2k} + (2\lambda - 2k - 1) \right\}^{1/2}$$

である。

ところで、 X がポアソン分布 $P_0(\lambda)$, A がガンマ分布 $G(k)$ に従う変数のときは、よく知られているように、

$$\Pr\{X \leq k\} = \Pr\{A > \lambda\}$$

という関係がある。したがって、ガンマ分布のよい近似があれば、それを使ってポアソン分布が近似できる筈である。実際、たとえば ξ を (37) で定義すると $\xi(A, \lambda)$ が近似的に $N(0, 1)$ に従うから、上の関係から、 $-\xi(\lambda, X+1)$ の分布も $N(0, 1)$ で近似できる。こうして、次のポアソン変数の正規化変換が得られる：

$$(50) \quad \text{SP}_2(GP): y = -\frac{1}{9\sqrt{k+1}} \left\{ \lambda - 33k - 29 + (32k+31) \left(\frac{\lambda}{k+1} \right)^{1/4} \right\}$$

(III) 負の2項分布 $NB(\alpha, \theta)$

この項では、記号と記述を簡単にするために、分布“G”をもつ確率変数を表わすのに、分布の名前と同じ“G”を使う。負の2項分布

$$\Pr\{NB(\alpha, \theta) = k\} = \binom{-\alpha}{k} (-\theta)^k (1+\theta)^{-\alpha-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

は独立な α 個の $NB(1, \theta)$ (幾何分布) の和で表わされる。 $\mu = \theta, \sigma^2 = \theta(1+\theta), \alpha_3 = (1+2\theta)/\sqrt{\theta(1+\theta)}, \alpha_4 = (1+9\theta+9\theta^2)/\theta(1+\theta)$ となるから、これから Cornish-Fisher 展開の係数が求まり、変換 $\text{SP}_1(1/3)$ や $\text{SP}_2(1/4)$ が定義される。しかし、その近似は $\theta < 1$ に対して十分よくはない。それを改良するには、負の2項分布に関する次の関係式を使う。

$$\Pr\{NB(\alpha, \theta) \leq k\} = \Pr\{NB(k+1, 1/\theta) \geq \alpha\}$$

表5. ポアソン分布の近似誤差
(最大誤差 × 100000)

λ	PP (49)	Mol (47), (48)	TA (46)	$\text{SP}_1(1/3)$ (44)	$\text{SP}_2(1/4)$ (45)	$\text{SP}_2(GP)$ (50)
1	363.56	366.12	1501.71	1663.83	1231.68	156.18
5	17.97	20.26	177.90	266.08	90.28	30.10
10	2.45	6.22	58.03	107.84	28.41	10.40
20	0.50	1.91	21.60	48.27	9.43	3.62
30	0.22	0.97	12.66	30.23	5.05	1.96
40	0.13	0.60	8.79	21.76	3.25	1.28
50	0.09	0.41	6.66	17.07	2.31	0.91
60	0.07	0.30	5.35	13.91	1.75	0.70

$\theta \geq 1$ のとき

$$\gamma = \alpha, \quad \omega = \theta, \quad u = k,$$

$\theta < 1$ のとき,

$$\gamma = k+1, \quad \omega = 1/\theta, \quad u = \alpha - 1$$

とおき, 確率

$$\Pr\{NB(\alpha, \omega) \leq u\}$$

を近似すればよいのである。いつでも $\omega \geq 1$ である。Cornish-Fisher 展開の係数は

$$(51) \quad A = \frac{1+2\omega}{6\sqrt{\gamma\omega(1+\omega)}}, \quad B = -\frac{1+\omega+\omega^2}{32\gamma\omega(1+\omega)}, \quad C = \frac{5+14\omega+14\omega^2}{72\gamma\omega(1+\omega)}$$

となるから,

$$(52) \quad x = \frac{u - \gamma\omega + 1/2}{\sqrt{\gamma\omega(1+\omega)}}$$

とおいて, 変換 (19) と (21) を使うことができる。

負の 2 項分布はまた, 第 2 種ベータ分布,

$$\Pr\{Be(p, q) \leq x\} = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^x u^{p-1}(1+u)^{-p-q} du$$

との間に,

$$(53) \quad \Pr\{NB(\alpha, \theta) \leq k\} = \Pr\{Be(k+1, \alpha) > \theta\}$$

という関係がある。したがって, $Be(p, q)$ が近似できれば $NB(\alpha, \theta)$ も近似できる筈である。 $Be(p, q)$ はたくさんの独立な変数の和として表すことができないから, 前節までに述べた方法はそのままでは使う根拠をもたない。しかし, $Be(p, q)$ は互いに独立な $G(p)$ と $G(q)$ の比で表わされ, Wilson-Hilferty (36) によって $G^{1/3}(p)$, $G^{1/3}(q)$ がそれぞれ正規分布で近似できることから $Be(p, q)$ を正規分布で近似するための変換が得られる (Paulson (1942))。これと (53) から, $NB(\alpha, \theta)$ を正規近似するための変換

$$(54) \quad \text{PAU: } y = \frac{1 - 1/9\alpha - (1 - 1/9(k+1))(\alpha\theta/k+1)^{1/3}}{\sqrt{1/9(k+1) + (\alpha\theta/(k+1))^{2/3}/9(k+1)}}$$

が導かれる。詳細は略す。

もっと簡単な変換としては, Fisher の近似,

$$(55) \quad \text{FIS: } y = \frac{2}{\sqrt{1+\theta}} \{\sqrt{k+3/4} - \sqrt{(\alpha-1/4)\theta}\}$$

がある。(竹内・藤野 (1983) をみよ)。

(IV) 非心カイ 2 乗分布 $\chi_n^2(\lambda)$

Z_1, Z_2, \dots, Z_n を正規分布 $N(\nu, 1)$ からの標本とする。

$$G \equiv Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$$

は自由度 n , 非心率 $\lambda = n\nu^2$ の非心カイ 2 乗分布 $\chi_n^2(\lambda)$ に従う。

$$\mu = E(Z_1^2) = 1 + \nu^2, \quad \sigma^2 = \text{Var} Z_1^2 = 2(1 + 2\nu^2)$$

とおくと基準化された変数 $X = (Z_1^2 - \mu)/\sigma$ につき,

表6. 負の2項分布の近似誤差
(最大誤差 × 10000)

α	CF1 (8)	CF2 (22), (51) $\alpha = \gamma, \theta = \omega$	FIS (55)	PAU (54)	SP ₁ (1/3) (21), (51)	SP ₂ (1/4) (22), (51)	
$\theta = 0.25$	1	9892.21	399.99	192.89	18.83	69.94	29.04
	5	1896.39	200.34	168.37	18.11	39.83	22.35
	10	377.51	103.34	127.80	16.33	23.64	10.49
	20	99.56	48.51	97.51	7.12	10.86	3.86
	30	67.49	24.45	79.87	4.73	7.21	2.06
	40	48.46	16.44	69.81	3.54	5.38	1.32
$\theta = 1.0$	1	9902.11	489.05	91.13	4.57	225.69	162.10
	5	1032.07	128.19	39.99	3.47	20.77	11.84
	10	112.51	48.08	19.02	2.31	9.03	3.95
	20	52.92	17.79	9.24	1.27	4.12	1.36
	30	34.93	9.73	6.01	0.87	2.65	0.73
	40	25.92	6.31	4.44	0.65	1.95	0.47
$\theta = 4.0$	1	9924.40	450.16	192.89	28.12	90.19	29.04
	5	767.49	98.97	97.51	7.77	14.20	4.21
	10	98.24	39.05	69.81	3.82	6.58	1.22
	20	45.69	14.16	49.63	1.86	3.10	0.44
	30	29.93	7.69	40.59	1.22	2.01	0.24
	40	22.29	4.97	35.18	0.90	1.48	0.16

$$\alpha_3 = E(X^3) = \frac{\sqrt{8}(1+3\nu^2)}{(1+2\nu^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{8}(n+3\lambda)}{(n+2\lambda)^{3/2}} \sqrt{n},$$

$$\alpha_4 = E(X^4) = 3 + \frac{12(1+4\nu^2)}{(1+2\nu^2)^2} = 3 + \frac{12(n+4\lambda)}{(n+2\lambda)^2} n.$$

である。これより Cornish-Fisher 展開 (20) の係数は

$$(56) \quad A = \frac{\sqrt{2}(n+3\lambda)}{3(n+2\lambda)^{3/2}}, \quad B = -\frac{n^2+6n\lambda+36\lambda^2}{18(n+2\lambda)^3}, \quad C = \frac{7n^2-42n\lambda+72\lambda^2}{18(n+2\lambda)^3}$$

で与えられる。 $G = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ の実現値 g に対して

$$x = \frac{g - n\mu}{\sqrt{n\sigma}} = \frac{g - (n + \lambda)}{\sqrt{2(n + 2\lambda)}}$$

とにおいて、Cornish-Fisher 展開や、変換 $SP_1(1/3)$, $SP_2(1/4)$, SP_3 などが求まる。とくに、

$$(57) \quad CFI: y = x + \frac{\sqrt{2}(n+3\lambda)}{3(n+2\lambda)^{3/2}}(1-x^2)$$

$$(58) \quad SP_1(1/3): y = \frac{\sqrt{2}(n+3\lambda)}{3(n+2\lambda)^{3/2}} + \frac{3(n+2\lambda)^{3/2}}{\sqrt{2}(n+3\lambda)} \left\{ \left(1 + \frac{(n+3\lambda)(g-n-\lambda)}{(n+2\lambda)^2} \right)^{1/3} - 1 \right\}$$

である。

Sankaran (1963) は変換

$$(59) \quad SK: y = ((g/(n+\lambda))^h - q)/\tau$$

表7. 非心カイ2乗分布の近似誤差
 非心率=5.0
 (最大誤差×10000)

<i>df.</i>	CF1 (57)	CF2 (22), (56)	S.K (59)-(62)	SP ₁ (1/3) (58)	SP ₄ (1/4) (21), (56)	SP (24), (25), (56)
1	4838.51	560.17	72.05	322.19	224.52	131.21
5	1340.16	149.47	21.40	48.91	26.17	26.96
10	328.12	74.29	13.13	22.23	5.06	8.98
20	86.41	34.20	6.69	8.78	1.68	2.59
30	57.88	19.97	4.28	5.06	0.82	1.25
40	43.46	13.31	3.10	3.47	0.49	0.75

を提案している。ただし

$$(60) \quad h = 1 - \frac{2(n+\lambda)(n+3\lambda)}{3(n+2\lambda)^2}$$

$$(61) \quad q = 1 + h(h-1) \frac{n+2\lambda}{(n+\lambda)^2} + h(h-1)(1-3h) \frac{(n+2\lambda)^2}{2(n+\lambda)^4}$$

および

$$(62) \quad \tau^2 = h^2 \frac{2(n+2\lambda)}{(n+\lambda)^2} + h^2(h-1)(1-3h) \frac{2(n+2\lambda)^2}{(n+\lambda)^4}$$

である。(58)と(59)は逆関数が簡単に求まり、 u_α が $N(0, 1)$ の $100\alpha\%$ 点ならば、

$$(63) \quad \text{SI}_1(1/3): g = n + \lambda + \frac{(n+2\lambda)^2}{n+3\lambda} \left\{ \left(1 + \frac{\sqrt{2}(n+3\lambda)}{(n+2\lambda)^{3/2}} \left(u_\alpha - \frac{\sqrt{2}(n+3\lambda)}{(n+2\lambda)^{3/2}} \right) \right)^3 - 1 \right\}$$

および、

$$(64) \quad \text{SKI}: g = (n+\lambda)(q + \tau u_\alpha)^{1/h}$$

はそれぞれ $\chi^2_n(\lambda)$ の $100\alpha\%$ 点の近似値を与える

謝 辞

ここで述べた正規化変換のもっと古い形のは日本数学会の特別講演「中心極限定理とその周辺」(昭和52年10月)で発表したが、その際には誤差評価に必要な数値計算は杉山(旧姓大久保)逸子さんをわずらわせた。また、複数の査読者からは有益なご助言をいただいた。感謝いたします。

参 考 文 献

- Bol'shev, L.N. (1959). On transformations of random variables, *Theory of Prob. and its Apply.*, 4, 129-141.
- Cornish, E.A. and Fisher, R.A. (1937). Moments and cumulants in the specification of distributions, *Extrait de la Revue de l'Inst. International de Statist.*, 4, 1-14.
- Cramér, H. (1970). *Random Variables and Probability Distributions*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press. (初版は1937).

- Edgeworth, F.Y. (1905). The law of error, *Camb. Phil. Soc. Proc.*, **20**, 36-141.
- Efron, B. (1982). Transformation theory: How normal is a family of distributions?, *The Annals of Statistics*, **10**, 323-339.
- Konishi, S. (1981). Normalizing transformations of some statistics in multivariate analysis, *Biometrika*, **68**, 647-651.
- Molenaar, W. (1970). *Approximations to the Poisson, Binomial and Hypergeometric Distributions*, Mathematisch Centrum, Amsterdam.
- Paulson, E. (1942). An approximate normalization of the analysis of variance distribution, *Ann. Math. Stat.*, **13**, 233-235.
- Peizer, D.B. and Pratt, J.W. (1968). A normal approximation for binomial, F, beta and other common, related tail probabilities, *Jour. Amer. Statist. Assoc.*, **63**, 1417-1456, 1457-1483.
- Petrov, V.V. (1975). *Sums of Independent Random Variables*, Springer.
- Sankaran, M. (1963). Approximations to the non-central chi-square distribution, *Biometrika*, **50**, 199-204.
- 柴田義貞 (1981). 正規分布, 東京大学出版会.
- Shimizu, R. (1974). On the remainder term for the central limit theorem, *Annals of Inst. Statist. Math.*, **26**, 195-201.
- 清水良一 (1976). 中心極限定理, 教育出版.
- 竹内 啓 (1975). 確率分布の近似, 教育出版.
- 竹内 啓・藤野和建 (1981). 2項分布とポアソン分布, 東京大学出版会.
- Wilson, E.B. and Hilferty M.M. (1931). The distribution of chi-square, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **17**, 684-688.

Normal Approximation for Asymmetric Distributions

Ryoichi Shimizu and Motoko Yuasa

(The Institute of Statistical Mathematics)

Let X be the normalized sum of a random sample X_1, \dots, X_n of size n from a distribution $F: X=(X_1+\dots+X_n-n\mu)/\sqrt{n}\sigma$. If n is sufficiently large, then by the central limit theorem the distribution of X is approximated by the standard normal distribution Φ . However, the approximation is poor when the distribution F is asymmetric.

The Cornish-Fisher expansion provides us with a tool for improving the approximation. Let α_k be the k -th order moment of the normalized variable $(X_1-\mu)/\sigma$. The Cornish-Fisher transform $y=y_1(x)=x+\frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}(1-x^2)$ gives an approximation to $y=\Phi^{-1}F_n(x)$, which means that the random variable $Y=y_1(X)$ is approximately normally distributed. We can expect the approximation is better than the one obtained by the central limit theorem. However, as the behavior of $y_1(x)$ is very wild for large $|x|$, we can not still make $\Delta=\sup_x |\Pr\{X \leq x\} - \Phi(y_1(x))|$ sufficiently small.

In order to control the wildness of the behavior of $y_1(x)$, we have to reduce the "correction term" $\alpha_3/6\sqrt{n} \cdot (1-x^2)$ for large $|x|$. To this end, we introduce a transform $SP_1(1/3)$ of x defined by

$$\xi_1(x) = \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} + \frac{6\sqrt{n}}{\alpha_3} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_3 x}{2\sqrt{n}} \right)^{1/3} - 1 \right\},$$

and prove the inequality

$$\sup_x |\Pr\{X \leq x\} - \Phi(\xi_1(x))| \leq 0.95\alpha_3^2/n + R_n,$$

where R_n is the upper bound for the error of the Edgeworth expansion, which is known to be of order $1/n$. Incidentally $SP_1(1/3)$ is identical with the Wilson-Hilferty transform when $X_1+\dots+X_n$ follows the gamma distribution with the density $x^{n-1}e^{-x}/(n-1)!$.

We can further improve the approximation by using α_4 as well as α_3 . Let $y=y_2(x) \equiv x + A(1-x^2) + Bx + Cx^3$ be the Cornish-Fisher transform of order 2, where $A = \alpha_3/6\sqrt{n}$ and B and C are simple polynomials of α_3 and α_4 divided by n . We propose some transforms including $SP_2(1/4)$ defined by

$$\xi_2(x) = A + \left(1 - \frac{14}{9} \frac{A^2}{C} \right) x + \left(\frac{98}{27} \frac{A^3}{C^2} + \frac{7}{3} \frac{AB}{C} \right) \left\{ \left(1 + \frac{12}{7} \frac{C}{A} x \right)^{1/4} - 1 \right\}$$

as an improvement over $y_2(x)$. We also propose some approximations to percentiles of asymmetric distributions.

Numerical computations show that $SP_1(1/3)$, $SP_2(1/4)$ and their variants substantially improve the Cornish-Fisher transforms in the normal approximation of the gamma, Poisson, negative binomial and non-central chi-square distributions. In particular the normal approximation of the transform $\frac{1}{9\sqrt{\lambda}} \left\{ G - 33\lambda + 4 + (32\lambda - 1) \left(\frac{G}{\lambda} \right)^{1/4} \right\}$ of the gamma variable G and, correspondingly, the transform $-\frac{1}{9\sqrt{K+1}} \left\{ \lambda - 33K - 29 + (32K + 31) \left(\frac{\lambda}{K+1} \right)^{1/4} \right\}$ of the Poisson variable K turn out to be quite accurate.