統計数理研究所彙報
第32巻 第2号 (1984)

# 分枝限定法によるミニマックス決定方式の探索

統計数理研究所 村上征勝
〃 中島詞子

(1984年4月 受付)

## 0. 序論

統計的意思決定問題における決定方式の評価法としては，ベイズ的な観点からの評価法と，ミニマックス的な観点からの評価法の二つがその代表的なものと考えられる．自然の状態，観測値，取りうる行動がすべて有限個であるような多岐決定問題においては，ミニマックス決定方式は，一般に複数個の決定方式をある確率で採用する確率化決定方式となるため，それを見い出すことは，ベイズ決定方式を見い出すこと程簡単ではない．この小論では，分枝限定法 (Branch and Bound Method) を用いたミニマックス決定方式の探索法を提案し，その有効性を考察する．

## 1. ミニマックス決定方式

統計的意思決定問題においては，将来実現するある状態 $\theta(\in\Theta)$ において，いかなる行動 $a(\in A)$ をとるのが損失という点からみて合理的であるかを問題とする．損失 $L(\theta,\ a)$ は $\theta$ と $a$ に依存し，いかなる $\theta$ が実現するかは事前確率 $w(\in W)$ という型でしかわからない．しかし，$\theta$ の推定に役立つ観測値 $x(\in X)$ が得られる条件付確率 $f(x\mid\theta)$ が利用できるため，実際には，どのような $x$ が得られた時に，どの $a$ を選ぶのが合理的であるかを決定することが問題となる．

$\Theta=\{\theta_1,\cdots,\ \theta_k\}$, $A=\{a_1,\cdots,\ a_n\}$, $X=\{x_1,\cdots,\ x_m\}$ のように $\theta$, $a$, $x$ が有限個の場合には，この問題は，各 $x$ に対してとるべき行動を定めた非確率化決定方式(観測値空間 $X$ から行動空間 $A$ への写像方式) $d(x)=a$ の選択問題となる．この非確率化決定方式の集合を $D$ で表記することにする．さて，ベイズ的評価法，ミニマックス評価法のいずれの評価法においても，各 $\theta$ における決定方式 $d$ の評価は危険度

$$R(\theta,\ d)=\sum_{j=1}^{m} L(\theta,\ d(x_j))f(x_j\mid\theta)$$

に基づいておこなわれる．

いま，各 $\theta_i$ の事前確率を $w_i$ とした時に

$$\sum_{i=1}^{k} w_i R(\theta_i,\ d_B)=\min_{d\in D}\left\{\sum_{i=1}^{k} w_i R(\theta_i,\ d)\right\}$$

なる決定方式 $d_B$ を選択するのがベイズ的な評価法である．これに対し，事前確率の情報を用いずに，

$$\max_{\theta\in\Theta}\{R(\theta,\ d_M)\}=\min_{d\in D}\max_{\theta\in\Theta}\{R(\theta,\ d)\}$$

なる決定方式 $d$ を選択するのが，ミニマックス的な評価法であり，これは最悪の状態における

危険度を最小にするように行動するという，保守的な決定方式の選択法である．

ところで，選択の範囲を非確率化決定方式 $d$ の集合 $D$ だけではなく，幾つかの非確率化決定方式をある確率で採用するような確率化決定方式 $\delta$ の集合 $\mathfrak{D}$ にまで広げた場合には，

$$\max_{\theta\in\Theta}\{R(\theta,\ \delta_M)\}=\min_{\delta\in\mathfrak{D}}\max_{\theta\in\Theta}\{R(\theta,\ \delta)\}$$

とした時，$D\subset\mathfrak{D}$ より

$$\max_{\theta\in\Theta}\{R(\theta,\ \delta_M)\}\leqq\max_{\theta\in\Theta}\{R(\theta,\ d_M)\} \tag{1}$$

となる．この不等式からわかるように，ミニマックス決定方式は通常，確率化決定方式となるが，実はこのことがミニマックス決定方式を見い出すことを困難にしている最大の原因である．

たとえば，$\Theta=\{\theta_1,\ \theta_2\}$，$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$X=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ で $L(\theta,\ a)$，$f(x\mid\theta)$ が表1，表2であるような問題においては，非確率化決定方式は表3のように27個あるがミニマックス決定方式は，確率化決定方式，すなわち，ある非確率化決定方式 $d$ と $d'$ を一定確率で用いる決定方式となる．このとき，$d$ と $d'$ がどのような決定方式であるかを見い出すのは一般には幾何学的考察によって可能となる．（この問題においては表3の $d_{18}$ と $d_{27}$ をそれぞれ確率 $\frac{10}{14}$，$\frac{4}{14}$ で採用する確率化決定方式がミニマックス決定方式 $\delta_M$ となる．Chernoff and Moses (1959), p. 154 の図5.16を参照）

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|
| $\theta_1$ | 0 | 1 | 3 |
| $\theta_2$ | 5 | 3 | 2 |

表1．$L(\theta,\ a)$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $\theta_1$ | 0.60 | 0.25 | 0.15 |
| $\theta_2$ | 0.20 | 0.30 | 0.50 |

表2．$f(x\mid\theta)$

| | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_6$ | $d_7$ | $d_8$ | $d_9$ | $d_{10}$ | $d_{11}$ | $d_{12}$ | $d_{13}$ | $d_{14}$ | $d_{15}$ | $d_{16}$ | $d_{17}$ | $d_{18}$ | $d_{19}$ | $d_{20}$ | $d_{21}$ | $d_{22}$ | $d_{23}$ | $d_{24}$ | $d_{25}$ | $d_{26}$ | $d_{27}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ |
| $x_2$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_3$ | $a_3$ |
| $x_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |

表3．非確率化決定方式

しかし，この種の考察は次元（これは自然の状態の個数に等しい）が3以上になると不可能となる．実際，$\Theta=\{\theta_1,\cdots,\theta_k\}(k>2)$ の場合には $\delta_M$ を見い出す有効な方法は知られていない．原理的には，$k$ 個の非確率化決定方式のすべての組合せを調べれば $\delta_M$ を見い出すことができるが，しかし，$\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，$X=\{x_1,\cdots,x_m\}$ の場合には $n^m$ 個の非確率化決定方式が存在し，この $n^m$ 個の中からの3個の非確率化決定方式の組合せの数 $N$ は

(2)

$$N=\frac{n^m(n^m+2)(2n^m+2)}{12} \qquad (n^m \text{ が偶数の時})$$

$$N=\frac{(n^m-1)(n^m+1)(2n^m)}{12}+\frac{1}{2}n^m(n^m+1) \qquad (n^m \text{ が奇数の時})$$

となる(附録参照)．たとえば，$k=3$, $n=4$, $m=4$ の簡単な決定問題においても，$N$ は2829056にもなり，実際に大型計算機 (HITAC M-200) でこの組合せすべてを調べるのには1分程かかる（3節参照）．少し複雑な問題で $k=3$，$n=5$，$m=5$ の場合には約30時間かかると予想され，

このことからわかるように，複雑な決定問題の場合には，非確率化決定方式のすべての組合せを調べることは実行不可能となる．そこで次章では，組合せ最適化問題の解法の一つである分枝限定法を用いたミニマックス決定方式の探索法を提案する．

## 2. 分枝限定法による探索

### 2.1 分枝限定法

分枝限定法は組合せ最適化問題を解くための一つの方法であり，その原理は与えられた問題を部分問題に繰返し分解し，分解された部分問題を効率良く解くことによって，与えられた問題を解く点にある（Hillier・Lieberman, 1967)．しかしながら，どのようにして部分問題へ分解するか（分枝するか)，また分解された複数個の部分問題のどれから先に解き，かつ最適解が存在しない部分問題をいかに早く見い出すか（限定するか）等に関する一般論はない（茨木, 1983)．したがって，その組合せ最適化問題固有の構造を最大限利用することによって，分枝回数（部分問題への分解の回数）をできるだけ少なくするように工夫する必要がある．ミニマックス決定方式の探索に関しては，次節のように定式化した．

### 2.2 問題の定式化

(イ) 分枝法

決定問題 $\Theta=\{\theta_1, \cdots, \theta_k\}$, $A=\{a_1, \cdots, a_n\}$, $X=\{x_1, \cdots, x_m\}$ における $n^m$ 個の非確率化決定方式 $d$ の集合 $D$ の部分集合を次のように定義する

$$D(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \cdots;\ \alpha_l)=\{d \mid d(x_1)=a_{\alpha_1},\ d(x_2)=a_{\alpha_2}, \cdots,\ d(x_l)=a_{\alpha_l}\}$$

ここで $1\leqq l\leqq m$, $1\leqq\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\leqq n$. したがって

$$D=\bigcup_{\alpha_1=1}^{n} D(\alpha_1)=\bigcup_{\alpha_1=1}^{n}\bigcup_{\alpha_2=1}^{n} D(\alpha_1;\ \alpha_2)=\cdots=\bigcup_{\alpha_1=1}^{n}\cdots\bigcup_{\alpha_m=1}^{n} D(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \cdots;\ \alpha_m)$$

となる．たとえば，$n=3$, $m=3$ の場合，表 3 の表記に従うなら

$$D(1)=\{d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5,\ d_6,\ d_7,\ d_8,\ d_9\},$$

$$D(1;\ 1)=\{d_1,\ d_2,\ d_3\},$$

$$D(1;\ 1;\ 1)=\{d_1\},$$

となる．

さて，$S$ 個の非確率化決定方式 $d_1, d_2, \cdots, d_S$ および $\lambda_i\geqq 0$, $\sum_{i=1}^{S}\lambda_i=1$ に対して

$$\lambda_1 d_1+\lambda_2 d_2+\cdots+\lambda_S d_S$$

は確率 $\lambda_i$ で $d_i$ をとる確率化決定方式を表わすものとする．また，決定方式の集合 $D_1, D_2, \cdots, D_S$ に対し，確率化決定方式の集合を次のように約束する．

$$\lambda_1 D_1+\lambda_2 D_2+\cdots+\lambda_S D_S=\{\lambda_1 d_1+\lambda_2 d_2+\cdots+\lambda_S d_S;\ d_i\in D_i\}$$

この記号を用いて，次のような $\mathfrak{D}$ の部分集合を定義する．

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}(\alpha_1^1;\ \alpha_1^2;\ \cdots;\ \alpha_1^k)\\ &=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{\lambda_1 D(\alpha_i^1)+\lambda_2 D(\alpha_1^2)+\cdots+\lambda_k D(\alpha_1^k)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1\ ;\ \alpha_1^2,\ \alpha_2^2\ ;\ \cdots\ ;\ \alpha_1^k,\ \alpha_2^k)\\&\quad=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{\lambda_1 D(\alpha_1^1,\ \alpha_2^1)+\lambda_2 D(\alpha_1^2,\ \alpha_2^2)+\cdots+\lambda_k D(\alpha_1^k,\ \alpha_2^k)\}\\&\qquad\qquad\vdots\\&\mathfrak{D}(\alpha_1^1,\ \cdots,\ \alpha_m^1\ ;\ \alpha_1^2,\ \cdots,\ \alpha_m^2\ ;\ \cdots\ ;\ \alpha_1^k,\ \cdots,\ \alpha_m^k)\\&\quad=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{\lambda_1 D(\alpha_1^1,\ \cdots,\ \alpha_m^1)+\lambda_2 D(\alpha_1^2,\ \cdots,\ \alpha_m^1)+\cdots+\lambda_m D(\alpha_1^k,\ \cdots,\ \alpha_m^k)\}\end{aligned}$$

ここで $\Lambda=\{(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k)\ ;\ \lambda_i\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1\}$ である．

したがって，

$$\mathfrak{D}=\bigcup_{\alpha_1^1=1}^{n}\ \bigcup_{\alpha_1^1\leqq\alpha_1^2}^{n}\cdots\bigcup_{\alpha_1^{k-1}\leqq\alpha_1^k}^{n}\mathfrak{D}(\alpha_1^1\ ;\ \alpha_1^2\ ;\ \cdots\ ;\ \alpha_1^k)$$

である．たとえば，$k=3,\ n=3,\ m=3$ の場合には

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}=&\mathfrak{D}(1\,;\,1\,;\,1)\cup\mathfrak{D}(1\,;\,1\,;\,2)\cup\mathfrak{D}(1\,;\,1\,;\,3)\cup\mathfrak{D}(1\,;\,2\,;\,2)\cup\mathfrak{D}(1\,;\,2\,;\,3)\\&\cup\mathfrak{D}(2\,;\,2\,;\,2)\cup\mathfrak{D}(2\,;\,2\,;\,3)\cup\mathfrak{D}(2\,;\,3\,;\,3)\cup\mathfrak{D}(3\,;\,3\,;\,3)\end{aligned}$$

となる．

さて

$$\min_{\delta\in\mathfrak{D}}\max_{\theta\in\Theta}\{R(\theta,\ \delta)\}=\min_{\substack{\alpha_1^1\leqq\alpha_1^2\\ \vdots\\ \alpha_1^{k-1}\leqq\alpha_1^k}}\Big[\min_{\delta\in\mathfrak{D}(\alpha_1^1\,;\,\cdots\,;\,\alpha_1^k)}\max_{\theta\in\Theta}\{R(\theta,\ \delta)\}\Big]$$

であるので，$\mathfrak{D}$ の中からミニマックス決定方式 $\delta_M$ を求めるために，まず $\mathfrak{D}$ を部分集合 $\mathfrak{D}(\alpha_1^1\ ;\ \cdots\ ;\ \alpha_1^k)$ に分割し，この部分集合の中から(ロ)で述べるような規準によって，$\delta_M$ が存在する可能性の高い部分集合をみつけ，次にその部分集合をさらに小さな部分集合 $\mathfrak{D}(\alpha_1^1,\alpha_2^1\ ;\ \cdots\ ;\ \alpha_1^k,\alpha_2^k)$ に分割する…というように探索対象の集合を小さくしながら $\delta_M$ を探索していく．この際に，少ない探索回数で効率よく $\delta_M$ を発見する為に，上界，下界，可能解を次のように定義する．

(ロ)　限定法（上界，下界，可能解）

$k$ 個の非確率化決定方式 $d_1,\ \cdots,\ d_k$ をある確率 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k$ でとるような確率化決定方式 $\delta$ がミニマックス決定方式となる場合には，少なくとも

(3)　　$$R(\theta_1,\ \delta)=R(\theta_2,\ \delta)=\cdots=R(\theta_k,\ \delta)$$

でなければならない（藤本・松原，1976)．そこで，この (3) 式を満たす $\delta$ を，可能解と定義する．また限定操作に必要な上界 $\tilde{L}$ と下界 $\underset{\sim}{L}$ については，上界 $\tilde{L}_r$ を探索段階 $r$ までに見つかった可能解の中で最小の $R(\theta,\delta)$ の値と定義する．（したがって，$\tilde{L}_0\geqq\tilde{L}_1\geqq\tilde{L}_2\geqq\cdots$ となる）(1) 式より，探索の第一段階では $\tilde{L}_0=\min_{d\in D}\max_{\theta\in\Theta}\{R(\theta,\ d)\}$ とする．

また，探索段階 $r$ における探索対象のある部分集合 $\mathfrak{D}_r$，たとえば

$$\mathfrak{D}_r=\mathfrak{D}(\alpha_1^1,\ \cdots,\ \alpha_l^1\ ;\ \alpha_1^2,\ \cdots,\ \alpha_l^2\ ;\ \cdots\ ;\ \alpha_1^k,\ \cdots,\ \alpha_l^k)$$

における下界 $\underset{\sim}{L}_r$ を次のように定義する．

$$\underset{\sim}{L}_r=\max\{\max_{\theta\in\Theta}\min_{d\in D_r}\{R(\theta,\ d)\},\ \underset{\sim}{L}_{r-1}\}$$

ここで，

$$D_r=\bigcup_{t=1}^{k}D(\alpha_1^t\ ;\ \cdots\ ;\ \alpha_l^t)$$

である．したがって下界に関しては定義より $\underset{\sim}{L}_1\leqq\underset{\sim}{L}_2\leqq\cdots\leqq\underset{\sim}{L}_r$ となる．ところで下界 $\underset{\sim}{L}_r$ は $r$ 段階までの探索結果から推定した，可能解がとり得る最小の値の推定値であり，一方上界 $\tilde{L}_r$ は $r$ 段階までの探索で見つかった可能解の中の最小値である．したがって下界 $\underset{\sim}{L}_r$ と上界 $\tilde{L}_r$ の間には $\tilde{L}_r\geqq\underset{\sim}{L}_r$ となる関係がある．

ミニマックス決定方式の探索においては，下界を最小にする部分集合を優先的に分割し探索する．また(3)で定義した可能解をもたない部分集合や，探索の $r$ 段階で探索対象の部分集合における $\max_{d\in D_r}\min_{\theta\in\Theta}\{R(\theta, d)\}$ が $\tilde{L}_{r-1}$ より大きくなった場合にはその部分集合は，以後分割を行なわず探索を終了する．

## 3. 数値例及び考察

本論文で提案した分枝限定法による探索法と，非確率化決定方式のすべての組合せを調べる方法の二つの探索法において，ミニマックス決定方式を見い出すまでの探索回数（非確率化決定方式の組合せを調べる回数）及び探索時間（CPU タイム）を比較してみたのが表 4，表 7 である．実験は

1） $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$，　$X=\{x_1, x_2, x_3\}$，　$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

2） $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$，　$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，　$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

の二つの場合について，ミニマックス決定方式が確率化決定方式となるように適当に $f(x\mid\theta)$，$L(\theta, a)$ を与えておこなった．

1） $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$，$X=\{x_1, x_2, x_3\}$，$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ の場合

| 実験 No. | 探索回数 | | 探索時間 | |
|---|---|---|---|---|
| | 分枝限定法 | すべての組合せ | 分枝限定法 | すべての組合せ |
| 1 | 25635回 | 45760回 | 0.658秒 | 0.921秒 |
| 2 | 8850 | 〃 | 0.262 | 〃 |
| 3 | 30891 | 〃 | 0.782 | 〃 |
| 4 | 7875 | 〃 | 0.241 | 〃 |
| 5 | 9800 | 〃 | 0.292 | 〃 |
| 6 | 8785 | 〃 | 0.263 | 〃 |
| 7 | 12371 | 〃 | 0.346 | 〃 |
| 8 | 13075 | 〃 | 0.360 | 〃 |
| 9 | 17176 | 〃 | 0.463 | 〃 |
| 10 | 18216 | 〃 | 0.485 | 〃 |
| 平均 | 15267回 | 45760回 | 0.415秒 | 0.921秒 |

表 4．

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $\theta_1$ | 0.40 | 0.35 | 0.25 |
| $\theta_2$ | 0.30 | 0.55 | 0.15 |
| $\theta_3$ | 0.10 | 0.20 | 0.70 |

表 5．$f(x\mid\theta)$

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\theta_1$ | 1 | 5 | 14 | 32 |
| $\theta_2$ | 12 | 5 | 3 | 22 |
| $\theta_3$ | 32 | 15 | 1 | 0 |

表 6．$L(\theta, a)$

たとえば，表4の実験1では $f(x\,|\,\theta)$ および $L(\theta, a)$ は表5，表6のようであった．分枝限定法では25635回の探索で，次の3つの非確率化決定方式

$$d'=(\ d'(x_1)=a_1,\quad d'(x_2)=a_2,\quad d'(x_3)=a_3)$$
$$d''=(\ d''(x_1)=a_2,\quad d''(x_2)=a_2,\quad d''(x_3)=a_3)$$
$$d'''=(d'''(x_1)=a_2,\quad d'''(x_2)=a_3,\quad d'''(x_3)=a_3)$$

を確率0.808, 0.088, 0.104でとるような決定方式がミニマックス決定方式 $\delta_M$ になることを見い出した．

2）$\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ の場合

| 実験 No. | 探索回数 | | 探索時間 | |
|---|---|---|---|---|
| | 分枝限定法 | すべての組合せ | 分枝限定法 | すべての組合せ |
| 1 | 272399回 | 2829056回 | 7.326秒 | 56.330秒 |
| 2 | 137396 | 〃 | 3.913 | 〃 |
| 3 | 151051 | 〃 | 4.249 | 〃 |
| 4 | 52462 | 〃 | 1.507 | 〃 |
| 5 | 217625 | 〃 | 5.170 | 〃 |
| 6 | 176816 | 〃 | 4.760 | 〃 |
| 7 | 198717 | 〃 | 5.609 | 〃 |
| 8 | 164112 | 〃 | 4.418 | 〃 |
| 9 | 212723 | 〃 | 5.651 | 〃 |
| 10 | 255777 | 〃 | 6.882 | 〃 |
| 平均 | 183908回 | 2829056回 | 4.949秒 | 56.330秒 |

表7.

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\theta_1$ | 0.50 | 0.30 | 0.15 | 0.05 |
| $\theta_2$ | 0.25 | 0.60 | 0.10 | 0.05 |
| $\theta_3$ | 0.10 | 0.20 | 0.30 | 0.40 |

表8．$f(x|\theta)$

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\theta_1$ | 1 | 5 | 14 | 22 |
| $\theta_2$ | 7 | 5 | 2 | 12 |
| $\theta_3$ | 31 | 6 | 1 | 0 |

表9．$L(\theta, a)$

たとえば表7の実験1では $f(x\,|\,\theta)$ および $L(\theta, a)$ は表8，表9のようである．分枝限定法では272399回の探索で，次の3つの非確率化決定方式

$$d'=(\ d'(x_1)=a_1,\quad d'(x_2)=a_2,\quad d'(x_3)=a_2,\quad d'(x_4)=a_3)$$
$$d''=(d''(x_1)=a_2,\quad d''(x_2)=a_2,\quad d''(x_3)=a_2,\quad d''(x_4)=a_3)$$
$$d'''=(d'''(x_1)=a_2,\quad d'''(x_2)=a_3,\quad d'''(x_3)=a_2,\quad d'''(x_4)=a_3)$$

を確率0.391, 0.525, 0.084でとるような決定方式が，ミニマックス決定方式 $\delta_M$ になることを見い出した．

これらの表からもわかるように，分枝限定法による方法では，平均して探索回数はすべての組合せを調べる方法の 1) の場合で約 33%　2) の場合で約 7% であった．一方，探索時間を比較すると，すべての組合せを調べる方法に比べ 1) の場合約 45%，2) の場合約 9% であり，決定問題が複雑になればなる程，分枝限定法による探索法が効力を表わすことがわかる．今後は下界の設定法を中心に探索法に改良を加え，計算時間をさらに $\frac{1}{10}\sim\frac{1}{100}$ 縮小することによって小型の計算機でも十分利用可能なものとする予定である．

## 謝　　　辞

有益なコメントをいただいたレフェリーの方に感謝いたします．

## 附録　(2) 式の証明

$\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ の問題では確率化決定方式は $n^m$ 個の非確率化決定方式 $d_i(i=1, 2, \cdots, n^m)$ の中から多くても 3 個の方式を確率化したものとなる．さて，ミニマックス決定方式を見い出すには，確率化する 3 個の決定方式を $d_{i1}$，$d_{i2}$，$d_{i3}$ とした時，$i_1\leqq i_2\leqq i_3$ となるような決定方式の組合せを調べれば十分である．いま $i_1=k$ とすると $k\leqq i_2\leqq i_3$ となるような組合せの数は $\frac{1}{2}(n^m-k+1)(n^m-k+2)$ 通りある．したがって，$n^m$ が偶数の時には

$$
\begin{aligned}
N&=\frac{1}{2}(1\times2)+\frac{1}{2}(2\times3)+\frac{1}{2}(3\times4)+\frac{1}{2}(4\times5)+\cdots+\frac{1}{2}n^m(n^m-1)+\frac{1}{2}(n^m+1)n^m\\
&=\frac{1}{2}(1\times2+2\times3)+\frac{1}{2}(3\times4+4\times5)+\cdots+\frac{1}{2}n^m(n^m-1+n^m+1)\\
&=\frac{1}{2}\{8+32+72+\cdots+2(n^m)^2\}\\
&=\frac{8}{2}\left\{1^2+2^2+3^2+\cdots+\left(\frac{n^m}{2}\right)^2\right\}\\
&=\frac{8}{2}\left\{\frac{\left(\frac{n^m}{2}\right)\left(\frac{n^m}{2}+1\right)\left(2\cdot\frac{n^m}{2}+1\right)}{6}\right\}\\
&=\frac{n^m(n^m+2)(2n^m+2)}{12}
\end{aligned}
$$

$n^m$ が奇数の時も同様にして

$$N=\frac{(n^m-1)(n^m+1)2n^m}{12}+\frac{n^m(n^m+1)}{2}$$

となる．

## 参 考 文 献

Chernoff, H. and Moses, L. (1959). *Elementary Decision Theory*, John Wiley and Sons.
Hillier, F. and Lieberman, G. (1967). *Introduction to Operations Research*, Holden-Day.
茨木 俊秀 (1983). 組合せ最適化, 産業図書.
藤本 熙・松原 望 (1976). 決定の数理, 筑摩書房.

# On the Search of a Minimax Randomized Decision Rule by Branch and Bound Techniques

M. Murakami and N. Nakajima
(The Institute of Statistical Mathematics)

For the evaluation of a decision rule in statistical decision problem, two methods are generally considered. One is the evaluation from the Bayesian point of view, and the other from the minimax point of view. Compared with the Bayesian decision rule, the minimax decision rule is much more difficult to be found out, because it usually takes the form of a randomized decision rule which selects non-randomized decision rule with certain probability in the multiple decision problem such that states, observations and action are finite in number.

In this paper, for the search of the minimax randomized decision rule, a method using 'branch and bound techniques' is proposed and its usefulness is considered.