統計数理研究所彙報
第32巻 第1号 (1984)

2母数指数分布の尺度母数に対する検定推定量の最適有意水準

統計数理研究所 平 野 勝 臣

(1984年4月 受付)

要 旨

2母数指数分布 $(1/\theta)\exp\{-(x-\eta)/\theta\}$, $(x\geqq\eta,\ -\infty<\eta<\infty,\ \theta>0)$ の η に関する予備検定を含む θ の推定問題を論ずる．この種の推定量は予備検定の有意水準の関数であり，その決定が論義される．習慣的に用いられている 0.01, 0.05 等の値が無意味であることを数値的に明らかにする．同時にこの問題に対し，AIC の考え方を適用した結果がミニマックス的な最適性を持つことを数値的解析結果により示す．

1. はじめに

確率密度関数

$$\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x-\eta}{\theta}\right\},\ x\geqq\eta,\ \theta>0,\ -\infty<\eta<\infty$$

で表わされる2母数指数分布を EP$(\eta,\ \theta)$ と書く．η に近似値の事前情報 η_0 がある．θ に対する次の推定方式を考える．観測値に基づいて帰無仮説 $\eta=\eta_0$ に対し対立仮説 $\eta\neq\eta_0$ を有意水準 α で検定する．帰無仮説が棄却されれば η と θ をともに観測値から推定し，採択されれば η は η_0 であると決定して θ だけ観測値から推定する．この様な推定量は検定推定量と言われている．検定推定量は母数の事前情報を利用する一つの推定方式であり，η と θ または θ だけを推定するという推定問題とは異なる．勿論検定結果の如何にかかわらず近似値 η_0 は真の値 η ではない．標本数との兼合でその精度が相対的に変わると考えるわけである．当然ながら検定推定量は α の関数であり，α を指定しない限り推定量は一意的に定まらない．特別な理由がない限り検定論の枠内では α は適当に選んでよいことになっている．しかし検定推定量に於ては，検定が推定の一部分を構成しており，推定量を一意的に定める必然性から何らかの規準に基づいて決定しなければならない．またそれを習慣的に例えば 0.05 と決定していると主張するならば，その妥当性についても調べねばならない．

Hirano (1984) は $\eta\geqq\eta_0$ に限った場合の検定推定量を構成し，更に $\alpha=e^{-1}$ を与えてその妥当性を論議した．本論文では η と η_0 の大小の関係がない場合，及び $\eta\leqq\eta_0$ と限った場合の検定推定量を構成し，α の決定の妥当性を論議する．

2母数指数分布 EP$(\eta,\ \theta)$ の母数 η は，この分布の位置 (location) を示すとも考えられるが，むしろ分布の台を選ぶという性質を強調して選択 (selection) 母数と呼ばれることがある．

2. 尺度母数 θ の推定について

2母数指数分布 $\mathrm{EP}(\eta, \theta)$ からの大きさ n の標本に対し，r 個打ち切り（Type II のセンサードサンプル）で $X_1<X_2<\cdots<X_r$ を得た．ここで r は後の論議から $3\leqq r\leqq n$ とする．そこで

$$T_r(\eta)=\sum_{i=1}^{r}(X_i-\eta)+(n-r)(X_r-\eta)$$
$$S_r=T_r(X_1)$$

とおくと，η と θ に対する同時十分統計量は X_1 と S_r である．また3つの確率変数

$$U=2T_r(\eta)/\theta$$
$$V=2S_r/\theta$$
$$H=2n(X_1-\eta)/\theta$$

は夫々自由度 $2r$, $2r-2$, 2 のカイ2乗分布に従い，且つ V と H は独立である（Epstein and Tsao (1953)）．

本論文では，θ の推定量 $\hat{\theta}$ に対する損失関数として

$$l(\theta, \hat{\theta})=(\hat{\theta}/\theta)+(\theta/\hat{\theta})-2$$

を用いる（Wasan (1970)）．普通良く使用される損失関数 $l_2(\theta, \hat{\theta})=(\hat{\theta}-\theta)^2/\theta^2$ では，θ が正に制限されているにもかかわらず $l_2(\theta, 0)=l_2(\theta, 2\theta)$ であり，バランスを欠いている．従って l_2 の使用は不自然と考え，リスクを損失関数 l の期待値で定義する．考察する θ の推定量 $\hat{\theta}$ のクラスとしては

$$\{a(r)T_r(\eta),\ a(r)>0\}\ \text{および}\ \{b(r)S_r,\ b(r)>0\}$$

だけを考える．尚，損失 l に関して前者のクラスでは $a(r)=1/\sqrt{r(r-1)}$，後者のクラスでは $b(r)=1/\sqrt{(r-1)(r-2)}$ のとき最良である．

次に η についての近似値 η_0 の事前情報を用いた θ の検定推定量を構成し，そのリスクを求める．そこで η に関する尤度比検定方式に基づく仮説検定の棄却域を与えておく．

帰無仮説 $H_0: \eta=\eta_0$ に対し次の3つの対立仮説を考える．

$$\text{(i)}\ K_1: \eta\neq\eta_0,\ \text{(ii)}\ K_2: \eta>\eta_0,\ \text{(iii)}\ K_3: \eta<\eta_0$$

これらの検定の有意水準を $\alpha(0<\alpha\leqq 1)$ とする．対数尤度比統計量を

$$L_i=-2\log\left[\left\{\sup_{H_0}\ (\text{尤度})\right\}\Big/\left\{\sup_{H_0\cup K_i}\ (\text{尤度})\right\}\right]$$
$$(i=1, 2, 3)$$

とおくと，夫々の棄却域は

$$\text{(i)}\quad X_1\leqq\eta_0,\ L_1\geqq\{2r/(r-1)\}\log(1/\alpha)$$
$$\text{(ii)}\quad L_2\geqq\{2r/(r-1)\}\log(1/\alpha)$$
$$\text{(iii)}\quad X_1\leqq\eta_0$$

となる（4章を参照）．(iii) に対しては α は無関係であるが，H_0 の下で $X_1\leqq\eta_0$ の確率は0であるので $\alpha=0$ と考える．

そこで3つの検定推定量 $\hat{\theta}^{(i)}_{PT}(i=1, 2, 3)$ を

$$\hat{\theta}^{(i)}_{PT}=\begin{cases} a(r)T_r(\eta_0): H_0\ \text{が採択されるとき} \\ b(r)S_r \qquad : K_i\ \text{が採択されるとき}\end{cases}$$

と定義し，これらのリスク $R(\hat{\theta}^{(i)}_{PT})=\mathrm{E}[l(\theta, \hat{\theta}^{(i)}_{PT})]$ を求める．そのために次の同時密度関数を変換し，用いやすい形にしておく．まず

$$\xi=2n(\eta-\eta_0)/\theta$$

とおく．V と $H+\xi(=K$ とおく）の同時密度関数 $f(v,\ k)$ は

$$f(v,\ k)=\frac{1}{4\Gamma(r-1)}\left(\frac{v}{2}\right)^{r-2}\exp\left\{-\frac{v-k+\xi}{2}\right\}$$

となり，更に $x=v+k,\ y=k/v$ と変換する．即ち確率変数 $X=V+K,\ Y=K/V$ としたときの X と Y の同時密度関数 $g(x,\ y)$ を求める．対応する領域は

$$\{(v,\ k)\mid v>0,\ k>\xi\}$$

に対し

$\xi\geqq 0$ のとき

$$\{(x,\ y)\mid x>\xi,\ y>\xi/(x-\xi)\}$$

$\xi<0$ のとき

$$\{(x,\ y)\mid x>0,\ y>\xi/(x-\xi)\}\cup\{(x,\ y)\mid 0>x>\xi,\ y<\xi/(x-\xi)\}$$

となるから

(イ) $\xi\geqq 0$ のとき

$$g(x,\ y)=\frac{e^{\xi/2}}{2\Gamma(r-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{r-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{(1+y)^r}$$

$$x>\xi(>0),\ y>\xi/(x-\xi)(>0)$$

(ロ) $\xi<0$ のとき

$$g(x,\ y)=\frac{e^{\xi/2}}{2\Gamma(r-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{r-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\frac{1}{(1+y)^r}$$

$$x>0,\ y>\xi/(x-\xi)(>-1)$$

$$g(x,\ y)=\frac{e^{\xi/2}}{2\Gamma(r-1)}\left(\frac{-x}{2}\right)^{r-1}\exp\left(\frac{-x}{2}\right)\frac{1}{(-1-y)^r}$$

$$0>x>\xi,\ (-1>)\xi/(x-\xi)>y$$

を得る．$\xi=0$ のときに限って X と Y は独立である．また η_0 を与えることによって $\eta-\eta_0$ の正負は未知であるが決ったことになる．$\hat{\theta}_{PT}^{(1)}$ を書き換えて

$$\frac{\hat{\theta}_{PT}^{(1)}}{\theta}=\begin{cases}a(r)X/2: 0<Y<c\\ b(r)X/\{2(Y+1)\}: Y\leqq 0,\ Y\geqq c\end{cases}$$

$\hat{\theta}_{PT}^{(2)}/\theta$ は $\hat{\theta}_{PT}^{(1)}$ の条件式 $Y\leqq 0$ を除いた式

$$\frac{\hat{\theta}_{PT}^{(3)}}{\theta}=\begin{cases}a(r)X/2: X_1>\eta_0\\ b(r)X/\{2(Y+1)\}: X_1\leqq\eta_0\end{cases}$$

となる．ここに

$$c=(1/\alpha)^{1/(r-1)}-1$$

である．

結局 3 つの検定推定量のリスクは次で与えられる．

$$\begin{aligned}R(\theta_{PT}^{(1)})=&ra(r)\left\{1-\Gamma\left(r+1,\ \frac{\xi}{2c}\right)\right\}+\frac{\xi a(r)}{2}\left\{1-\Gamma\left(r,\ \frac{\xi}{2c}\right)\right\}\\&-ra(r)(1+c)^{1-r}e^{\xi/2}\left\{1-\Gamma\left(r+1,\ \frac{\xi(1+c)}{2c}\right)\right\}\\&+\frac{e^{\xi/2}}{a(r)\Gamma(r)}\left(-\frac{\xi}{2}\right)^{r-1}\int_{\xi(1+c)/(2c)}^{\infty}t^{-1}e^{-t}dt\\&+\frac{e^{\xi/2}}{a(r)\Gamma(r)}\sum_{k=1}^{r-1}{}_{r-1}C_k\left(-\frac{\xi}{2}\right)^{r-1-k}\Gamma(k)\left\{1-\Gamma\left(k,\ \frac{\xi(1+c)}{2c}\right)\right\}\end{aligned}$$

$$-\frac{e^{\xi/2}(1+c)^{1-r}}{(r-1)a(r)}\left\{1-\Gamma(r-1,\ \frac{\xi(1+c)}{2c})\right\}+(r-1)b(r)\,\Gamma\left(r+1,\ \frac{\xi}{2c}\right)$$
$$+(r-1)b(r)e^{\xi/2}(1+c)^{-r}\left\{1-\Gamma\left(r+1,\ \frac{\xi(1+c)}{2c}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{(r-2)b(r)}\,\Gamma\left(r-1,\ \frac{\xi}{2c}\right)+\frac{e^{\xi/2}(1+c)^{2-r}}{(r-2)b(r)}\left\{1-\Gamma\left(r-1,\ \frac{\xi(1+c)}{2c}\right)\right\}$$
-2 ($=A$ とおく)：$\xi\geqq 0$ のとき

$$=e^{\xi/2}\{1-(1+c)^{1-r}\}[a(r)r+1/\{a(r)(r-1)\}]$$
$$+(1-e^{\xi/2})[b(r)(r-1)+1/\{b(r)(r-2)\}]$$
$$+e^{\xi/2}b(r)(r-1)(1+c)^{-r}$$
$$+e^{\xi/2}(1+c)^{2-r}/\{b(r)(r-2)\}-2$$
：$\xi<0$ のとき

$$R(\hat{\theta}_{PT}^{(2)})=A$$
$$R(\hat{\theta}_{PT}^{(3)})=e^{\xi/2}[a(r)r+1/\{a(r)(r-1)\}]$$
$$+(1-e^{\xi/2})[b(r)(r-1)+1/\{b(r)(r-2)\}]$$
-2 ($=B$ とおく)

ここに，

$$\Gamma(m,\ x)=\int_0^x y^{m-1}e^{-y}dy$$

である．

$\alpha=0$ のときについて考察する．$\hat{\theta}_{PT}^{(i)}$ の作り方から $\alpha=0$ のとき，$\hat{\theta}_{PT}^{(i)}$ を $a(r)T_r(\eta_0)$ と定義する．容易にわかるように

$$R(a(r)T_r(\eta_0))=\lim_{\alpha\to 0}R(\hat{\theta}_{PT}^{(i)})$$

であり，

$$R(\hat{\theta}_{PT}^{(1)})=a(r)\left(r+\frac{\xi}{2}\right)+\frac{e^{\xi/2}}{a(r)\Gamma(r)}\left(-\frac{\xi}{2}\right)^{r-1}\int_{\xi/2}^{\infty}t^{-1}e^{-t}dt$$
$$+e^{\xi/2}\left\{1-\Gamma\left(r-1,\ \frac{\xi}{2}\right)\right\}\Big/\{a(r)(r-1)\}$$
$$+\frac{e^{\xi/2}}{a(r)}\sum_{i=1}^{r-2}\left(-\frac{\xi}{2}\right)^{i}\frac{1}{i!(r-1-i)}\left\{1-\Gamma\left(r-1-i,\ \frac{\xi}{2}\right)\right\}$$
-2 ($=C$ とおく)：$\xi\geqq 0$ のとき

$=B$：$\xi<0$ のとき

$$R(\hat{\theta}_{PT}^{(2)})=C$$
$$R(\hat{\theta}_{PT}^{(3)})=B$$

である．

3. $\hat{\theta}_{PT}^{(i)}$ の相対効率

前章で述べたように損失関数 l では $a(r)=1/\sqrt{r(r-1)}$, $b(r)=1/\sqrt{(r-1)(r-2)}$ が夫々のクラスで最良であった．従ってこれらの係数で与えられる検定推定量を $\hat{\theta}_{PT}^{*(i)}$ とかいて，このリスク $R(\hat{\theta}_{PT}^{*(i)})$ に注目する．このリスクは ξ と c の関数であり，更に c は有意水準 α の関数である．そこで固定した各 ξ に対し，$R(\hat{\theta}_{PT}^{*(i)})$ を α の関数とみてその様子を調べる．ここでは η の

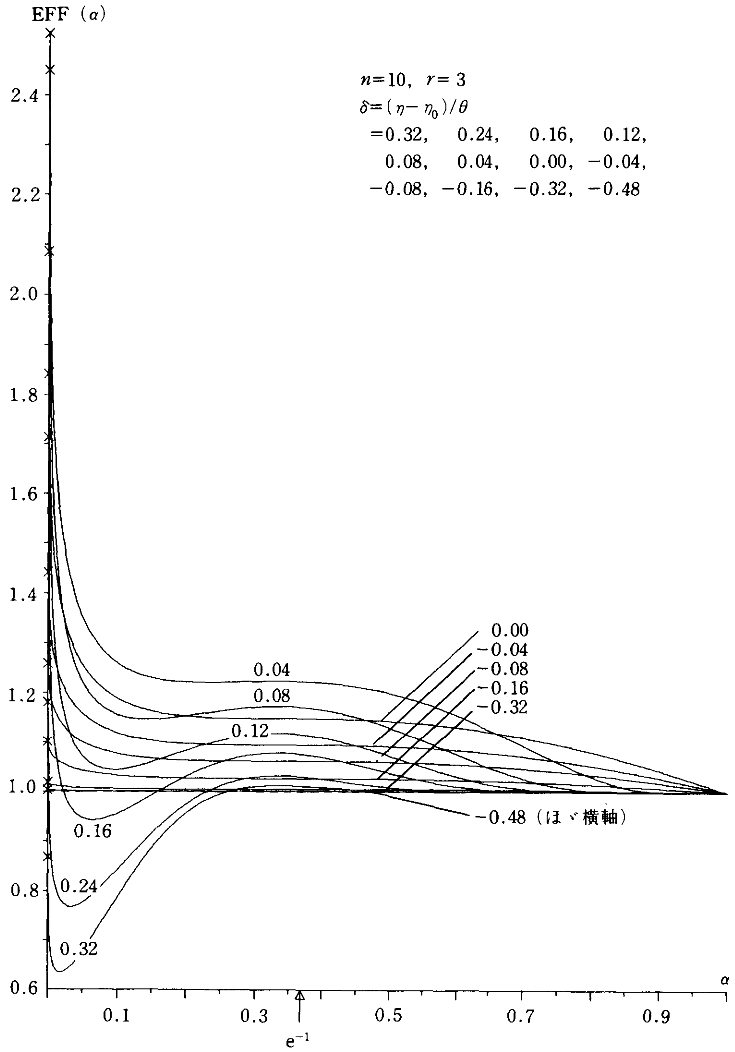

図1. 相対効率

事前情報 η_0 がないときの推定量として $\{1/\sqrt{(r-1)(r-2)}\}S_r(=b^*(r)S_r$ とおく)を用いた場合と，$\hat{\theta}^{*(i)}_{PT}$ の相対効率を

$$\mathrm{EFF}(\alpha)=\frac{R(b^*(r)S_r)}{R(\hat{\theta}^{*(i)}_{PT})}$$

で定義して，この EFF(α) のグラフを与えて調べることにする．Hirano (1984) では $i=2$ の場合が与えられている．本報告では $\hat{\theta}^{*(i)}_{PT}$ の構成上 $i=1$ の場合のEFF(α) のグラフを与えれば充分である．従って図1から図6までの相対効率のグラフはすべて $\hat{\theta}^{*(1)}_{PT}$ に対するものである．

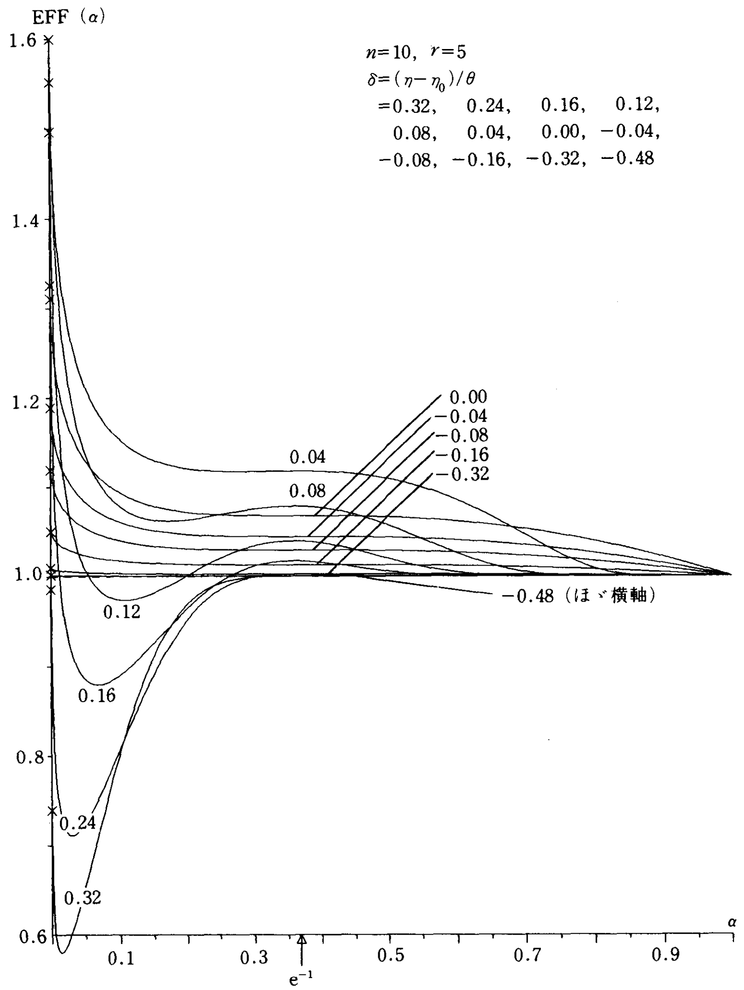

図2. 相対効率

4. 対数尤度比統計量 L_i の分布と有意水準の決定方法

2章で与えた対数尤度比統計量 L_i の仮説 H_0 の下での分布を調べる.

(i) L_1 の分布

$n(r-1)(X_1-\eta_0)/S_r=F(2,\ 2r-2)$ とおくと, これは H_0 の下で自由度 2, $2r-2$ の F 分布に従う. これを用いると L_1 は

$$L_1=2r\log[1+\{F(2,\ 2r-2)/(r-1)\}]$$

と表わされる. 従って L_1 の分布は H_0 の下で

$$\Pr\{L_1\leqq x\}=\Pr\{F(2,\ 2r-2)\leqq(r-1)(e^{x/(2r)}-1)\}$$
$$=1-\exp\left\{-\frac{r-1}{2r}x\right\}$$

である. 即ち, これは平均 $2r/(r-1)$ の指数分布 (EP(0, $2r/(r-1)$)) である.

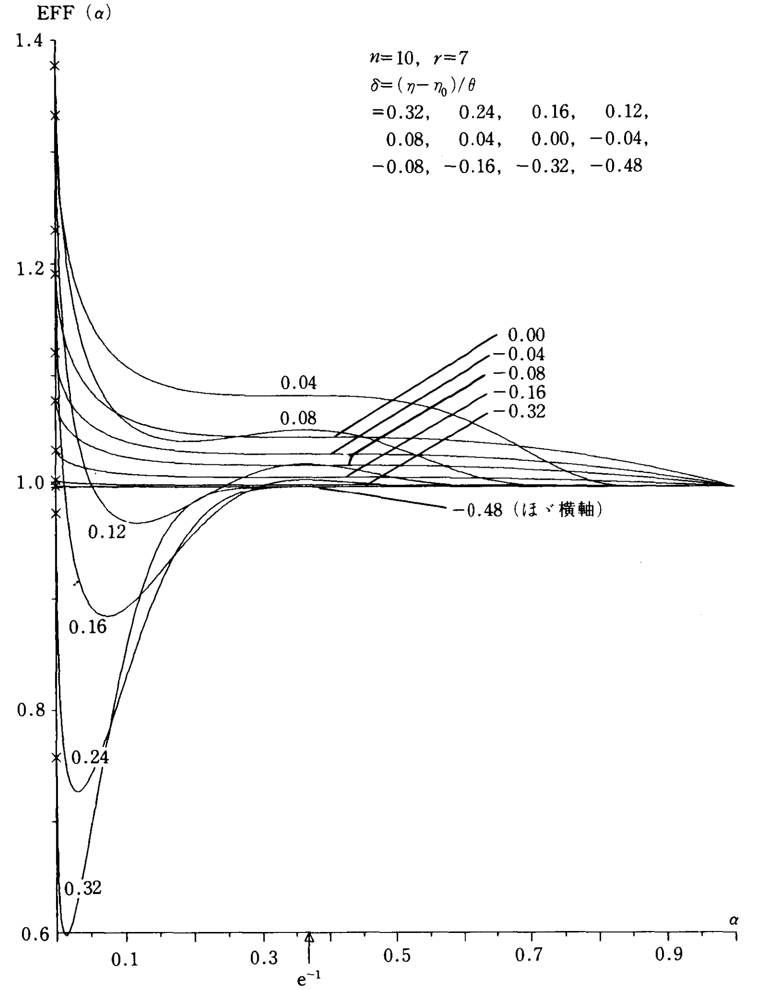

図 3.　相対効率

この場合の検定の棄却域を与える．指定された有意水準 α に対してある $c_\alpha>0$ があって，

$$X_1\leqq\eta_0,\ L_1\geqq c_\alpha$$

であり，関係式

$$\alpha=\exp\{-(r-1)c_\alpha/(2r)\}$$

を得る．

(ii)　L_2 の分布（Hirano (1984))

(i) と同様である．$L_2=L_1$ で，棄却域は $L_2\geqq c_\alpha$ である．この c_α は (i) の c_α で与えられる．

(iii)　L_3の分布

$$T_r(\eta_0)/r=\tilde{\theta},\ T_r(\tilde{\tilde{\eta}})/r=\tilde{\tilde{\theta}}\ \text{但し}\ \tilde{\tilde{\eta}}=\min\{\eta_0,\ X_1\}$$

とおくと

$$L_3=2r\log(\tilde{\tilde{\theta}}/\tilde{\theta})$$

である．このとき $\tilde{\tilde{\eta}}\leqq\eta_0$ であって，確率 1 で $\tilde{\theta}\leqq\tilde{\tilde{\theta}}$ が成立する．従って確率 1 で $L_3\leqq0$ である．棄却域は $X_1-\eta_0\leqq0$ である．

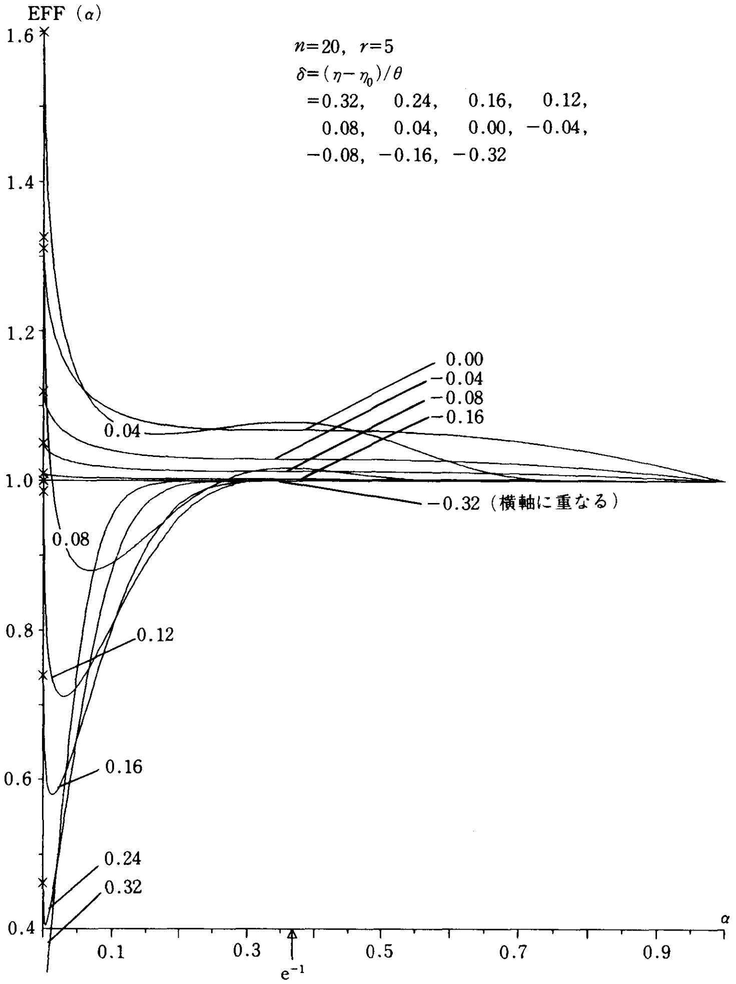

図4.　相対効率

次に有意水準 α の決定方法について述べる．一般に帰無仮説か対立仮説のいずれかの選択を AIC (Akaike (1973) (1977)) に基づいて決めた場合，有意水準は自動的に定まる．しかし，Hirano (1984)で述べたように，EP(η, θ) は，η が選択母数の性質を持っているために AIC を適用するための正則条件を満していない．そこで AIC をそのまま使うことは出来ないので，その考え方に従った同様な決定規準を作り，その適用を考える．

よく知られているように，モデルの良さを測る規準である AIC は，考察している対数尤度比統計量の漸近的偏りを修正することで導びかれている．この場合，先に掲げた (i) (ii) の考察から，L_1 および L_2 はともに正確に（漸近的でなく）EP$(0, 2r/(r-1))$ に従っている．偏りの修正は，平均値 $2r/(r-1)$ をとることにする．故に次の情報規準

$$J_i = L_i - 2r/(r-1) \qquad (i=1, 2)$$

が得られる．第2項の $r/(r-1)$ を1と考えれば，モデル H_0 および $K_i (i=1, 2)$ について形式的に AIC を求めた場合の差

$$\mathrm{AIC}(H_0) - \mathrm{AIC}(K_i)$$

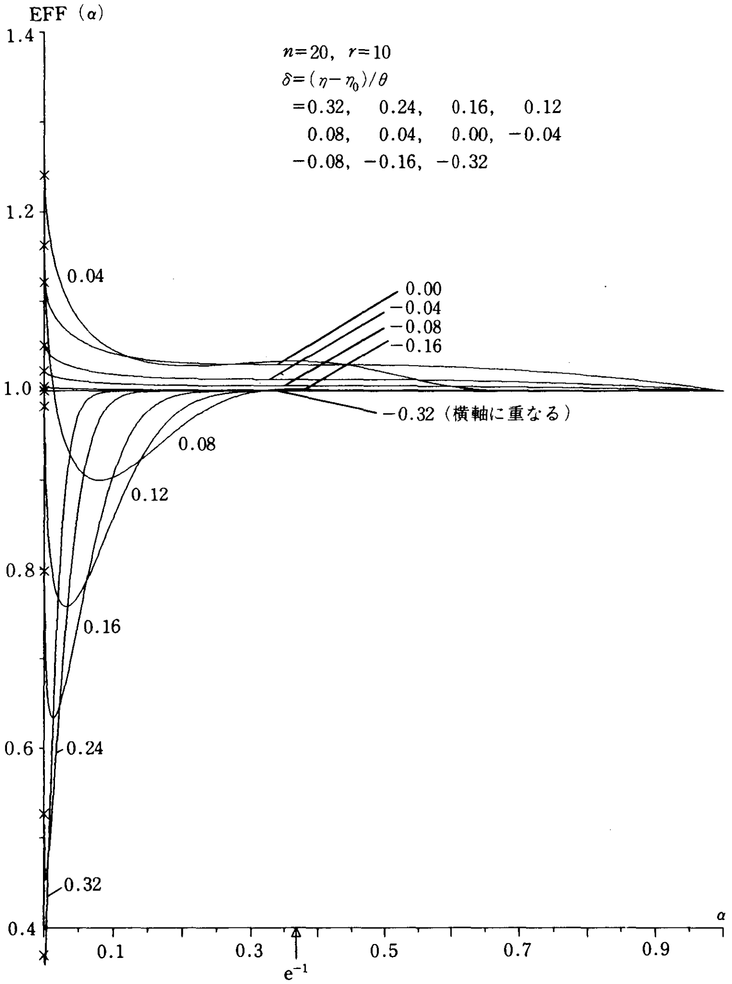

図 5.　相対効率

と一致する．本報告は小標本での適用を考えているので，J_i をそのまま用いることにすると，有意水準 α の値は，3 つの検定に対応して夫々次の様になる．

$$\text{(i)}\quad \alpha=\Pr\{J_1>0 \mid H_0\}=e^{-1}=0.3678\cdots$$

$$\text{(ii)}\quad \alpha=\Pr\{J_2>0 \mid H_0\}=e^{-1}$$

$$\text{(iii)}\quad \alpha=0$$

これらの決定の良し悪しについて次に述べる．

$\xi\geqq 0$ の場合，即ち (ii) については Hirano (1984) で数値的解析によって論議している．$\xi\geqq 0$ の場合，解析的に最適性を調べることは難しいが，$\xi\leqq 0$ の場合については以下の解析ができる．

［$\xi\leqq 0$ の場合の最適性について］

$\xi\leqq 0$ に対し

$$R(\hat{\theta}^{*(1)}_{PT})=D+f(\alpha)$$

とする．ここに

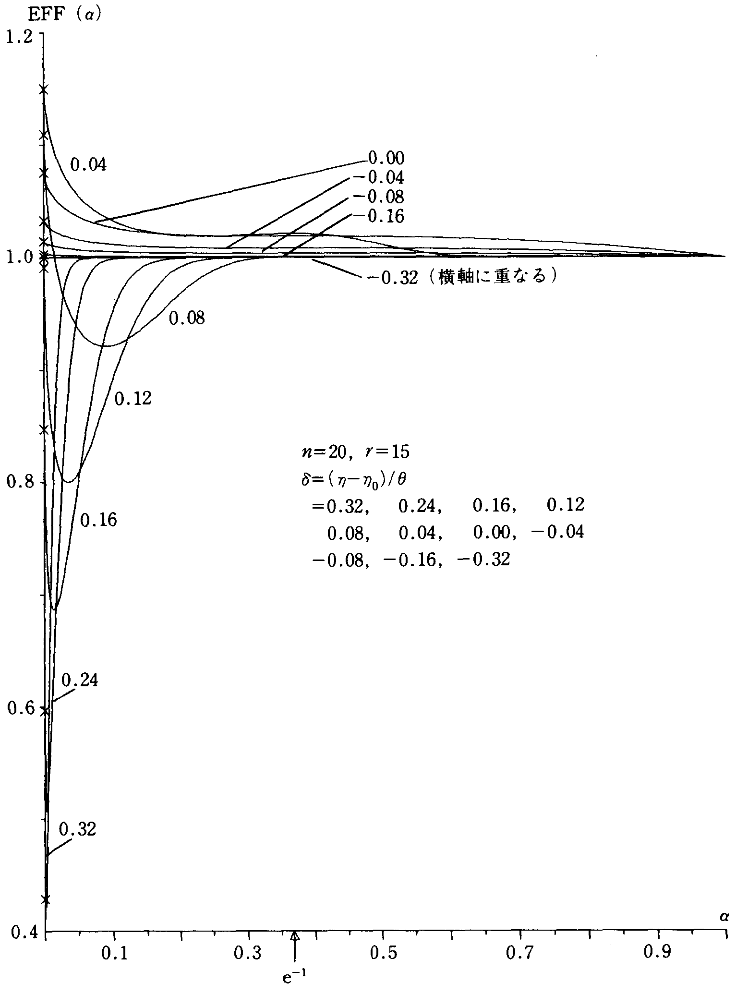

図6. 相対効率

$$D=R(b^*(r)S_r)=2\sqrt{(r-1)/(r-2)}-2$$
$$f(\alpha)=2\sqrt{r/(r-1)}\,e^{\xi/2}(1-\alpha)$$
$$+\sqrt{(r-1)/(r-2)}\,e^{\xi/2}\{\alpha^{r/(r-1)}+\alpha^{(r-2)/(r-1)}-2\},$$
$$0\leqq\alpha\leqq1$$

である．まず固定された1つの $\xi(\leqq0)$ に対して $f(\alpha)$, $0\leqq\alpha\leqq1$, の変化を調べる．α の両端の点で

$$f(0)=2e^{\xi/2}(\sqrt{r/(r-1)}-\sqrt{(r-1)/(r-2)})<0$$
$$f(1)=0$$

更に，$f(\alpha)$ は増加関数であり，$\alpha=\{(r-2)/r\}^{(r-1)/2}(=\alpha(r)$ とおく)で，変曲点を持つ．故に $\mathrm{EFF}(\alpha)=D/\{D+f(\alpha)\}$, $0\leqq\alpha\leqq1$, は減少関数で変曲点 $\alpha(r)$ を持つ．$\xi\leqq0$ では常に $\mathrm{EFF}(\alpha)\geqq1$ であることがわかった．このことは $\hat{\theta}^{*(3)}_{PT}$ で成り立ち，$\hat{\theta}^{*(1)}_{PT}$ では $\xi\leqq0$ で成り立っていることを意味している．

また，$f(\alpha)<0(0\leqq\alpha<1)$ がわかったので，固定された $\alpha(0\leqq\alpha<1)$ に対し $f(\alpha)$ を ξ の関数とみれば，減少関数であることもわかる．

次に変曲点 $\alpha(r)$ は r の増加関数で，且つ $\lim_{r\to\infty}\alpha(r)=e^{-1}$ である．しかも $r\geqq3$ より，$\alpha(3)=1/3, \alpha(5)=0.36,\cdots$ と，r が小さい場合でも e^{-1} に近い値を持つ．ξ を負に限るならば $\alpha=0$ が最も良い決定である．

$\xi\leqq0$ が事前にわかっているならば θ の推定量として $\hat{\theta}^{*(3)}_{PT}$ を用いる．このことは，$f(0)$ は ξ の関数とみて減少関数で $f(0)<0$ であることから，$\alpha=0$ と決定していることと矛盾せず，且つ良い決定をしていることを示している．

5. 結　　論

まずはじめに種々の議論をはなれて，有意水準 α の関数として θ の推定量 $\hat{\theta}^{*(1)}_{PT}$ の良さを表現している図 1 から図 6 を見て，1 つの最適な α を決定することを試みよう．

$\delta=\xi/(2n)=(\eta-\eta_0)/\theta$ の値を 1 つ定めて $\mathrm{EFF}(\alpha)$ の動きを調べると，$|\delta|$ が小さいとき，即ち η_0 が真の値 η に近いとき，$0<\alpha<0.1$ では相対効率が高い．その反面 $|\delta|$ が大きいとき，$0<\alpha\leqq0.1$ では非常に低い．またどの様な δ に対しても $0.3<\alpha\leqq1.0$ では相対効率は決して 1 より低くならない．むしろ $0.3<\alpha<0.4$ では局所的な最適性を持っている．以上のことが読みとれる．従って $0.3<\alpha<0.4$ の範囲で α の値を決定することが妥当と考える．

4 章で $\hat{\theta}^{*(1)}_{PT}$, $\hat{\theta}^{*(2)}_{PT}$ に対する α をいずれの場合も $\alpha=e^{-1}$ と決定した．$\xi\geqq0$ のとき $\hat{\theta}^{*(2)}_{PT}$ を用い，この決定が数値的解析によってミニマックス的な最適性を持っていると Hirano (1984) で述べている．更に $\xi\leqq0$ の場合を含めて，即ち ξ の正負がいずれとも仮定されないときは $\hat{\theta}^{*(1)}_{PT}$ を用いるが，決定 $\alpha=e^{-1}$ は図からやはり同様の最適性を持つと考えられる．また $\alpha(r)$ が 4 章で述べた性質を持つ関数の変曲点で且つ e^{-1} に極めて近いことも，この判断を妨げていない．次に事前に $\xi\leqq0$ とわかっているとき，$\hat{\theta}^{*(3)}_{PT}$ を用いるが，決定 $\alpha=0$ は 4 章で述べたように最適である．

最後に習慣的に "神聖" なる有意水準 0.05 を用いて θ を推定したとすれば，図を見ればわかるように決して良い決定ではない．むしろ習慣的によく使われているような標準的な有意水準 0.01, 0.05, 0.1 などは悪い決定であると判断せざるを得ない．なぜならば δ はいつも未知であるからである．

6. 展望および討論

検定推定量に於ける検定の有意水準の決定については，これまで系統的な結果は全く得られていない．ミニマックスリグレット規準を適用した結果が 2, 3 報告されている．しかし本報告の様なリスクの表現が複雑な場合，その適用は困難である．この論文でもわかるように AIC の考え方の適用という一般的な方法が，この種の問題の有意水準の決定問題によい結果を与えている．このことは Hirano (1984) の引用文献にある結果からも理解される．また平野 (1980) の 4 章で指摘している．

習慣的に用いられている有意水準のいくつかは問題によっては良い決定に近いものもある．しかしそれは問題に依存しているのであって，この論文で述べた様に習慣的に用いられている有意水準や恣意的な有意水準の使用は，極めて不適切なことであることが明らかになった．

Davis and Arnold (1970) は正規分布の平均 μ に近似値 μ_0 の事前情報があるとき，分散 σ^2

の検定推定量を調べている．標本 $X_1, \cdots, X_n$ に対し σ^2 の最尤推定量では

$$\mathrm{MSE}[\sum(X_i-\mu)^2/n] > \mathrm{MSE}[\sum(X_i-\bar{X})^2/n],$$

また $\mathrm{EP}(\eta, \theta)$ の θ のそれでは $\mathrm{MSE}[T_r(\eta)/r]=\mathrm{MSE}[S_r/r]$ である（MSE は平均平方誤差を表わす）．μ および η は真の値であるので，この損失関数で考えると，常に母数の多い方のモデルを選ぶことになる．2章で述べた損失関数 l_2 の使用が不適切であることを間接的に示している．また検定推定量の意味をなさない．筆者はモデルを選択することと，母数を推定することは別の問題であると考える．最尤推定値によってモデルを選択するが，選択されたモデルの母数の推定は推定論に基づいて行うと考えるのである．実際この論文ではモデルの選択ののち，損失関数 l で調べたわけである．ここでは取り扱わないが上で述べた Davis and Arnold の問題を l で論議することも意味がある．単に損失関数を変えてみたという視点は問題の本質を正確に捉えていない．Akaike (1977) の主張するエントロピー最大化原理はこの意味でも問題の本質を歪めていない．

謝　　辞

本稿作成にあたり，適切な助言をいただいた査読者の方々にお礼申し上げる．また，この研究は文部省科学研究費一般研究B「統計的モデル構成と情報量規準の組織的研究」（代表者赤池弘次）より補助を受けた．

引 用 文 献

Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, *2nd International Symposium on Information Theory*. (eds. B.N. Petrov and F. Csáki), Akademiai Kiado, Budapest, 267-281.

Akaike, H. (1977). On entropy maximization principle, *Applications of Statistics* (ed. P.R. Krishnaiah), North-Holland, Amsterdam, 27-41.

Epstein, B. and Tsao, C.K. (1953). Some tests based on ordered observations from two exponential populations, *Ann. Math. Statist.*, **24**, 458-466.

Davis, R.L. and Arnold, J.C. (1970). An efficient preliminary test estimator for the variance of a normal population when the mean is unknown, *Biometrika*, **57**, 674-677.

平野勝臣 (1980). 検定推定量の有意水準—2標本に基づく分散の推定—，統計数理研究所彙報，第 **27** 巻 第1号，23-34.

Hirano, K. (1984). A preliminary test procedure for the scale parameter of exponential distribution when the selection parameter is unknown, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, A, 1-9.

Wasan, M.T. (1970). *Parametric Estimation*, McGraw-Hill Book Company, New York.

Wilks, S.S. (1962). *Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons Inc., New York.

An Optimal Level of Significance of the Preliminary Test Estimator for the Scale Parameter of Two-Parameter Exponential Distribution

Katuomi Hirano
(The Institute of Statistical Mathematics)

A method is given for specifying of the optimal level of significance in the preliminary test estimation problem: Let $X_1, X_2, \cdots, X_r$ be the first r ordered observations out of a sample of size n from the two-parameter exponential distribution with the probability density function

$$\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x-\eta}{\theta}\right\},\ x\geqq\eta,\ -\infty<\eta<\infty,\ \theta>0.$$

Let α be a level of significance for testing hypothesis $H_0: \eta=\eta_0$, against three alternatives $K_1: \eta\neq\eta_0$, $K_2: \eta>\eta_0$ and $K_3: \eta<\eta_0$. Then the three preliminary test estimators of θ are defined as

$$\hat{\theta}_{PT}^{(i)}=\begin{cases} a(r)T_r(\eta_0) \text{ if } H_0 \text{ is accepted,} \\ b(r)S_r \text{ if } K_i \text{ is accepted,}\ (i=1,2,3) \end{cases}$$

where $a(r)$ and $b(r)$ are positive constants, and

$$T_r(\eta)=\sum_{i=1}^{r}(X_i-\eta)+(n-r)(X_r-\eta) \text{ and } S_r=T_r(X_1).$$

Here $\hat{\theta}_{PT}^{(i)}$, $i=1, 2, 3$, are the functions of α. Thus one of the main problem is to decide an optimal α.

A method for specifying α is proposed based on AIC. Then our results are $\alpha=e^{-1}$ for $\hat{\theta}_{PT}^{(1)}$ and $\hat{\theta}_{PT}^{(2)}$, and $\alpha=0$ for $\hat{\theta}_{PT}^{(3)}$. An optimality of these choices is investigated. The numerical results show that the use of AIC for selection of α provides an effective method for the problem.