

# 非定常スペクトル解析について

統計数理研究所 田村 (濱田) 義保

(1984年3月 受付)

## 1. 序

時間とともにランダムに変動する信号の記録が与えられたとする。その時、将来の変動を予測することや変動がどのような周波数成分を含んでいるかを調べる必要がある。通常、我々は時系列解析やスペクトル解析を用いて、これらのことを行っている。従来、解析の対象となってきたランダム変動は、定常確率過程と呼ばれるものであった。すなわち、変動を規定する統計的性質が時間変化せず、一定とみなしてよい過程を扱ってきた。

しかし、ある種の経済指標の記録、地震計の記録、大気乱流の記録、機械の振動の記録等々のように、定常確率過程とみなせないものも数多くある。これらのランダム変動は、その統計的性質が時間変化しており、非定常確率過程と呼ばれている。経済データの中には、非定常性が政策の変更に起因し、ステップ関数的な変化を含むものもある。このようなデータを解析するための手法としては、Box・Tiao (1975) によるインターベンション解析がある。また、季節調整のためのプログラムパッケージ BAYSEA (Akaike・Ishiguro 1980) を、政策変更点を途中に含むようなデータの解析ができるように改めることが容易であることを述べておく。本稿では、このようなステップ関数的変化に関係する非定常過程は取扱わない。

地震計の記録、すなわち地震波が非定常確率過程であることは次のように説明できる。地震動は、地殻が大きく変化することである。地殻の変化は、突発的におこり、かつ変化の強さの時間的推移も一定ではなく、やがて収束する。このために、地震波が非定常ランダム変動となるのである。また、ある種の動物の個体数の変化は、棲息環境が非定常な変化をするために、非定常確率過程となるものと思われる。このように、非定常性が対象としているシステムそのものに内在している場合と、外界の影響が非定常的である場合とがある。

ここまで、定常過程と非定常過程を完全に識別できるかのように書いてきた。しかし、両者を識別することは、容易ではない。何らかの統計的手法を用いて識別しなければならないが、後述する局所定常 AR モデルによる方法 (Ozaki・Tong 1975, Kitagawa・Akaike 1978) 以外にはあまり有効な方法はない。定常か非定常かの識別は重要な問題であるが、本稿ではふれない。ここでは、定常過程か非定常過程かを区別する際に重要な概念となる時間の尺度についてのみ説明する。対象としているシステムのマクロな変化の指標となる特性時間  $\tau_M$ 、システムのミクロな変化の特性時間  $\tau_m$ 、データのサンプリング間隔  $\Delta t$ 、全測定時間  $T$  の間に、

$$(1) \quad \tau_m < \Delta t < \tau_M \ll T$$

の関係があって初めて、定常と非定常との区別をすることが意味を持つてくる。 $T < \tau_M$  の時は、過程のごく一部の過渡的性質しか見ておらず、定常過程を非定常過程と誤認する場合がある。特に、非線形定常過程を、非定常過程とみなしてしまう場合が多い。

本稿で扱う非定常過程は、(1)の条件を満足し、さらに  $\tau_M$  が  $\Delta t$  と比べて十分大きいような過程である。すなわち、十分ゆっくりと統計的性質が時間変化する過程を取り扱う。このよう

な非定常過程に対するスペクトルの定義および推定法について概説することが、本稿の目的である。本来、スペクトルは定常過程に対してのみ厳密に定義できる量である。しかし、非定常ランダム変動の周波数特性が必要となることも稀ではないので、非定常スペクトルを考えることが重要になる。

非定常スペクトルの推定のために、周波数領域および時間領域における種々の推定法が提案されている。データのフーリエ変換にもとづくパラメータ推定を含まない推定法を、本稿では、周波数領域の推定法と呼んでいる。後述するように、周波数領域における非定常スペクトルの定義および推定法には統計的に不十分なものが多く、時間領域で統計的モデルをあてはめて、しかるのちにスペクトルを導く方が有効である。(以下では、統計的モデルをあてはめることをモデリングと呼ぶ。)しかし、周波数領域における非定常スペクトルの種々の定義を解説することにより、新しい手法の構築に貢献できるものと思われる。

次節で、種々の周波数領域における定義を列挙し、それぞれの問題点を述べる。また、時間領域でのモデリングを用いた非定常スペクトルの推定法については、第3節で概説する。著者の提案する方法 (Tamura 1984) を用いた結果と Priestley (1965) の推定法を用いた結果の比較も行う。第4節は、結論および展望にあてている。

## 2. 非定常スペクトル

本来、パワースペクトルは定常確率過程に対して定義され、周波数別の振動成分の分布をあらわすものである。定常過程においては、統計的性質が時間変化しないために、スペクトルを数学的に定義することは容易である。また、スペクトルの推定法として、Wiener-Khinchine の関係を用いる Blackman-Tukey 法 (Blackman and Tukey 1958), AR モデルを利用する赤池の方法 (Akaike 1970), AR モデルの代わりに ARMA モデルを利用する方法, アルゴリズム的に赤池の方法とほとんど同等である最大エントロピー (MEM) 法 (Burg 1967) 等々がある。Blackman-Tukey 法は、ラグウィンドーのとり方で分解能と推定の安定性が相反的に変化し、ウィンドーの選び方によって推定結果が変わることがある。これに対し、通常は、上記の他の方法の方が、安定性の高い推定を与える。

では、非定常確率過程の場合は、スペクトルをどのように定義すべきであろうか。また、定義された量は、周波数領域における情報を与えてくれるであろうか。統計的性質が時間変化するのだから、共分散の Fourier 変換を用いた通常の意味での、周波数  $f$  におけるパワースペクトル密度  $k(f)$  の定義をそのままの形で用いることはできない。ある時刻  $t$ , 周波数  $f$  の近傍で平滑化された量として、非定常スペクトルを定義せざるを得ない。しかし、データ処理に用いるフィルターおよびウィンドーの選び方により、時間領域、周波数領域における分解能が相反的に変化するため、両者を同時に高めることはできない。すなわち、時刻  $t$  の瞬間のスペクトルを求めようとすれば、周波数領域での情報が全く失われ、逆に、ある周波数  $f$  におけるスペクトルを求めようとすると、全ての時間の情報が混在する。

周波数領域における非定常スペクトルの推定法は、せいぜい上述した程度の推定結果しか与えることはできない。しかし、いくつかのよく知られた非定常スペクトルの定義とその問題点を書いておくことは、序に書いたように、意味があると思われる。

各定義の説明に入る前に、非定常スペクトルの定義として持つべき性質を列挙しておく。

- a. アンサンブル平均を定義に含まず、一回の測定結果(一本のデータ)を用いて、スペクトルを求めることができる。(定常エルゴードの場合は、アンサンブル平均を時間平均に置換できるが、非定常の場合はできない。)

- b. Wiener-Khinchine の関係に類似な関係が存在する. すなわち, ある関数の Fourier 変換を用いて, スペクトルを求めることができる.
- c. 定義が一般的で, 多くの現象に適用できる.
- d. 推定手順に任意性が入る余地が少ない. 以上の他に, 次の性質を持っていないければならないことは言うまでもない.
- e. 時刻  $t$  と周波数  $f$  の関数である.
- f. 時刻  $t$  における, 周波数範囲  $(f, f+df)$  に含まれるランダム変動の分布をあらわす. 本節では, 時間は連続であるとし, 角周波数  $\omega$  (ラジアン/秒) を用いて, 非定常スペクトルの定義を書く.

### 2.1. Page の instantaneous spectrum

Page (1952) は, instantaneous spectrum (瞬間スペクトル) を次のように定義した. 非定常確率過程  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  が与えられたとする. ピリオドグラム  $g(t, \omega)$  を

$$(2) \quad g(t, \omega) = \left| \int_0^t X(s) e^{-i\omega s} ds \right|^2$$

で定義する.  $g(t, \omega)$  を用いて, 次のように, 瞬間スペクトルを定義する.

$$(3) \quad \rho_i(t, \omega) = \frac{d}{dt} \langle g(t, \omega) \rangle$$

ただし,  $\langle \rangle$  はアンサンブル平均を意味する. 定義から明らかなように, 瞬間スペクトルは, 時刻  $t$  における角周波数  $\omega$  を持った振動成分の分布というよりも, 時刻が  $t$  から  $t+dt$  に変化する時の角周波数  $\omega$  を持つ成分の変化率の分布をあらわす量である. 従って, 乱流におけるエネルギーカスケードのように, 周波数間のエネルギーのやりとりが問題となるような場合には, 有効な解析手段になるものと思われる.

時刻  $t$  の瞬間の情報を与えてくれる定義であるが, 我々の求めているものが, ある周波数をもつ振動成分の変化率の分布ではなく, 振動成分そのものの分布であることを考えると, Page の定義は, 適当でないと言える. また, アンサンブル平均を定義に含んでいるために, 適用範囲は繰り返し実験が行える対象に限られる.

### 2.2. Bendat ・ Piersol の generalized spectrum

Bendat and Piersol (1966) は, generalized spectrum (一般化スペクトル) を次のように定義した. 非定常確率過程  $X(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  が与えられたとする.  $X(t)$  の Fourier 変換  $x(\omega)$  を求める.

$$(4) \quad x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt$$

この時, 一般化スペクトル  $S_x(\omega_1, \omega_2)$  を,

$$(5) \quad S_x(\omega_1, \omega_2) = 2\pi \langle x^*(\omega_1) x(\omega_2) \rangle$$

で定義する. ただし,  $*$  は複素共役を意味する.  $S_x(\omega_1, \omega_2)$  と自己相関関数

$$(6) \quad R_x(t_1, t_2) = \langle X(t_1) X(t_2) \rangle$$

との間には

$$(7) \quad S_x(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t_1, t_2) e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2$$

であらわされる関係がある.

定義から明らかなように,  $S_x(\omega_1, \omega_2)$  は角周波数  $\omega_1, \omega_2$  を持つ振動成分間の相関をあらわ

す量であり、振動成分の分布をあらわす量ではない。また、すべての測定データを同時に使っているため、特定の時刻  $t$  における情報を与えてくれない。定常スペクトルの定義の自然な拡張となっているが、残念ながら、我々の求める非定常スペクトルの定義にはなっていない。

### 2.3. Priestley の evolutionary spectrum

Priestley (1965, 1967) によって evolutionary spectrum (発展スペクトル) が導入された。定常確率過程  $X(t)$  を、ランダム変数  $dZ(\omega)$  を用いて、

$$(8) \quad X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega)$$

とあらわせることは、よく知られている。ここで、 $dZ(\omega)$  と  $dZ(\omega')$  は、 $\omega \neq \omega'$  の時、無相関になるようなランダム変数である。また、定常過程では、スペクトル密度を

$$(9) \quad p(\omega)d\omega = \langle |dZ(\omega)|^2 \rangle$$

を用いて求めることができることも、よく知られている。Loève (1955) は、非定常確率過程の中で、(8) の形に書ける過程を harmonizable と名付けた。しかし、定常過程の場合とは違って、 $dZ(\omega)$  と  $dZ(\omega')$  は  $\omega \neq \omega'$  の時、無相関になるとは限らない。Cramér (1960) は、harmonizable な非定常過程に対して、2変数  $\omega, \nu$  の関数として、非定常スペクトルを次のように定義した。

$$(10) \quad P(\omega, \nu)d\omega d\nu = \langle dZ(\omega)dZ^*(\nu) \rangle$$

この定義は、先に述べた一般化スペクトルの定義と同等である。我々の求めるスペクトルが振動成分の分布をあらわすものであることを考えると、Cramér の定義は数学的には厳密であるが、実用性の低いものとなっている。Priestley は (8) 式の  $e^{i\omega t}$  の部分を一般化し、 $dZ(\omega)$  と  $dZ(\omega')$  が無相関となるような非定常過程を考え、その過程に対して非定常スペクトルを定義した。一般化に際して、Priestley は非定常過程の中で、envelope を持つような変動を、念頭に置いたと思われる。

Priestley は、このような過程を oscillatory process と名付け、次の形に書いた。

$$(11) \quad X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t, \omega) e^{i\omega t} dZ(\omega)$$

ただし、 $A(t, \omega)$  は、 $t$  の関数と考える時、

$$(12) \quad A(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} dH(u, \omega)$$

とあらわされ、 $|dH(u, \omega)|$  は  $u=0$  で最大値をとり、 $u=0$  の近傍のみで0でない値をとる関数である。ランダム変数  $dZ(\omega)$  の分散が、

$$\langle |dZ(\omega)|^2 \rangle = p(\omega)d\omega$$

を満すとする。この時、evolutionary spectrum  $\rho_e(t, \omega)$  を下式で定義する。

$$(13) \quad \rho_e(t, \omega) = |A(t, \omega)|^2 p(\omega)$$

$X(t)$  が定常確率過程の時は、すべての  $t, \omega$  に対して、 $A(t, \omega) = 1$  とすればよいので、この定義は定常過程の場合も含んでいる。

計算手順をより完全にするために残された問題は、与えられた過程に対して  $A(t, \omega)$  をどのように決めるかである。そのために、まず、 $A(t, \omega)$  の時間変化のゆるやかさの尺度として

$$(14) \quad B_A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |u| |dH(u, \omega)|$$

で定義される  $B_A(\omega)$  を導入する。 $A(t, \omega)$  の時間変化がゆっくりしている程、 $B_A(\omega)$  は小さくなる。さらに、 $t, \omega$  を変えた時のゆるやかさの代表的尺度  $B_A$  を次のように定義する。

$$(15) \quad B_A = 1 / \text{Sup}_{\omega} \{B_A(\omega)\}$$

$B_A$  が大きい程,  $A(t, \omega)$  はゆっくりした時間変化を示す.  $B_A$  は,  $A(t, \omega)$  を一定とみなしてよい時間のオーダーをあらわしている. さらに,  $A$  をその属する関数空間  $\mathcal{A}$  で変化させて,

$$(16) \quad B_X = \text{Sup}_{A \in \mathcal{A}} \{B_A\}$$

を定義する. この  $B_X$  が, 確率過程  $X(t)$  の時間変化のゆるやかさの尺度となる.  $B_X$  に最も近い値を与える  $A_0(t, \omega)$  を用いて求められた非定常スペクトル  $\rho_e(t, \omega)$  が, 時刻  $t$  のスペクトルとして最も正確なものである. すなわち, 平滑化による情報の損失が, 最も少くなるのである.

さて, 実際の発展スペクトルの推定方法の説明に入ろう. 測定値  $X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  が与えられた時, フィルター  $\lambda(u)$  を通した結果を  $U(t)$  とする.

$$(17) \quad U(t) = \int_{t-T}^t \lambda(u) X_{t-u} e^{-i\omega_0(t-u)} du$$

ただし,  $\lambda(u)$  とその Fourier 変換  $\Lambda(\omega)$

$$(18) \quad \Lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(u) e^{-i\omega u} du$$

は,

$$(19) \quad 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Lambda(\omega)|^2 d\omega = 1$$

を満すように選ぶ. また, ウィンドーの幅  $B_\lambda$  を,

$$(20) \quad B_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |u| |\lambda(u)| du$$

で定義する. もし,  $B_\lambda \ll B_X$  を満足していれば,  $|U(t)|^2$  が, 角周波数  $\omega_0$ , 時刻  $t$  における発展スペクトル  $\rho_e(t, \omega_0)$  の不偏推定量になる. さらに, 推定の安定性を増すために, 重み関数  $W_{T'}(t)$  を用いて

$$(21) \quad V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{T'}(u) |U(t-u)|^2 du$$

とすると,  $V(t)$  は平滑化された発展スペクトル  $\bar{\rho}_e(t, \omega_0)$  の不偏推定量になる. ただし,  $\bar{\rho}_e(t, \omega)$  は, 次式で定義される.

$$(22) \quad \bar{\rho}_e(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{T'}(u) \rho_e(t-u, \omega) du$$

$W_{T'}(t)$  に対する条件は, すべての  $T'$  と  $t$  について,

$$(a) \quad W_{T'}(t) \geq 0$$

$$(b) \quad W_{T'}(t) \rightarrow 0 \quad \text{as } |t| \rightarrow \infty$$

$$(c) \quad \int_{-\infty}^{\infty} W_{T'}(t) dt = 1$$

$$(d) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \{W_{T'}(t)\}^2 dt < \infty$$

$$(e) \quad \lim_{T' \rightarrow \infty} \{T' \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{W}_{T'}(\lambda)|^2 d\lambda\} = C$$

である. ただし,  $\tilde{W}_{T'}(\lambda)$  は

$$\tilde{W}_{T'}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} W_{T'}(t) dt$$

で定義される.

$\lambda(t)$ ,  $W_{T'}(t)$  としてどのようなものがあるかは, Priestley (1965) の原論文を見て欲しい. 次節で, 発展スペクトルの適用例として, シミュレーションデータを扱う. その時に,  $\lambda(t)$ ,  $W_{T'}(t)$

の一例を示す。定常スペクトルを推定する時も、ウィンドーを使うことがあることを考えると、Priestley の推定方法は受け入れ易い方法であると思う。次節の例のように、ゆっくりと統計的性質が変化する過程に対しては、ほぼ満足のいく結果を与えることができる。しかし、フィルター、ウィンドーの選択方法に対する規準を与えておらず、推定結果に任意性が入る可能性が多い。oscillatory process を念頭において議論しているため、原則的には、envelope を持つようなランダム変動、すなわち、振幅変調をうけた過程に適用する時、より有効な推定法となる。

#### 2.4. Mark の physical spectrum

Mark (1970) による physical spectrum (物理スペクトル) の定義を説明する。この定義は、ある時刻  $t$  の近傍の変動の振動成分の周波数領域における分布というスペクトルの持つべき物理イメージを追及したものになっている。非定常確率過程  $X(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  に対して、規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} [w(t)]^2 dt = 1$$

を満たすウィンドー  $w(t)$  を用いて、

$$(23) \quad \rho_p(t, \omega; w) = \langle |\int_{-\infty}^{\infty} w(t-u)X(u)e^{-i\omega u} du|^2 \rangle$$

で非定常スペクトルを定義した。Mark は、ウィンドーの選択規準を示しておらず、推定に任意性が入り込む可能性が多い。また、ウィンドーの幅を小さくとりすぎると、その幅より長い周期を持つゆっくりした変動を見ることができなくなる。アンサンブル平均を定義に含んでいるため、地震波のように、一本のデータしかないような現象を扱うには不向きである。

#### 2.5. 日野の developing spectrum

日野 (1977) は、振動成分の周波数ごとに違った幅の矩形ウィンドーを用いて、スペクトルを推定する方法を考え、developing spectrum (発達スペクトル) と名付けた。非定常過程  $X(t)$  が与えられた時、角周波数  $\omega$  の成分を見るには、少なくとも  $2\pi/\omega$  の時間が必要である。この事実注意到、日野はスペクトルを定義した。 $m$  を正の整数として、

$$(24) \quad \tilde{X}_\omega(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi m/\omega}^t X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

を求めた後、時間間隔  $2\pi m/\omega$  で平均して、非定常スペクトルを定義した。

$$(25) \quad \begin{aligned} \tilde{\Phi}(\omega, t) &= \frac{\omega}{2\pi m} \langle 2\pi |\tilde{X}_\omega(t)|^2 \rangle \\ &= \frac{\omega}{4\pi^2 m} \int \int_{t-2\pi m/\omega}^t \langle X(\tau_1)X(\tau_2) \rangle e^{i\omega(\tau_1-\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

この定義は、周波数ごとにウィンドーの幅を変えることにより、Mark の定義の持つ「ウィンドーの幅より長い周期の振動成分を見るができない」という欠点を改めている。また、角周波数  $\omega$  の振動成分を見るために、 $2\pi m/\omega$  の時間範囲のデータを使うことも、スペクトルの定義として自然である。アンサンブル平均を含んでいるが、繰り返し実験が可能な対象の解析用には、有効な定義である。

### 3. 時間領域でのモデリング

定常時系列データ  $z(n)$ ,  $n=1, 2, \dots, N$  が与えられた時、AR モデルをあてはめて、係数の推定値を用いて、スペクトル推定ができることは、よく知られている。(赤池・中川, 1972) つ

まり

$$(26) \quad z(n) = \sum_{j=1}^m a(j)z(n-j) + \varepsilon(n)$$

$$(27) \quad \langle \varepsilon(n) \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon(n)\varepsilon(n') \rangle = \sigma^2 \delta_{nn'}$$

とする時、 $a(j)$ ,  $\sigma^2$  の推定値  $\hat{a}(j)$ ,  $\hat{\sigma}^2$  を用いてパワースペクトル密度  $q(g)$  ( $-1/2 \leq g \leq 1/2$ ) は、

$$(28) \quad q(g) = \frac{\hat{\sigma}^2}{|1 - \sum_{j=1}^m \hat{a}(j) \exp(-i2\pi gj)|^2}$$

のように推定できる。

この節で説明する時間領域のモデリングを用いた非定常スペクトルの推定法では、すべて(28)式を用いて、スペクトルを求めている。

### 3.1. 局所定常 AR モデル

Ozaki・Tong (1975), Kitagawa・Akaike (1978) によって局所定常 AR モデルが導入された。与えられたデータをいくつかのスパンにわけて、個々のスパンごとに別々の AR モデルをあてはめるべきか、いくつかの連続するスパンに同一の AR モデルをあてはめるべきかを、赤池の情報量規準 AIC (Akaike, 1974) を用いて判断している。得られた AR 係数とイノベーションの分散の推定値を(28)に代入して、スペクトルを推定している。

統計的性質がゆっくり変化する過程を解析するのに、有効な手法であり、2節で述べた方法と比べると、はるかに安定性の高い推定を与えることができる。しかし、スパンごとにモデルを考えているため、モデルを更新するように判定されたスパンの解析をする時、その時点より過去のデータの持つ情報を取込むことができない。また、AIC 最小となるモデルのみ採用することは、複数個のモデルの AIC の値が近い場合に、推定の安定性を低くする恐れがある。

このようなことを改める目的で、注目している時点より以前のスパンに含まれるデータの情報も取り込むことができ、AIC の値を用いて定義される重み関数で、異った次数の AR モデルを同時に考えるベイズ型局所定常 AR モデルが、Kitagawa・Akaike (1981) により提案されている。

### 3.2. 制約条件つきモデル

非定常過程を扱うための制約条件つき時系列モデルが、いくつか提案されている。(Rao 1970, Akaike 1979, Kitagawa 1983, Tamura 1984) これらのモデルを説明していく。著者のモデルについては、数値例をあげて説明する。

#### 3.2.1. Rao のモデル

Rao (1970) はデータ  $z(n)$ ,  $n=1, 2, \dots$  に対し、次の非定常時系列モデルを考えた。

$$(29) \quad z(n) = a(1, n)z(n-1) + a(2, n)z(n-2) + \dots + a(m, n)z(n-m) + \varepsilon(n)$$

ただし、 $\langle \varepsilon(n) \rangle = 0$ ,  $\langle \varepsilon(n)\varepsilon(n') \rangle = \sigma^2 \delta_{nn'}$  である。ある時刻  $n_0$  におけるパラメータ  $a(j, n_0)$ ,  $j=1, 2, \dots, m$  を推定するために、次の関数

$$(30) \quad L(\mathbf{a}, z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} w_l (z(n_0-l) - \sum_{j=1}^m a(j, n_0-l-j)z(n_0-l-j))^2$$

を最小にするパラメータを推定値とする方法を提案した。ただし、 $w_l$  は適当な重み関数であり、 $|l|$  が小さい時のみ、0でない値を持つ。

Rao の方法は、アイデアとしては優れているかもしれないが、実際の推定に使おうとする時、

ARモデルの次数  $m$ , 重み関数  $w_i$  の選択規準については, 全くふれておらず, このままでは実用にならない.

### 3.2.2. Akaike のモデル

赤池は, 第42回 ISI で発表した論文 (Akaike 1979) の中でいくつかの複合型時系列モデルを提案している. その中の一つに, 急激に時間変化するスペクトルを推定するためのモデルがある. このモデルでは, データ  $z(n)$  ( $n = -M+1, -M+2, \dots, 1, \dots, PK$ ) がある時,  $n = (p-1)K+1$  から  $n = pK$  までのデータを  $p$  番目のスパン ( $p=1, 2, \dots, P$ ) に含める. ただし,  $P$  はスパン数,  $K$  は個々のスパンに含まれるデータ数,  $M$  はあてはめる AR モデルの次数である. 個々のスパンで別々の AR モデルを考えているが, 隣り合うスパンの AR 係数の間に, 後述する制約条件を課している.

$p$  番目のスパンのデータにあてはめる AR モデルの係数を  $a_p(m)$  ( $m=0, 1, \dots, M$ ) とする. これらの係数を,  $Q$  に含まれるパラメーター  $a, b, \dots$  を固定して,  $L = SSR + Q$  を最小にするという規準を用いて推定している. ただし,  $SSR, Q$  は, それぞれ残差二乗和, 制約条件である.

$$(31) \quad SSR = \sum_{p=1}^P \sum_{i=(p-1)K+1}^{PK} (z(i) - \sum_{m=1}^M a_p(m)z(i-m) - a_p(0))^2$$

$$(32) \quad Q = c^2 \sum_{i=1}^K \left( \sum_{m=1}^M a_1(m)z(i-m) \right)^2 \\ + a^2 \sum_{p=2}^P \sum_{i=(p-1)K+1}^{PK} \left( \sum_{m=1}^M a_p(m)(z(i-m) - z(i-K-m)) \right)^2 \\ + b^2 \sum_{p=1}^P \sum_{i=(p-1)K+1}^{PK} \left( \sum_{m=1}^M m a_p(m)z(i-m) \right)^2 \\ + d^2 PK a_1(0)^2 + e^2 PK \sum_{p=2}^P (a_p(0) - a_{p-1}(0))^2$$

ここで,  $a^2, b^2$  はスペクトルの時間領域, 周波数領域におけるなめらかさを制御するパラメーターである.  $c^2$  は, スペクトルの初期推定を,  $d^2, e^2$  は平均値の初期推定, なめらかさを制御するパラメーターである. 赤池は,  $c, d, e$  を固定して,  $a, b$  のグリッドサーチを行うことで  $-2 \ln L_B$  の最小値を捜している. ただし,  $L_B$  は,  $SSR, Q$  を用いて, (41) と同様に定義される量である.

赤池は, この論文の中で, AR モデルの次数  $M$  やスパン数  $P$  の選択方法にふれていないが, AIC のような情報量規準を用いれば, これらを実行することは容易であると思う.  $a$  の値を適当に選べば, 赤池の方法を用いて, ゆっくりと時間変化するスペクトルの推定ができる. また, スパン長の選び方は, 過程の統計的性質の変化がゆるやかである限り推定結果にあまり大きな影響を与えないと思う.

### 3.2.3. Kitagawa のモデル

北川により, changing spectrum の概念が導入された. (Kitagawa 1983) データ  $z(n)$ ,  $n=1, 2, \dots, N$  が与えられた時, 各時点で異った係数を持つ AR モデルをあてはめる. 時刻  $n$  における, AR 係数を  $a(i, n)$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) とすると, モデルは,  $n=1, 2, \dots, N$  に対して

$$(33) \quad z(n) = \sum_{i=1}^m a(i, n)z(n-i) + \varepsilon(n)$$

となる. ただし,  $\varepsilon(n)$  は, 平均 0, 分散  $\sigma^2$  の白色ガウス雑音である. 北川は, 係数  $a(i, n)$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ,  $n=1, 2, \dots, N$  の間に次の制約条件を設けた.

$$(34) \quad \nabla^k a(i, n) = \delta(i, n)$$



ただし、 $\nabla$ は差分演算子で、次式で定義される。

$$(35) \quad \nabla a(i, n) = a(i, n) - a(i, n-1)$$

また、 $\delta(i, n)$ は、

$$(36) \quad \begin{aligned} \langle \delta(i, n) \rangle &= 0 \\ \langle \delta(i, n) \delta(j, n) \rangle &= \begin{cases} \tau^2 & \text{for } n=m \text{ and } i=j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

を満足するランダム変動である。カルマンフィルターを用いて、解析している。まず、 $m, k$ を固定して尤度が最大になるように、 $a(i, n), \mu^2 (= \tau^2/\sigma^2)$ を決める。次に、 $m, k$ を変化させて、AICを最小にする $m, k$ を捜す。この時の推定値 $\hat{a}(i, n), \hat{\sigma}^2$ を(28)に代入して、時刻 $n$ におけるスペクトルを求める。

北川の方法は、情報量規準AICを用いて、ARモデルの次数 $m$ 、AR係数の時間変化のなめらかさに関するパラメーター $k$ を決めているため、任意性の入り込むすきまがない。また、カルマンフィルターを用いているので、計算速度も十分速く、高い精度で各時点の係数、スペクトルを推定できる方法となっている。

### 3.2.4. Tamura のモデル

著者は、ゆっくりと統計的性質が変化する過程のスペクトルを扱うためには、Akaike (1979)のように、適当な長さのスパングごとに、ARモデルをあてはめるという方針で、モデル構築を行えば十分であると思う。前節の日野(1977)の発達スペクトルの定義のところで述べたように、周波数 $\omega$ の振動成分を見るためには、少なくとも $2\pi/\omega$ の時間が必要であることを考えれば、スパンの長さは $2\pi/\omega$ 以上にとるべきである。しかし、この節で説明している方法は、著者の方法も含め、制約条件を通して、スペクトルを求めたい時点の前後のデータの情報も取り込んでいるため、スパン長をある程度短くしても、それ程問題ではないと思う。実際、北川の方法は時点ごとに、違った係数を持つARモデルのあてはめを行っているが、全周波数範囲で、真のスペクトルとよく一致する推定結果を与えることができる。

著者の方法(Tamura 1984)を説明する。 $PK+M$ 個のデータ $z(n), n=1-M, 2-M, \dots, 0, 1, \dots, PK$ があるとする。ここで、 $P, K, M$ は、スパン数、スパンに含まれるデータ数、あてはめるARモデルの次数である。 $\{z((p-1)K+1), \dots, z(pK)\}$ のデータを含む $p$ 番目のスパン( $p=1, 2, \dots, P$ )に、次のARモデルをあてはめる。

$$(37) \quad z(i) = \sum_{m=1}^M a_p(m)z(i-m) + a_p(0) + \varepsilon(i)$$

$$(38) \quad \begin{aligned} i &= (p-1)K+1, (p-1)K+2, \dots, pK \\ \langle \varepsilon(i) \rangle &= 0, \quad \langle \varepsilon(i)\varepsilon(j) \rangle = \sigma^2 \delta_{ij} \end{aligned}$$

残差二乗和を $SSR$ とし、係数の間の制約を $Q$ とする。

$$(39) \quad SSR = \sum_{p=1}^P \sum_{i=(p-1)K+1}^{pK} (z(i) - \sum_{m=1}^M a_p(m)z(i-m) - a_p(0))^2$$

$$(40) \quad Q = \sum_{p=2}^P \sum_{i=(p-1)K+1}^{pK} \left( \sum_{m=1}^M (a_p(m) - a_{p-1}(m))z(i-m) + a_p(0) - a_{p-1}(0) \right)^2$$

$Q$ は、 $p$ 番目のスパンで、一時点先の予測を $\{a_p(m)\}$ を用いて行った場合と、 $\{a_{p-1}(m)\}$ を用いて行った場合との差の二乗和である。係数の時間変化のなめらかさを、予測値のずれの量で制御するような制約条件になっている。 $L_B$ を、 $SSR, Q$ を用いて、次のように定義する。

$$(41) \quad L_B = \int (2\pi\sigma^2)^{-PK/2} (2\pi\sigma^2/\mu^2)^{-(P-1)(M+1)/2} \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (SSR + \mu^2 Q)\right) \prod_{p=1}^P \prod_{m=0}^M da_p(m)$$

$-2 \ln L_B$  を最小にするように、 $\mu^2$  を決める。非線形最適化を用いて、最小値を捜してもよいが、計算を簡単にする目的から、グリッドサーチを用いている。 $\sigma^2$  および  $\{a_p(m)\}$  の推定値としては、 $\mu^2$  の各々の値に対して

$$(2\pi\sigma^2)^{-PK/2} (2\pi\sigma^2/\mu^2)^{-(P-1)(M+1)/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (SSR + \mu^2 Q)\right)$$

を最大にするものを使う。

$L_B$  は形式的に、

$$(42) \quad L_B = \int f(\{z(n)\} | \{a_p(m)\}, \sigma^2) g(\{z(n)\}, \{a_p(m)\} | \delta^2) d\{a_p(m)\}$$

と書くことができる。ただし、 $\delta^2 = \mu^2/\sigma^2$  であり、

$$(43) \quad f(\{z(n)\} | \{a_p(m)\}, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-PK/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} SSR\right)$$

$$(44) \quad g(\{z(n)\}, \{a_p(m)\} | \delta^2) = (2\pi\delta^{-2})^{-(P-1)(M+1)/2} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2} Q\right)$$

である。 $g$  の定義に、データが含まれているので、 $L_B$  を赤池の言うところの“marginal likelihood” (Akaike 1980) とみなすことはできない。しかし、“marginal likelihood” を求める時、正則な事前確率を用いると、パラメータの初期値をデータを用いて後退的に推定しなければならず、事前確率は implicit に、データの情報を含んでいるものと考えられる。従って、著者の方法で、 $SSR + \mu^2 Q$  自身でなく、上記の積分された値を用いることは、あながち無謀とは言えないと思う。

赤池のモデルとの違いを述べる。両者の方法の間には、制約条件の違いがある。赤池の制約条件を用いて (44) の  $g$  にあたる関数を作ると、 $\{a_p(m)\}$  の空間で積分可能になる。これに対し、著者の  $g$  は積分不可能である。この点が両者の違いの本質である。ベイズの方法を用いる時に、正則な事前確率を用いるべきか、正則でない事前確率を用いるべきか議論されることが多い。赤池の制約条件と著者の制約条件のどちらを用いた方がよいかの問題も同様な議論の末に、答を出すべきだと思う。また、どちらの方法がより有効かの判断を下すには、数多くの実際のデータを扱う経験が必要になる。ここでは、著者の方法も、赤池の方法も、シミュレーションデータを扱う限り、ほぼ満足のいく推定結果を与えていることを述べておくだけにする。

数値例を述べる。北川が用いた式 (Kitagawa 1983) と同じ式を用いてシミュレーションデータを作る。北川のモデルは、次の4次のARモデルである。

$$(45) \quad z(n) + \sum_{i=1}^4 a(i, n) z(n-i) = \varepsilon(n), \quad n = \dots -3, -2, \dots, 500$$

ただし、 $\varepsilon(n) \sim N(0, 1)$  である。また、AR係数  $a(i, n)$  は、特性方程式

$$(46) \quad s^4 + a(1, n)s^3 + a(2, n)s^2 + a(3, n)s + a(4, n) = 0$$

の根が

$$(47) \quad \begin{aligned} &0.83 \cos w_1(n) \pm 0.83 \sin w_1(n) \sqrt{-1} \\ &0.88 \cos w_2(n) \pm 0.88 \sin w_2(n) \sqrt{-1} \end{aligned}$$

となるように決める。ただし

$$(48) \quad \begin{aligned} w_1(n) &= \frac{5}{9}\pi + \frac{1}{6}\pi \sin\left(\frac{7\pi(n-100)}{2700}\right) \\ w_2(n) &= \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{12}\pi \sin\left(\frac{7\pi(n-100)}{5400}\right) \end{aligned}$$

である。シミュレーションは、 $n < 0$ の時  $z(n) = 0$  として、実行した。

スパン数  $P=5$ 、各スパンに含まれるデータ数  $K=100$ 、AR モデル次数  $M=3, 4, 5, 6, 7$  として解析した。ただし、 $\mu$  の値は  $5 \times 10^j (j=-6, -5, \dots, 4)$  とした。 $M=4, \mu=.5$  で  $-2 \ln L_B$  が最小になった。図 1-(a) に推定したスペクトルを図示する。

Priestley (1965) の evolutionary spectrum の例として、上記のデータを解析した結果を図 1-(b) に示す。フィルターおよびウィンドーは、次のものを用いた。

$$\lambda(u) = \begin{cases} 1/2 \sqrt{7\pi} & |u| \leq 7 \\ 0 & |u| > 7 \end{cases}$$

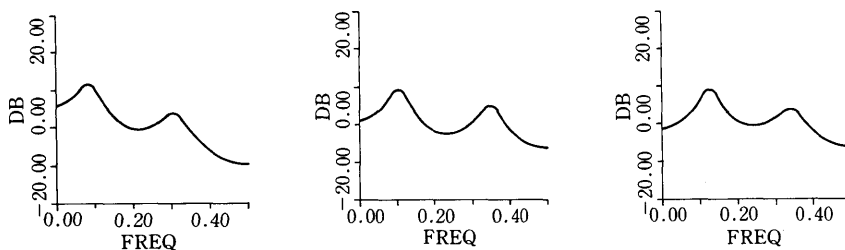


図 1-a Tamura の方法で求めたスペクトル (第 2, 3, 4 スパン)

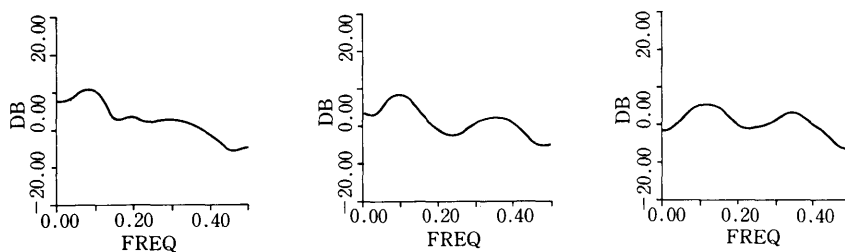


図 1-b Priestley の発展スペクトル ( $n=150, 250, 350$ )

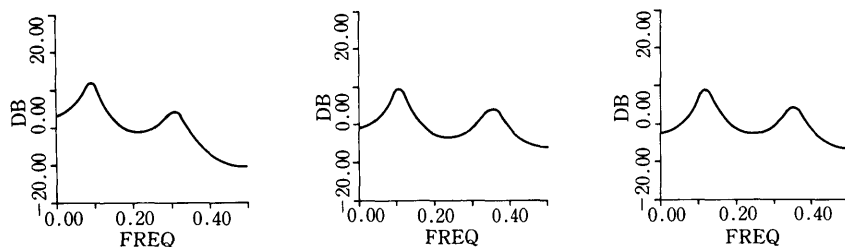


図 1-c 真のスペクトル ( $n=150, 250, 350$ )

$$W_T(t) = \begin{cases} 1/200 & -100 \leq t \leq 100 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

著者の方法で求めたスペクトルと比べるために、発展スペクトル  $\rho_e(t, \omega)$  の代りに、 $q_e(t, g) = 2\pi\rho_e(t, \omega)$  ( $\omega = 2\pi g$ ) を求めた。図 1-(c) に、時刻  $n=150, 250, 350$  における理論スペクトルを図示する。図より明らかなように、著者の方法で求めたスペクトルは、理論スペクトルをよく再現している。これに対し、発展スペクトルは、ほぼ理論スペクトルを再現しているが、ピークがつぶれることや、余分な振動があらわれることがある。他の例でも、ゆるやかに統計的性質が変化する過程を扱う限り、著者の方法は、満足のいくスペクトルの推定を与えることができる。

#### 4. 結 論

非常数スペクトルの定義、推定法について述べてきた。周波数領域における推定法（ノンパラメトリックな推定）には、統計的に満足のいく方法は、ほとんどない。Priestley (1965) の方法は、前節に示したように、ほぼ満足できる推定結果を与えるが、あまり良い推定とは思えない。

これに対し、時間領域で統計モデルのあてはめを行う方法は、適当な情報量規準の助けを借りることにより、満足のいく、安定性の高い推定結果を与えることができる。著者の方法で、ARモデルの次数を選択するのに、どのような情報量規準を用いるべきかは、現在、考慮中である。前節の例では、 $-2 \ln L_B$  の値を用いて次数を選択したが、 $-2 \ln L_B + 2$ （パラメター数）を用いても、 $M=4$  の時に、この値は最小になる。どちらの規準がよいか、また、他の規準を用いた方がよいかは、近々、発表する予定である。スパン長の選択も、何らかの情報量規準を用いて行うべきかもしれないが、前節でも述べたように、制約条件を通して、前後のスパンに含まれるデータの情報が入ってくるため、スパン長が推定結果に大きく影響しないので、それ程強く、スパン長にこだわらなくてもよいと思う。また、 $\mu$  を全スパンで共通にとっているが、 $\mu$  をスパンごとに変化させれば、 $\mu$  の大小により、スパン間の統計的性質の変化の度合を測ることができると思う。これらのことは、準備中の論文 (Tamura 1984) でふれる。

#### 謝 辞

査読者および編集委員会の適切な助言に謝意を表したい。

#### 参 考 文 献

- Akaike, H. (1970). On a semi-automatic power spectrum procedure, *Proceedings of the 3rd Hawaii International Conference of System Sciences*, Part 2, 974-977.
- 赤池弘次, 中川東一郎 (1972). ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-19, 716-723.
- Akaike, H. (1979). On the construction of composite time series model, *Bull. 42nd Session I.S.I.*, 48, 411-422.
- Akaike, H. (1980). Likelihood and the Bayes procedure, *Bayesian Statistics* (eds. Bernardo J.S., DeGroot M.H., Lindley D.V., and Smith A.F.M.).
- Akaike, H. and Ishiguro, M. (1980). BAYSEA (A Bayesian Seasonal Adjustment Program), *Computer Science Monographs*, No. 13, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

- Bendat, J.S. and Piersol, A.G. (1966). *Measurement and Analysis of Random Data*, John Wiley & Sons, New York.
- Blackman, R.B. and Tukey, J.W. (1958). *The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communication Engineering*, Dover, New York.
- Box, G.E.P. and Tiao, G.C. (1975). Intervention analysis with application to economic and environment problems, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **70**, 70-79.
- Cramér, H. (1960). On some classes of non-stationary processes, *Proc. Fourth Berkeley Symposium Math. Statist. and Prob.*, **2**, 57-58.
- 日野幹雄 (1977). スペクトル解析, 朝倉書店, 東京
- Kitagawa, G. and Akaike, H. (1978). A procedure for the modeling of non-stationary time series, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **30B**, 351-363.
- Kitagawa, G. and Akaike, H. (1981). On TIMSAC-78, *Applied Time Series Analysis II* (ed. Findley D.), 449-548, Academic Press, New York.
- Kitagawa, G. (1983). Changing Spectrum Estimation, *J. Sound and Vib.*, **89**, 443-445.
- Loève, M. (1955). *Probability Theory*, Van Nostrand, London.
- Mark, W.D. (1970). Spectral analysis of the convolution and filtering of non-stationary stochastic processes, *J. Sound and Vib.*, **11**, 19-63.
- Ozaki, T. and Tong, H. (1975). On the fitting of non-stationary autoregressive models in time series analysis, *Proceeding of the 8th Hawaii International Conference on System Sciences*, 224-226.
- Page, C.H. (1952). Instantaneous power spectra, *J. Appl. Phys.*, **23**, 103-106.
- Priestley, M.B. (1965). Evolutionary spectra and non-stationary processes, *J.R. Statist. Soc.*, **B27**, 221-224.
- Priestley, M.B. (1967). Power spectra analysis of non-stationary random processes *J. Sound and Vib.*, **6**, 86-97.
- Subba Rao, T. (1970). The fitting of non-stationary time-series model with time-dependent parameters, *J.R. Statist. Soc.*, **B23**, 312-332.
- Tamura, Y-Hamada. (1984). An approach to non-stationary process. in preparation.

## On Spectral Analysis of Non-stationary Process

Yoshiyasu-Hamada Tamura

(The Institute of Statistical Mathematics)

Recently a lot of time-series analysts have given attention to non-stationary processes such as economic data, seismograph records and other vibration records, etc. Power spectral analyses of these processes have been discussed by many authors. In this article a few definitions of non-stationary spectra with non-parametric estimation methods are reviewed. Several other methods to estimate non-stationary spectra with the aid of parametric model buildings in time domain are also discussed.

In Chapter 2, instantaneous spectrum (Page 1952), generalized spectrum (Bendat and Piersol 1966), evolutionary spectrum (Priestley 1965, 1967), physical spectrum (Mark 1970) and developing spectrum (Hino 1977) are over viewed. We have to say that these cannot give us good estimates of non-stationary power spectra.

In Chapter 3, a few models for non-stationary processes in time domain such as the models by Ozaki and Tong (1975), Kitagawa and Akaike (1978, 1981), Rao (1970), Akaike (1979), Kitagawa (1983) and Tamura (1984) are briefly reviewed. These models can give us good estimates of non-stationary power spectra. Numerical examples of Tamura's method are illustrated in Fig.1-a. Evolutionary spectra for the same data are also estimated and shown in Fig.1-b. A comparison of these spectra and theoretical power spectra permits us to conclude that the author's estimate is superior to Priestley's. Chapter 4 is devoted to conclusion and remarks.