

非線形確率微分方程式の厳密解法

統計数理研究所 濱 田 義 保

(1983年12月 受付)

1. 序

統計物理学の分野では、古くから確率微分方程式 (Langevin 方程式) を用いて現象を記述することが広く行われてきた。最近になり原子核物理、素粒子物理の領域においても、確率微分方程式が頻繁に利用され始めた。勿論、生物学、生態学等の分野でも、盛んに確率微分方程式を用いて問題解決が行われている。

いくつかの例を挙げると、

- 1) レーザ光の強度のゆらぎの問題
- 2) 磁性体の磁化の強さのゆらぎの問題
- 3) 化学反応系における濃度のゆらぎの問題
- 4) 重イオンの非弾性衝突のエネルギー散逸の問題
- 5) 生態学における生態数のゆらぎの問題
- 6) 分子遺伝学における突然変異の問題
- 7) 素粒子物理の KNO スケーリングの問題

等々がある。

しかしながら、不幸なことに各分野間の連絡・交流がうまく行われておらず、ある分野ですでに解かれてしまった問題に、別の分野の多くの研究者が挑戦しているのが現状である。例えば、Schenzle・Brand (1979) が、確率微分方程式

$$(1) \quad dX_t = (\gamma X_t - X_t^2)dt + X_t \circ dB_t, \quad \gamma > 0$$

に対応する Fokker-Planck 方程式を固有値問題として扱っているが、全く同じことを Wong (1963) は、彼らより 16 年も前に行っていた。

また、モーメントに関する連立方程式の解法も、高次モーメントの decoupling を行い、有限次元の方程式にして解く方法が、いまだに用いられている分野もある。よりよい近似解、あるいは特定の方程式に対しては厳密解を与える方法として、Scaling 理論 (Suzuki (1981)), MAI 法 (Hamada (1980), (1981)), Carleman 法 (Brenig・Banai (1982), Hamada (1983)) が提案されている。しかし、統計物理学以外の研究者に、これらの方法は、あまり知られていない。

本稿の目的は、(1) の確率微分方程式のいくつかの解法を説明することである。得られた解の物理的解釈は、Hamada・Muto (1983) に書いたので、ここではふれないことにする。また、本稿で扱うのは(1)式のみとするが、どのような形の方程式ならば、ここで述べた方法を用いることができるかは、以下の各章で述べる。

2. Fokker-Planck 方程式の解法

序文に書いたように、確率微分方程式

$$dX_t = (\gamma X_t - X_t^n)dt + X_t dB_t, \quad \gamma > 0$$

について考える。ただし、 B_t は Wiener 過程で

$$(2) \quad \langle dB_t \rangle = 0, \quad \langle dB_t dB_t \rangle = 2\varepsilon dt$$

を満す。ここで $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を意味する。またノイズ項の解釈は Stratonovich の規則 (Stratonovich (1963)) に従うものとする。この場合 X_t の確率密度関数 $P(X, t)$ を支配する Fokker-Planck 方程式は (1) に対応して次の形をとる：

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} P(X, t) = - \left\{ \frac{\partial}{\partial X} ((\gamma + \varepsilon)X - X^n) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial X^2} X^2 \right\} P(X, t)$$

スケール変換

$$(4) \quad \tau = (n-1)^2 \varepsilon t, \quad Z = (n-1)\varepsilon X^{1-n}, \quad \Pr(Z, \tau) dZ = P(X, t) dX$$

を施すことにより、

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \Pr(Z, \tau) = - \frac{\partial}{\partial Z} \{1 - (2\alpha - 1)Z\} \Pr(Z, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} Z^2 \Pr(Z, \tau)$$

を得る。ただし、 $2\alpha = \gamma / (n-1)\varepsilon$ である。この方程式は、Wong (1963) の論文の 2-F と同じものである。反射壁の境界条件

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial Z} Z^2 \Pr(Z, \tau) - \{1 - (2\alpha - 1)Z\} \Pr(Z, \tau) = 0, \quad Z = 0, \infty$$

を持つ遷移確率密度関数は、

$$(7) \quad \Pr(Z, \tau | Z_0) = Z^{-(2\alpha+1)} e^{-1/Z} \left\{ \sum_{k=0}^N \frac{2(\alpha-k)}{\Gamma(2\alpha+1-k)} \frac{1}{k!} e^{-\lambda_k \tau} \theta_k(Z_0) \theta_k(Z) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\mu e^{-\lambda_\mu \tau} A(\mu) g(\mu, Z_0) g(\mu, Z) \right\}$$

となる。ただし、 $\Pr(Z, 0 | Z_0) = \delta(Z - Z_0)$ である。また、

$$(8a) \quad \lambda_k = k(2\alpha - k), \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (\alpha - 1 \leq N < \alpha)$$

$$(8b) \quad \lambda_\mu = \alpha^2 + \mu^2, \quad \mu \geq 0$$

$$(9) \quad \theta_k(x) = (-)^k x^{2\alpha+1} e^{1/x} \frac{d^k}{dx^k} (x^{2\alpha+2\alpha-1} e^{-1/x})$$

$$(10) \quad g(\mu, x) = {}_2F_0(-\alpha - i\mu, -\alpha + i\mu; ; -x)$$

$$(11) \quad A(\mu) = \frac{\Gamma(-\alpha + i\mu) \Gamma(\alpha + i\mu)}{\Gamma(2i\mu) \Gamma(-2i\mu)}$$

である。ここで、 ${}_2F_0$ は一般化超幾何関数である (Erdélyi (1953))。 $\tau \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$\Pr(Z, \infty | Z_0) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} Z^{-(2\alpha+1)} e^{-1/Z}$$

となる。上式が、Pearson 方程式 (Cramer (1946))

$$(12) \quad \frac{d}{dZ} \Pr(Z, \infty | Z_0) = \frac{1 - (2\alpha + 1)Z}{Z^2} \Pr(Z, \infty | Z_0)$$

を満足することを注意しておく。つまり、Fokker-Planck 方程式 (3) で記述される非線形確率過程に非線形変換 (4) を施すと、定常分布が Pearson 方程式を満足するような確率過程に変換できるわけである。もとの変数 X に戻すと、遷移確率密度関数 $P(X, t | X_0)$ 及び定常確率密度関数 $P_{st}(X)$ は

$$(13) \quad P(X, t | X_0) = \frac{n-1}{X} \left(\frac{(n-1)\varepsilon}{X^{n-1}} \right)^{-2\alpha} \exp \left(-\frac{X^{n-1}}{(n-1)\varepsilon} \right) \\ \times \left\{ \sum_{k=0}^N \frac{2(\alpha-k)}{\Gamma(2\alpha+1-k)} \frac{1}{k!} e^{-k(2\alpha-k)(n-1)^2\varepsilon t} \theta_k \left(\frac{(n-1)\varepsilon}{X_0^{n-1}} \right) \theta_k \left(\frac{(n-1)\varepsilon}{X^{n-1}} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\mu A(\mu) e^{-(\alpha^2+\mu^2)(n-1)^2\varepsilon t} g\left(\mu, \frac{(n-1)\varepsilon}{X_0^{n-1}}\right) g\left(\mu, \frac{(n-1)\varepsilon}{X^{n-1}}\right) \right\}$$

$$(14) \quad P_{st}(X) = \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \frac{n-1}{X} \left(\frac{(n-1)\varepsilon}{X^{n-1}} \right)^{-2\alpha} \exp \left(-\frac{X^{n-1}}{(n-1)\varepsilon} \right)$$

となる。モーメント $a_p(t)$ は、(13) を用いて容易に求めることができる。

$$(15) \quad a_p(t) = \int_0^\infty dX P(X, t | X_0) X^p \\ = \frac{((n-1)\varepsilon)^{p/(n-1)}}{\Gamma(p/(n-1))} \left\{ \sum_{k=0}^N \frac{2(\alpha-k)}{\Gamma(2\alpha+1-k)} \frac{(-)^k}{k!} \Gamma\left(k + \frac{p}{n-1}\right) \right. \\ \times \Gamma\left(2\alpha-k + \frac{p}{n-1}\right) \exp(-k(2\alpha-k)(n-1)^2\varepsilon t) \theta_k((n-1)\varepsilon/X_0^{n-1}) \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\mu A(\mu) e^{-(\alpha^2+\mu^2)(n-1)^2\varepsilon t} \Gamma\left(\alpha + \frac{p}{n-1} + i\mu\right) \right. \\ \left. \times \Gamma\left(\alpha + \frac{p}{n-1} - i\mu\right) g\left(\mu, (n-1)\varepsilon/X_0^{n-1}\right) \right\}$$

この表式は、複雑な計算を行うことにより、次章で得られる結果と一致する。筆者は、モーメントの時間変化のみが必要な時は、次章の方法を用いることを勧めたい。

非線形確率過程 (3) の時間変化の様子を完全に記述するのに必要な遷移確率密度関数 (13) を求めることができたのは、非線形変換によって、固有値問題として扱えるようになったためである。固有値問題として解かれた方程式の例は、Pearson 系については、Wong (1963) の仕事がある。また、その他多くの例が、Goel-Dyn (1974) の教科書に載せられている。非線形確率過程の遷移確率密度関数を求めたい時は、これらの文献の結果を、そのまま用いるか、また非線形変換の助けを借りてから、文献の結果を利用するとよい。これらの文献で扱っていないような場合は、近似計算に頼るしかないが、そのひとつとして、WKB 法(Caroli-Caroli-Roulet (1979)) をあげておく。

3. モーメント方程式の解法

非線形確率微分方程式のモーメント $a_p(t)$

$$(16) \quad a_p(t) = \int_0^\infty dX \cdot X^p P(X, t)$$

の時間変化について考える。モーメントの従う方程式は、

$$(17) \quad \frac{d}{dt} a_p(t) = (p\gamma + p^2\varepsilon) a_p(t) - p a_{p+m}(t), \quad p=1, 2, \dots$$

となる。ただし、 $m=n-1$ である。この方程式は、線形連立微分方程式であるが、無限次元であるので、高次モーメントを低次モーメントの積であらわして、有限次元の連立方程式にして解く方法がとられてきた。しかし、このような方法は、必ずしも良い近似解を与えるとは限らない。そこで、筆者はモーメント方程式を積分方程式に直し、逐次的に解いて行き、漸近的に無限次までのモーメントをとり込む方法を提案した。(Hamada (1980), (1981))。加算的な雜音を持つ確率微分方程式

$$dX_t = (\gamma X_t - X_t^n) dt + dB_t$$

に対しては、漸近的(時間が十分大きくなると漸近的に真の解に近づく)な解を求めた(Hamada (1980)). また、(1)の形のマルチプリカティブな雑音を持つ方程式に対して、同様な方法を用いると、無限次のモーメントまで厳密にとり込むことができる事がわかった (Hamada (1981), Hamada・Muto (1983)).

また、(17)の連立方程式を、行列を用いて表示し、その行列の固有ベクトルを用いてモーメントの変化を求める Carleman 法 (Brenig・Banai (1982)) や、(17)をラプラス変換した連立方程式を解いたのち逆ラプラス変換により、モーメントの変化を求める Carleman 法 (Graham・Schenzle (1981)) がある。以下で積分方程式を用いる方法及びラプラス変換を用いる Carleman 法について概説する。

3.1. 積分方程式による方法

(17)を積分方程式であらわすと、

$$(18) \quad a_p(t) = e^{(p\gamma + p^2\varepsilon)t} (x_0^p - p \int_0^t ds e^{-(p\gamma + p^2\varepsilon)s} a_{p+m}(s))$$

となる。ただし、 $a_p(0)=x_0^p$ としている。つまり、時刻 $t=0$ での確率密度関数が $\delta(X-x_0)$ で書ける場合を考えている。(18)式を見ると、右辺に $a_{p+m}(s)$ を含んでいるが、このモーメントの従う式は、

$$(19) \quad a_{p+m}(t) = e^{((p+m)\gamma + (p+m)^2\varepsilon)t} (x_0^{p+m} - (p+m) \int_0^t ds e^{-(p+m)\gamma + (p+m)^2\varepsilon s} a_{p+2m}(s))$$

となり、さらに高次のモーメントを含むようになる。結局 $a_p(t)$ の時間変化には $a_{p+km}(t)$ ($k=1, 2, \dots$) が影響を与えており、これらをすべて同時に考えなければならないことがわかる。今の場合、次々と高次のモーメントの形式解を代入して行くことにより、

$$(20) \quad a_p(t) = e^{(p\gamma + p^2\varepsilon)t} x_0^p \sum_{k=0}^{\infty} I_k(t)$$

ただし、 $I_0(t)=1$ であり、 $k=1, 2, \dots$ に対し、

$$(21) \quad I_k(t) = (-m)^k (p/m) x_0^{km} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{k-1}} ds_k \times \prod_{l=1}^k \exp \{m(\gamma + (2p + (2l-1)m)\varepsilon)s_l\}$$

である。ここで、 $(b)_k = b(b+1), \dots, (b+k-1)$ である。この積分は容易に実行でき(筆者も独立に求めたが Suzuki・Takesue・Sasagawa (1982) の方が早く発表した)，次のようになる。

$$(22) \quad I_k(t) = \left(\frac{p}{m}\right)_k x_0^{km} \frac{1}{k!(m\varepsilon)^k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{(\gamma/m\varepsilon + 2p/m + 2l)\Gamma(\gamma/m\varepsilon + 2p/m + l)}{\Gamma(\gamma/m\varepsilon + 2p/m + l + k + 1)} \times \exp(l(m\gamma + 2mp\varepsilon + m^2\varepsilon l)t)$$

上式を(20)式に代入して、

$$(23) \quad a_p(t) = x_0^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x_0^m}{m\varepsilon}\right)^k \frac{(p/m)_k}{(\gamma/m\varepsilon + 2p/m + k)_k} \times \exp((p+mk)\gamma + (p+mk)^2\varepsilon)t \times {}_1F_1(p/m+k; \gamma/m\varepsilon + 2p/m + 2k + 1; x_0^m/m\varepsilon)$$

を得る。ここで ${}_1F_1(b; c; z)$ は合流型超幾何関数である。

このように、無限次の連立方程式になるにもかかわらず、モーメント方程式(17)の解を得ることができる。これは、(1)の確率微分方程式だけが特別なのではなく、モーメント方程式がある特殊な形をしていれば、同じ方法を用いて解を得ることができる。どのような形をしていれば良いかは次節で説明する。

3.2. Carleman 法

モーメント方程式 (17) にラプラス変換

$$(24) \quad \tilde{a}_p(\lambda) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} a_p(t)$$

を施すことにより、

$$(25) \quad (\lambda - p\gamma - p^2\varepsilon)\tilde{a}_p(\lambda) + p\tilde{a}_{p+m}(\lambda) = x_0^p$$

を得る。ここでは、前節と同様に $a_p(0) = x_0^p$ としている。また、前節で述べたように、 $a_p(t)$ の時間発展を求める時は、 $a_{p+km}(t)$ ($k=1, 2, \dots$) も同時に考えなくてはならないので、これらのラプラス変換を含めて、次の連立方程式を考える。

$$(26) \quad \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_{p0} & p & 0 \\ & \lambda - \lambda_{p1} & p+m \\ 0 & & \lambda - \lambda_{p2} & p+2m \\ & & & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_p(\lambda) \\ \tilde{a}_{p+m}(\lambda) \\ \tilde{a}_{p+2m}(\lambda) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^p \\ x_0^{p+m} \\ x_0^{p+2m} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ただし、 λ_{pk} は、次式で定義される。

$$(27) \quad \lambda_{pk} = (p+km)(\gamma + (p+km)\varepsilon)$$

連立方程式 (26) で、左辺の係数の作る行列が上三角行列であるため、その逆行列を容易に求めることができ、次のような解を得ることができる。

$$(28) \quad \begin{pmatrix} \tilde{a}_p(\lambda) \\ \tilde{a}_{p+m}(\lambda) \\ \tilde{a}_{p+2m}(\lambda) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - \lambda_{p0}} & \frac{-p}{(\lambda - \lambda_{p0})(\lambda - \lambda_{p1})} & \frac{p(p+m)}{(\lambda - \lambda_{p0})(\lambda - \lambda_{p1})(\lambda - \lambda_{p2})} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\lambda - \lambda_{p1}} & \frac{-(p+m)}{(\lambda - \lambda_{p1})(\lambda - \lambda_{p2})} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda - \lambda_{p2}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0^p \\ x_0^{p+m} \\ x_0^{p+2m} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

逆ラプラス変換を行うことにより、前節で得たものと同じモーメント $a_p(t)$ の表式が得られる。Carleman 法で、モーメントの時間発展の厳密解が得られるのは、この例のように、ラプラス変換した後の連立方程式の係数の作る行列が上三角（あるいは、下三角）になる場合である。このような場合は、前節の積分方程式を用いる方法でも解を求めることができる。

これに対し、本章の最初に示した可算的雑音を持つ確率微分方程式では、モーメントのラプラス変換から成る連立方程式の係数の作る行列が帯状行列となり、逆行列を求めることができないため、近似に訴える必要がある (Hamada (1983))。この加算的雑音を持つ確率微分方程式に対応する Fokker-Planck 方程式の厳密解も求めることができず、種々の近似解法が考えられていることも注意しておく (Suzuki (1981), (1983), Caroli・Caroli・Roulet (1979), Valsakumar (1983))。

4. 結 論

非線形確率微分方程式で書き表された確率過程の時間発展の仕方を調べるための方法を、例を用いて説明した。他の確率微分方程式でも、2・3章の最後に示したような形のものなら、同様な方法を用いて扱うことができる。3.2節で述べた条件を言い換えると、「モーメント $a_p(t)$ の時間変化をあらわす運動方程式に、 p 次以上の次数のモーメントしかあらわれない場合は、Carleman 法を用いて $a_p(t)$ の時間変化を求めることができる。」となる。この条件を満す非線形確率微分方程式の対応する Fokker-Planck 方程式が、固有値問題を用いて扱えるものになるのである。数学的な厳密性に欠けるかもしれないが、上記の条件を満足する非線形確率微分方程式の集合が、本稿で説明した方法を用いることのできる族を形成する。

3章の初めに書いた加算的雑音を持つ非線形確率微分方程式に対応するモーメント方程式は、

$$\frac{d}{dt}a_p(t) = p\gamma a_p(t) - p a_{p+m}(t) + p(p-1)\varepsilon a_{p-2}(t)$$

となり、先に述べた条件を満足しない。このモーメント方程式の近似解法については、筆者の MAI 法 (Hamada (1980)) 及び、"一般化" Carleman 法 (Hamada (1983)) がある。

非線形確率微分方程式の時間発展を調べる方法として、計算機シミュレーションがある。マルチプリカティブな雑音を持つ確率微分方程式では、雑音項の解釈が重要になる。本稿では、Stratonovich の規則に従ったが、シミュレーションの時は、対応する Ito の規則 (伊藤 (1978)) に従った雑音項を持つ確率微分方程式に直した方が良い。(1) に対応する Ito 型の方程式は、

$$(29) \quad dX_t = ((\gamma + \varepsilon)X_t - X_t^n)dt + X_t dB_t$$

となる。これを、時間間隔 Δt で離散化し、

$$(30) \quad X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = ((\gamma + \varepsilon)X_{t_i} - X_{t_i}^n)\Delta t + X_{t_i} \sqrt{\Delta t}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

を計算機で扱えば良い。ただし、 $t_i = i\Delta t$, $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ は、平均 0, 分散 2ε の白色ガウス過程である。 Δt を 10^{-3} 程度にとり、500 本程度のパスの平均をとると、解析的に計算した 2.3 章の結果と、ほとんど一致するモーメントを得ることができる (Hamada・Muto (1983))。

謝 辞

査読者の有益な助言に感謝する。2章に述べたことの一部は、東京工業大学の武藤一雄氏の協力により得られた結果である。氏に感謝の意を表したい。

参 考 文 献

- Brenig, L. and Banai, N. (1982). Nonlinear dynamics of systems coupled with external noise: some exact results, *Physica*, **5D**, 208-226.
- Caroli, B., Caroli, C. and Roulet, B. (1979). Diffusion in a bistable potential. —a systematic WKB treatment, *J. Stat. Phys.*, **21**, 415-437.
- Cramer, H. (1946). Mathematical methods of statistics, *Princeton Univ. Press*, Princeton.
- Erdélyi, A. (1953). *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York.
- Goel, N.S. and Dyn, N. (1974). Stochastic Model in Biology, *Academic Press*, New York.
- Graham, R. and Schezles, A. (1981). Carleman imbedding of multiplicative stochastic processes, *Phy. Rev. A*, **25**, 1731-1754.
- Hamada, Y. (1980). A method for solving a stochastic differential equation—An application to the kinetic Ising model with the external noise—, *Prog. Theor. Phys.*, **64**, 1127-1137.

- Hamada, Y. (1981). Dynamics of noise-induced phase transition of the Verhulst model, *Prog. Theor. Phys.*, **65**, 850-860.
- Hamada, Y. (1983). An asymptotic solution of stochastic differential equation, *Prog. Theor. Phys.*, **70**, 1014-1023.
- Hamada, Y. and Muto, K. (1983). Remarks on existence of noise-induced long-time tail, *Prog. Theor. Phys.*, **69**, 451-463.
- 伊藤 清 (1978). 確率微分方程式 ——生い立ちと展開——, 数理科学, **185**, 5-9.
- Schenzle, A. and Brand, H. (1979). Multiplicative stochastic processes in statistical physics, *Phys. Rev. A*, **20**, 1628-1647.
- Stratonovich, R. (1963). *Topics in the Theory of Random Noise*, Gordon & Breach, New York.
- Suzuki, M. (1981). Passage from an initial unstable state to a final stable state, *Adv. Chem. Phys.*, **46**, 195-278.
- Suzuki, M., Takesue, S. and Sasagawa, F. (1982). Critical slowing down in Stochastic Processes. II —Noise-induced long-time tail in random growing-rate models—, *Prog. Theor. Phys.*, **68**, 98-115.
- Suzuki, M. (1983). New unified formulation of transient phenomena near the instability point on the basis of the Fokker-Planck Equation, *Physica*, **117A**, 103-108.
- Valsakumar, M.C. (1983). Solution of Fokker-Planck equation using Trotter's formula, *J. Stat. Phys.*, **32**, 545-553.
- Wong, E. (1963). The construction of a class of stationary Markoff processes, *Proc. Amer. Math. Soc. Symp. Appl. Math.*, **16**, 264-276.

Note on the Exact Methods of Solving Non-linear
Stochastic Differential Equations

Yoshiyasu Hamada

(The Institute of Statistical Mathematics)

In this note several methods to solve exactly a class of stochastic differential equations are reviewed. An application of these methods to the following stochastic differential equation is described :

$$(1) \quad dX_t = (\gamma X_t - X_t^n)dt + X_t \circ dB_t, \quad \gamma > 0,$$

where B_t is the Wiener process with $\langle dB_t \rangle = 0$ and $\langle dB_t dB_t \rangle = 2\varepsilon dt$, and where symbol “ \circ ” means Stratonovich calculus.

In § 2 the corresponding Fokker-Planck equation

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t}P(X, t) = - \left\{ \frac{\partial}{\partial X}((\gamma + \varepsilon)X - X^n) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial X^2}X^2 \right\} P(X, t)$$

is solved with the aid of non-linear transformation and of eigenvalue spectrum of transformed Fokker-Planck equation, whose solution in steady state satisfies Pearson equation.

In § 3 the simultaneous equations of moments

$$(3) \quad \frac{d}{dt}a_p(t) = (p\gamma + p^2\varepsilon)a_p(t) - pa_{p+n-1}(t), \quad p=1, 2, \dots,$$

where

$$a_p(t) = \int_0^\infty dX \cdot X^p P(X, t)$$

are studied. Successive substitutions of formal solutions of the higher moments to $a_{p+n-1}(t)$'s in the following equations which are equivalent to (3)

$$(4) \quad a_p(t) = e^{(p\gamma + p^2\varepsilon)t} (x_0^p - p \int_0^t ds e^{-(p\gamma + p^2\varepsilon)s} a_{p+n-1}(s))$$

lead to an exact and closed expressions of $a_p(t)$.

Carleman method of linear imbedding is also explained. The methods discussed in this note are available when the equation of motion for the p -th moment contains only moments of order higher than p .