Sci. Kyushu Univ. Ser. E (Biol.) **4**, 1-60.
Ripley, B.D. (1981). *Spatial Statistics*, Wiley, New York.
種村正美・尾形良彦 (1981). 点の空間配置パターンを測る——なわばりの生態学——, 数理科学, No. **213**, 11-16.

Analysis of Spatial Patterns of Territory

Masaharu Tanemura

Territories of animals often show a regular or a spaced-out pattern owing to a repulsive interaction which comes from territorial aggressions between individuals. The difference in the degree of repulsiveness between different animal species may be reflected on the spatial patterns of territory. The likelihood procedure for estimating such interactions as potential functions developed by Ogata and Tanemura is briefly reviewed. The mapped data of gull's nests are analyzed as an example and a potential is estimated from a certain family of repulsive interaction potentials using approximated log likelihoods which are valid up to a rather high population density.

算術平均についての極限定理
—渡辺孫一郎と A.A. マルコフの業績—

清 水 良 一

互いに独立でない確率変数列について先駆的な仕事をした，この二人の研究者の業績の一部を紹介したい．

A.A. マルコフ (1856—1922) は A.M. リアプノフ (1857—1918) らと共に，St. ペテルスブルグ派の創始者 P.L. チェビシェフ (1821—1894) の弟子である．そのチェビシェフは，数論，解析学，力学など多方面で活躍した人で，確率論関係では，

【C1】 1867 平均値について (チェビシェフの不等式と，大数の弱法則の導出)

【C2】 1887 確率論における 2 つの定理 (独立な変数列の中心極限定理)

など 4 つの論文を書いている．マルコフがこの分野で遺した仕事は，主としてこの 2 つの論文の発展，とくに，独立でない場合への拡張である．【C1】でチェビシェフは次のことを証明している．

“$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立な確率変数で，それぞれの X_k は平均値 μ_k と有限の分散 σ_k^2 をもつとする．$\bar{X}=(X_1+\cdots+X_n)/n$, $\bar{\mu}=(\mu_1+\cdots+\mu_n)/n$ とおく．このとき，もし

(1) $\sigma_k^2 \leqq C < \infty$, $k=1, 2, \cdots, n$

ならば

(2) $\lim_{n\to\infty} \Pr\{|X-\bar{\mu}| \leqq \varepsilon\}=1$, $\varepsilon>0$

が成り立つ．”

チェビシェフの証明をみればすぐ分るように，条件 (1) はもっと弱い

(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2=0$

でおきかえることができる．マルコフは

【M1】 1907 互いに独立でない変数列についての大数の法則

の中で，次のように述べている．“チェビシェフの条件 ((1) あるいは (3)) は，独立変数の場合に限定してさえ，大数の法則が成立するすべての場合をつくしているというにはほど遠いものである．私はこの論文で，大数の法則が成立するための必要十分条件を導こう，と考えている訳ではない．そうではなくて，変数が互いに独立ではない場合であっても，十分に一般な条件のもとでチェビシェフの結論が成り立ち得ることを示したいのである．”

さて，条件 (3) は，もっと一般に

(4) $\lim E(\bar{X}-\bar{\mu})^2=0$

でおきかえることができる．それは，チェビシェフの不等式から明らかであろう．チェビシェフの場合は変数の間の独立性を仮定しているので，(4) と (3) が同等な条件になっているに過ぎない．マルコフは (4) が成り立つような範囲で，X_1, $X_2, \cdots$, X_n の間の独立性の条件がどこまでゆるめられるかを検討したのである．いいかえれば，マルコフは独立性の条件をはずすに当って，条件 (4) が満足されるような構造を変数列 X_1, $X_2, \cdots$, X_n のなかに導入したのだ，といってよい．最も簡単な場合としてマルコフがまず取りあげたのは，条件 (1) が成り立つ場合である．

$$E(\bar{X}-\bar{\mu})^2 \leqq \frac{1}{n^2}\{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

$$+2\sum_{j<k}\mathrm{Cov}(X_j, X_k)\}$$

となるから，(4) が成り立つためには，したがって，大数の法則が成り立つためには

$$\sum_{j<k}\mathrm{Cov}(X_j, X_k)\leqq 0,\quad k=2, \cdots, n,$$

すなわち，$k\leqq 2$ について $X_1+X_2+\cdots+X_{k-1}$ と X_k が負（または0）の相関をもてばよい，ということになる．

大数の法則が成り立つもう一つの例として，マルコフは次のような系列（マルコフ連鎖）を考えている．ある事象Aが起るかどうかを観察する試行列において，

$$X_k=\begin{cases}1, & k\text{ 回目の試行で事象Aが起ったとき}\\ 0, & \text{起らなかったとき}\end{cases}$$

とおく．いま，$X_1, \cdots, X_{k-1}$ が与えられたとき，事象 $X_k=1$ の起る条件つき確率は $X_1, \cdots, X_{k-2}$ には無関係で，$X_{k-1}=1$ または0に応じて，それぞれ p' および p'' であるとする．p', p'' および $p=\Pr\{X_k=1\}$ はいずれも k に無関係であるとする．$\mathrm{E}(X_k)=p$ であり，p, p', p'' の間には $p=pp'+(1-p)p''$ という関係がある．よういに確かめられるように $p'\leqq p''$ なら $X_1+\cdots+X_{k-1}$ は X_k と負の相関をもつし，また，もし $p'\geqq p''$ ならば

$$\mathrm{E}(\bar{X}-p)^2\leqq p(1-p)(1+p'-p'')/n(1-p'+p'')$$

となるから，いずれにしても，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ に対して大数の法則が成り立つ．この例はさらに一般化できる．マルコフは離散的な確率変数の列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が条件

“X_k が与えられたという条件のもとでは，X_{k+1} は $X_1, X_2, \cdots, X_{k-1}$ と独立（単純マルコフ性）”

を満すなら，

$$\mathrm{E}(\bar{X}-\bar{\mu})^2=0(n^{-1})$$

であり，したがって大数の法則 (2) が成り立つということを証明しているのである．

次に，中心極限定理に関しては，マルコフはチェビシェフ【C2】の批判，修正，厳密化から研究を始めている．

【M4】 1898　大数の法則と最小2乗法．

手法としてはチェビシェフのモーメント法を踏襲する．つまり，$X_1+\cdots+X_n$ を適当に基準化したもののすべてのモーメントが，正規分布のモーメントに収束することを示すことによって，中心極限定理を証明するのである．したがって，基本的にはすべてのモーメントが必要である．独立の場合に $2+\delta$ 次のモーメントだけを仮定したリアプノフに較べてずっと弱い結果になっている．しかし，マルコフは

【M3】 1913　A.M. リアプノフ氏の極限定理について

において確率変数 X_k の代りにその truncation

$$X'_k=\begin{cases}X_k, & |X_k|\leqq N\text{ のとき}\\ 0, & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

を用いることによって，モーメント法を用いながらリアプノフと同じ結果を得ることに成功しているのである．

【M4】 1907　従属な連鎖をなす確率変数の和に関する一般極限定理

は時間的に一様なマルコフ連鎖に関するものである．マルコフは

$$X_1+\cdots+X_n-na$$

の高次のモーメントを計算する手法を開発し，a の値をいくらにすればよいかを明らかにしている．さらにマルコフは

【M5】 1910　従属な連鎖をなす一般の試行列に関する研究

において，$X_k=0$ or 1 という，最も単純な場合ながら，時間的には一様でなくても

$$\Pr\{X_k=1|X_{k-1}=1\},\ \Pr\{X_k=1|X_{k-1}=0\}$$

などが0や1に近づかない限り，$X_1, \cdots, X_n$ について中心極限定理が成り立つことを証明している．

渡辺孫一郎（1885—1955）は学位論文

【W1】 1919　On a Determinate System of Non-Independent Trials

で，独立性の仮定なしに，$X_1, \cdots, X_n$ の算術平均 $\bar{X}_n$ の極限理論を展開することを試みて，次の定理を証明した．

“X_k は有限個の値 a_{km}, $m=1, \cdots, m_k$ をとりうる確率変数とし，$|a_{km}|\leqq C$ を仮定する．算術平均 $\bar{X}_n=(X_1+\cdots+X_n)/n$ の分布がある分布 G に収束するための必要十分条件は

$$\mu_r=\lim \mathrm{E}(\bar{X}_n)^r,\quad r=1, 2, \cdots$$

が存在することである．μ_r は G の r 次のモーメントになる．”

渡辺は，この定理を証明するのに変数 $X_1, \cdots, X_n$ の独立性を仮定していないが，実際に必要なのは変数列 $\bar{X}_n$ が一様に有界ということだけであって，これらが算術平均であることすらどうでもよいのである．渡辺自身，$\bar{X}_n$ が算術平均であることを証明の本質的なところで使っていない．そ

の意味では渡辺のこの定理は，算術平均の極限定理としてはつまらないものになってしまっているようにみえる．しかし，収束に関する彼の議論はていねいで実に正確である．渡辺は算術平均にこだわっていたようであるが，もし，もう少し抽象的レベルでの収束の概念に到達していたら，はるかに豊富な理論を展開できたであろうと思われる．

渡辺の論文で興味あるのは，むしろ，彼が例としてあげている次の命題であろう．“$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は 0 または 1 をとる，時間的に一様でないマルコフ連鎖とし

$$\lim n^a \Pr\{X_n=0 \mid X_{n-1}=1\}=P,$$
$$\lim n^a \Pr\{X_n=1 \mid X_{n-1}=0\}=Q,$$
$$a>0,\ 0<P+Q<\infty$$

とする．このとき，もし $a<1$ なら大数の法則が成り立ち，$\bar{X}_n$ は $Q/(P+Q)$ に確率収束する．もし $a>1$ ならば，$\bar{X}_n$ の分布はある 2 点分布に，また，$a=1$ ならばベータ分布に収束する．”

Limit Theorems for Arithmetic Means ——A Historical Sketch of Works of M. Watanabe and A.A. Markov——

Ryoichi Shimizu

This is a lecture delivered at the Institute of Statistical Mathematics on the occasion of 39th anniversary of its existence. A historical sketch was given concerning the pioneering works of A.A. Markov (Russia, 1856-1922) and M. Watanabe (Japan, 1885-1955) on the limit theorems for dependent random variables.

The starting point of Markov's theory was the extension of Chebyshev's law of large numbers to the case of dependent summands. Morkov noticed that the law of large numbers is a simple consequence of Chebyshev's inequality if only the condition $\lim \mathrm{E}(\bar{X}-\bar{\mu})^2=0$ is satisfied. He introduced the concept of what we now call Markov chain to provide an example of a sequence of dependent random variables to which the law of large numbers applied. He also proved the central limit theorem for these variables.

Watanabe developed a general convergence theory as early as in the late 1910's. One of the most interesting results he obtained is the following limit theorems: let $p(n)$ and $q(n)$ be the transtion probabilties from the state 1 to 0 and from 0 to 1 respectively in a non-homogeneous simple Markov chain with the state space $\{0, 1\}$. Suppose there exist positive numbers a, P and Q such that $n^a p(n)$ and $n^a q(n)$ tend to P and Q respectively as n tends to infinity. Then the relative frequency $\bar{X}_n$ of the system being at the state 1 converges in probabilty to $Q/(P+Q)$ if $a<1$, while the distribution of $\bar{X}_n$ weakly converges to the beta distribution $Be(Q, P)$ if $a=1$ and to a two point distribution if $a>1$.