統計数理研究所彙報
第31巻 第2号（1983）

比例代表制の確率論的分析

統計数理研究所　赤　池　弘　次

（1983年10月　受付）

1. はじめに

先頃の参議員全国区選挙ではじめて比例代表制が登場した．投票結果にもとづく各党への議席配分はいわゆるドント式によっている．

西平氏の著書（1981）に従ってドント式の定義を見ることにしよう．X, Y, Z の3党がそれぞれ7000, 3000, 2500票の得票があり，総議席数が5であるとする．X 党に1, 2, 3, 4の議席を与える場合を考えると，それぞれの場合の1議席当り得票数は

7000⁽¹⁾, 3500⁽²⁾, 2333⁽⁵⁾, 1750

となる．数字の右上の括弧内の数値の意味についてはすぐ後で述べる．Y 党については

3000⁽³⁾, 1500, 1000, 750

となり，Z 党については

2500⁽⁴⁾, 1250, 833, 625

となる．これらの数字の中から大きい順に5箇をえらべば，上記数字の右肩に示すようになる．この右肩にしるしのある数字の箇数が各党の獲得議席数である．

当然のことながら，もし X 党の名簿に2名しか登載されていなかったときには，2333, 1750等の数字は無いものとされる．

西平氏はこのドント式を競り売りになぞらえて分り易く説明されている．

2. クジ引きとドント式

比例代表制の本旨は「得票の分布の特徴を最も良く反映する議席の分布」の実現を目指すものと言えないであろうか．これをドント式について検討してみよう．まず各党の得票率を P_X, P_Y, P_Z で表わすことにする．各党の得票数をそれぞれ N_X, N_Y, N_Z で表わし，総得票数を $N=N_X+N_Y+N_Z$ とすれば $P_X=N_X/N$, $P_Y=N_Y/N$, $P_Z=N_Z/N$ である．各党に配分する議席数を n_X, n_Y, n_Z とすると総議席数は $n=n_X+n_Y+n_Z$ である．

ひとつの議席を定めるのに $\{P_X, P_Y, P_Z\}$ という確率分布に従うクジ引きを用いることを考えよう．n 回クジ引きを行なって，各党に n_X, n_Y, n_Z 議席が行く確率は

$$\frac{n!}{n_X!\ n_Y!\ n_Z!}P_X^{n_X}\ P_Y^{n_Y}\ P_Z^{n_Z}$$

という多項分布で与えられる．ここで最大の確率を持つような n_X, n_Y, n_Z を各党への配分議席数とするとしたらどうであろうか．

今 $\{n_X-1,\ n_Y+1,\ n_Z\}$ から $\{n_X,\ n_Y,\ n_Z\}$ に変えたときに上記の確率が増大するのは

(A) $$\frac{1}{n_Y+1}P_Y<\frac{1}{n_X}P_X$$

という関係が成立するときである．したがって前記確率を最大にする $\{n_X,\ n_Y,\ n_Z\}$ については，X，Y，Z を互に入れかえてみても常に(A)が成立することが必要である．もちろん $n_X+n_Y+n_Z=n$（一定）であり，n_X, n_Y 等がそれぞれの上限（名簿登載人数）に達する場合は，それ以上の増加は考えない．

さてドント式では，N_X/n_X, N_Y/n_Y, N_Z/n_Z について丁度

$$\frac{N_Y}{n_Y+1}<\frac{N_X}{n_X}$$

という関係がすべての X, Y 等の組合せについて成立する．$N_X=P_XN$, $N_Y=P_YN$, $N_Z=P_ZN$ であるから，これと(A)とは同等である．かくしてドント式とは n 回のクジ引き結果にもとづく確率が最大となるような議席の配分法であることがわかる．

ドント式が確率最大化の方法として説明できるとしても，それがほんとうに合理的なものであるか否かには更に別の議論が必要である．ただ確率最大なサンプルをもってもとの分布の表現としようとするこの方式が，ある程度合理的なものとして受け入れられてきているという事実は，確率とそれを受止める人間（社会）心理との関係を示すひとつの例として興味深い．ドント氏自身どのような考えでこの方式を導入提案したのか，それを知りたいものである．

3.　議席配分を確率分布と見れば

さて，ドント式は基礎にある得票分布 $\{P_X, P_Y, P_Z\}$ から丁度総議席数 n に等しい回数だけサンプルを取る場合を考え，これからもっともらしいサンプルの姿として確率最大なものを採用することに相当するものであった．こうして得られる議席数の分布 $\{n_X, n_Y, n_Z\}$ は，n が小さいときには，もとの分布 $\{P_X, P_Y, P_Z\}$ の表現としては不安である．それはわずか n 回の観測の結果という限られた情報にもとづいて考えをすすめているからである．

そこで次の方法を考える．まず観測数を n と無関係に m として，m 回のクジ引きの結果各党への割当分が m_X, m_Y, m_Z になったとする．ここで m を無限に大きくする．m_X, m_Y, m_Z に制限を設けなければ当然

$$\frac{m_X}{m}\longrightarrow P_X,\ \frac{m_Y}{m}\longrightarrow P_Y,\ \frac{m_Z}{m}\longrightarrow P_Z$$

となる．しかし今考えるのは一定の議席数 n の配分であるから，

$$\frac{m_X}{m}\longrightarrow q_X,\ \frac{m_Y}{m}\longrightarrow q_Y,\ \frac{m_Z}{m}\longrightarrow q_Z$$

で，nq_X, nq_Y, nq_Z がそれぞれ $0, 1, \cdots, n$ の範囲の整数値をとるものだけを考えることにする．要するに，m 回という非常に多くの実験（クジ引き）を行ない，その中から n 議席の配分のパターンを与えるものだけに注目しようというのである．

このとき最大の確率を持つパターンは，もとの分布 $\{P_X, P_Y, P_Z\}$ に関するエントロピー

$$-\sum_{I\in\{X,\ Y,\ Z\}} q_I \log\left(\frac{q_I}{P_I}\right)$$

が最大になるような $\{q_X, q_Y, q_Z\}$ で与えられる（証明はたとえば赤池（1982）参照）．ということは，q_I, P_I がそれぞれ n_I, N_I に比例するから，

$$-\sum_{I\in\{X,\ Y,\ Z\}} n_I \log\left(\frac{n_I}{N_I}\right)$$

が最大になるように議席数 n_X, n_Y, n_Z を決定すべきだということになる．ただし $n_I=0$ のとき $n_I \log n_I=0$ とする．

この場合

$$\log N_Y + n_Y \log n_Y - (n_Y+1)\log(n_Y+1)$$
$$< \log N_X + (n_X-1)\log(n_X-1) - n_X \log n_X$$

ならば $\{n_X-1,\ n_Y+1,\ n_Z\}$ より $\{n_X,\ n_Y,\ n_Z\}$ の方が前記のエントロピーが大きくなるから，このようなチェックを繰返せば容易に最大のエントロピーを持つ $\{n_X,\ n_Y,\ n_Z\}$ が求まる．もちろんここで n_X-1, n_Y+1 等は 0 と各名簿登載人数の間に収まっていなくてはならない．

さてこれを先頃の参院選データにあてはめてみるとどうなるであろうか．18 の政党について $N_1=16441437$, $N_2=7590331$, $N_3=7314465$, $N_4=4163877$, $N_5=3888429$, $N_6=1999244$, $N_7=1577630$, $N_8=1239169$, $N_9=1142349$, $N_{10}=509104$, $N_{11}=155448$, $N_{12}=205630$, $N_{13}=102925$, $N_{14}=79033$, $N_{15}=40518$, $N_{16}=36703$, $N_{17}=34715$, $N_{18}=15921$ という得票数が得られている．総議席 $n=50$ として上記のエントロピー最大化を試みると，配分議席数は $n_1=18$ (19), $n_2=8$ (9), $n_3=8$ (8), $n_4=5$ (5), $n_5=4$ (4), $n_6=2$ (2), $n_7=2$ (1), $n_8=1$ (1), $n_9=1$ (1), $n_{10}=1$ (0) となる．括弧内はドント式による実議席数である．各添字は 1＝自民，2＝社会，3＝公明，4＝共産，5＝民社，6＝サラリー，7＝福祉，8＝自ク連，9＝二院ク，10＝無党派，の各党(略称による）を表わす．これ以外の党についてはいずれの方法によっても議席の割当ては無い．結局自民，社会の両党が各 1 議席の減，福祉，無党派の各党が各 1 議席の増となる．最大エントロピー法に比べれば，ドント式は得票数の多い（大）政党により有利な議席配分方式となっていることがわかる．

4. おわりに

今回の参院選について見れば，わずか 50 回のクジ引き結果にもとづく議論で議席が定められたことになる．4 千 6 百万人の投票結果を，50 回のクジ引きの結果に基礎を置く論理で処理して良いものであろうか．50 の総議席に対し 1 議席が占める割合は 2% である．無党派市民連合の得票率は 1.03% であり，したがって 0% よりも 2% により近い．これを無視するドント式よりも，一議席を与える最大エントロピー法の方がより合理的であると見られよう．福祉党についても全く同様で，その得票率 3.39% は 1 議席に相当する 2% よりは 2 議席相当の 4% により近い．自民，社会の各党についても，その得票率 35.33%, 16.31% を各 2% で割ってみれば，丁度最大エントロピー法の与える 18，8 議席相当であることがわかる．

かくして配分議席数の分布が実得票数の分布を良く表現すべきであるとの立場に立てば，本来分布の近さを測る尺度であるエントロピーによって議論をすすめる方が遙かに自然であり，説得力を持つように見える．しかしこの問題を議論することは数理の枠を超えるものであり，本稿の目的ではない．

謝　辞

本稿は西平重喜氏の統計数理研究所講究会における講演（昭和 52 年度）に端を発するものである．北川源四郎氏も筆者と同じような視点から数値的検討を行なっており，本稿を草するに際し同氏から多くの示唆を得た．両氏に感謝する．

参考文献

赤池弘次（1982)．統計とエントロピー，数学セミナー，**253**，2-12.
西平重喜（1981)．比例代表制　国際比較にもとづく提案，中央公論新書，**615**.

A Probabilistic Analysis of the Electoral System of Proportional Representation

Hirotugu Akaike
(The Institute of Statistical Mathematics)

The electoral system of proportional representation is viewed as a procedure of realizing a reasonable approximation to the distribution of actual votes. It is shown that the well-known d'Hondt rule produces the distribution of representatives with the maximum probability when the random sample of the size of the representatives is drawn, with replacement, from the multinomial distribution specified by the distribution of the votes. This observation shows that the rule is rather unsatisfactory as it is based on the result of a conceptual sampling with the sample size much smaller compared with the total number of actual votes.

In contrast with the d'Hont rule we may consider the sample with indefinitely large size from the distribution of the votes and consider the use of the distribution of the sample with maximum probability to specify the distribution of the representatives. Such a distribution may be obtained by maximizing the Boltzmann entropy, or the minus Kullback-Leibler information, of the distribution of representatives with respect to the distribution of the actual votes

The result of application of these two procedures to the data of the recent Japanese parliamentary election demonstrates the bias of the d'Hont rule in favor of major parties. The maximum entropy procedure produces result which is much more natural to be called the proportional representation.