統計数理研究所彙報
第30巻 第2号 (1983)

非結合的代数によるランダムな衝突モデルの表現

統計数理研究所 伊 藤 栄 明

(1982年10月 受付)

確率論においては壺のモデルと言われているものが多くある．ここで議論するランダムな衝突モデルは壺のモデルの特別な場合であると考えられるが，統計力学，集団生物学等における問題にこのモデルを適用しうる．本稿においては，非結合的代数をもちいてこれらのモデルを微分方程式系により近似する．集団遺伝学における非結合的代数についての研究は以前からあり，Wörz-Busekros [15] によりくわしく述べられている．例えば S. Bernstein がはやい時期にこの問題に注目し，現在 Bernstein algebras と言われるものについて議論をしていたようである．McKean [10] は Boltzmann 方程式についての Kac のモデル [8] について平衡状態へ移行する速さを評価する際に非結合的代数の考えをもちいた．筆者は生存競争のモデルについてランダムな衝突モデルを提案し，非結合的代数の性質をもちいることにより系の安定性等を議論した (Itoh [4], [5], [6]; 伊藤・上田 [7])．ここではボルツマンのモデル，生存競争のモデル，メンデルの法則，染色体の倍数性，原始社会の婚姻制等の例について非結合的代数をもちいて定式化する．このことにより様々な現象相互の比較が容易になることを示したい．

本稿においては次のような非結合的代数を考える．

定義．非結合的代数 A^m は

I. $A^m=\left\{\sum_{i=1}^m x_iE_i \mid x_i\in R,\ i=1,2,\cdots,m\right\}$ は体 R 上の線型空間であり，一次独立な元 E_i, $i=1, 2, \cdots, m$ により生成される．

II. 基底の間の積は $E_i\circ E_j=\sum_{k=1}^m a_{ijk}E_k$ により定義される．ここで a_{ijk} は i, j, k により定まる実数である．

III. A^m に属する元 $x=\sum_{i=1}^m x_iE_i$ と $y=\sum_{j=1}^m y_jE_j$ の積は $\sum_{i=1}^m x_iE_i\circ\sum_{j=1}^m y_jE_j=\sum_{i,j=1}^m x_iy_jE_i\circ E_j$ である．

A^m の2つの元の積は一般に非結合的である．以下においては，可換律が成りたつという制約をおきモデルの表現を考える．

1. Boltzmann のモデル

Boltzmann [1] は気体分子の運動エネルギーの分布の時間変化を記述するモデルを考え，H 定理を導びいた．Boltzmann はエネルギーを離散的であると仮定したモデルについても述べている．まず彼の論文「気体分子間の熱平衡についてのさらに進んだ研究」(Boltzmann [1]) より必要な部分をぬき出す．(「 」でかこまれた部分)

「空間 R に非常に多くの気体分子がある．その各々はしかし次のような運動エネルギーしかもつことはできないとする．ε, 2ε, 3ε, 4ε, $\cdots$, $p\varepsilon$ どの分子もその中間のあるいはより大

きな運動エネルギーをもつことはできない．2つの分子が衝突すると，それらの運動エネルギーはきわめて多様な変化をする．しかし衝突後には各分子の運動エネルギーはつねに ε の整数倍の値でなければならない.」

「さてわれわれは時刻 t に運動エネルギー ε をもつ分子が w_1 個，運動エネルギー 2ε をもつものが w_2 個，…，$p\varepsilon$ をもつものが w_p 個，単位体積中にあると仮定する．また時刻 t ですでに運動エネルギーの分布は一様であり（したがって w で表わした量が単位体積を空間のどこでとるかに無関係である），さらに速度の方向については空間のあらゆる方向が一様に確からしいということを仮定する.」

「衝突前に第1の衝突する分子の運動エネルギーが $k\varepsilon$ で，第2のそれが $l\varepsilon$ であり，衝突後には第1のが $\kappa\varepsilon$，第2のが $\lambda\varepsilon$ であるような衝突を考え，非常に短い時間 τ のあいだに単位体積中でそのような衝突のおこる数を $N_{\kappa\lambda}{}^{kl}$ で表わすことにしよう．これら4つの量 k, l, κ, λ は正の整数 $\leq p$ である．なぜなら量 k, l, κ, λ がそれ以外の値をもつような衝突は，起らないとしているからである．さらに，衝突前の2つの分子の運動エネルギーの和は，衝突後の2つの分子の運動エネルギーの和に等しいはずであるから，これらの量のあいだには等式 $k+l=\kappa+\lambda$ が成り立つ.」

「数 $N_{\kappa\lambda}{}^{kl}$ は前のように第1に時間 τ に比例し，第2に単位体積中で運動エネルギーが $k\varepsilon$ であるような分子の数，したがって w_k に比例し，第3に数 w_l に比例すると仮定する．これら3つの量の積になお比例係数をかけなければならないが，それは衝突の性質をきめる量 k, l, κ, λ には依存するが，時間にはよることができない．それを $A_{\kappa\lambda}{}^{kl}$ で表わそう．これらすべてをまとめて

$$N_{\kappa\lambda}{}^{kl}=\tau\cdot w_k w_l\cdot A_{\kappa\lambda}{}^{kl} \tag{1.1}$$

がえられる.」

Boltzmann は，

$$\sqrt{kl}\ A_{\kappa\lambda}{}^{kl}=\sqrt{\kappa\lambda}\ A_{kl}{}^{\kappa\lambda} \tag{1.2}$$

なる仮定を物理的な考察からみちびいた．

$\sqrt{kl}\ A_{\kappa\lambda}{}^{kl}=B_{\kappa\lambda}{}^{kl}$ とおくと，

$$B_{\kappa\lambda}{}^{kl}=B_{kl}{}^{\kappa\lambda} \tag{1.3}$$

となる．

「時間 τ の間に量 w_1 がどんな変化をするかを問題にする．w_1 は単位体積中にある運動エネルギー ε をもつ分子の数である．これは衝突によってのみ変化することをわれわれは知っている．衝突前に2つの分子のうちの1つが運動エネルギー ε をもち，衝突後にはどちらも運動エネルギー ε をもたないという具合に2つの分子が衝突すると，そのたびにこの数は1だけ減少する．逆に，衝突前にはどちらも運動エネルギー ε をもたないが，後では1つがそれをもつように2つの分子が衝突するたびに，それは1だけ増大する．したがって，w_1 から前者の数を引き，後者の数を加えれば，時刻 $t+\tau$ に運動エネルギー ε をもつ単位体積中の分子の数がえられる．その数を w_1' で表わそう」

「このようにして

$$w_1'=w_1-N_{22}{}^{13}-N_{23}{}^{14}-N_{32}{}^{14}-N_{32}{}^{15}-\cdots+N_{13}{}^{22}+N_{14}{}^{23}+N_{14}{}^{32}+N_{15}{}^{24}+\cdots \tag{1.4}$$

がえられる.」

同様にして $w_2', w_3', \cdots, w_p'$ を求めることができる．τ が十分小であれば

(1.5) $$\tau \frac{dw_k}{dt} = w_k' - w_k$$

である．$p=3$ なる場合について考える．(1.1) 式を (1.4) 式に代入し，$w_k = \sqrt{k}\, v_k$ なるおきかえをすると，

(1.6) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} v_1 = B_{22}^{13} \left(v_2^2 - v_1 v_3\right) \\ \sqrt{2}\, \dfrac{d}{dt} v_2 = 2 B_{22}^{13} \left(v_1 v_3 - v_2^2\right) \\ \sqrt{3}\, \dfrac{d}{dt} v_3 = B_{22}^{13} \left(v_2^2 - v_1 v_3\right) \end{cases}$$

となる．

非結合的代数をもちいて導びいた式が同様になることを次に示す．

(1.7) $$A_{\kappa\lambda}^{kl} = A_{\lambda\kappa}^{kl} = A_{\kappa\lambda}^{lk} = A_{\lambda\kappa}^{kl}$$

なる仮定をおく．物理的な意味から考えて，この仮定は自然である．さらに (1.2) 式を考慮し，基底の間の積を次のように定義する．

(1.8) $$E_k \circ E_l = C_{k+l} \sum_{\substack{1 \leq \kappa \leq p \\ 1 \leq k+l-\kappa \leq p}} \sqrt{\kappa(k+l-\kappa)}\, E_\kappa$$

但し $C_{k+l} \sum\limits_{\substack{1 \leq \kappa \leq p \\ 1 \leq k+l-\kappa \leq p}} \sqrt{\kappa(k+l-\kappa)} = 1.$

時刻 t におけるエネルギー k を持つ粒子の割合を $P_k(t)$ とする．上記の Boltzmann のモデルより

$P(t) = \sum\limits_{k=1}^{p} P_k(t)\, E_k$ とおけば

(1.9) $$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \circ P(t) - P(t)$$

なる方程式が導びかれる．

衝突後のエネルギーは $p\varepsilon$ 以下の値をとるという仮定をしなければ

(1.10) $$E_k \circ E_l = C_{k+l} \sum_{\kappa=1}^{k+l-1} \sqrt{\kappa(k+l-\kappa)}\, E_\kappa,$$

但し $C_{k+l} \sum\limits_{\kappa=1}^{k+l} \sqrt{\kappa(k+l-\kappa)} = 1$，なる非結合的代数の上で (1.9) を考えればよいがこの場合は変数が無限個の常微分方程式系を考えることになる．

エネルギーは $p\varepsilon$ 以下の値をとると仮定し $p=3$ の場合について考察する．基底の間の積は，(1.8) 式より

$$
(1.11)\quad \begin{cases}
E_1\circ E_1=E_1,\quad E_1\circ E_2=\dfrac{1}{2}(E_1+E_2),\\[2mm]
E_1\circ E_3=\dfrac{1}{2+2\sqrt{3}}(\sqrt{3}\,E_1+2E_2+\sqrt{3}\,E_3)\\[2mm]
E_2\circ E_2=\dfrac{1}{2+2\sqrt{3}}(\sqrt{3}\,E_1+2E_2+\sqrt{3}\,E_3)\\[2mm]
E_2\circ E_3=\dfrac{1}{2}(E_2+E_3)\\[2mm]
E_3\circ E_3=E_3
\end{cases}
$$

となる．これを (1.9) 式に入れれば

$$
(1.12)\quad \begin{cases}
\dfrac{d}{dt}P_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}P_2{}^2-\dfrac{2}{2+2\sqrt{3}}P_1P_3\\[2mm]
\dfrac{d}{dt}P_2=\dfrac{4}{2+2\sqrt{3}}P_1P_3-\dfrac{2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}P_2{}^2\\[2mm]
\dfrac{d}{dt}P_3=\dfrac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}P_2{}^2-\dfrac{2}{2+2\sqrt{3}}P_1P_3
\end{cases}
$$

となることがわかる．

$P_k=\sqrt{k}\,v_k$ とおくと

$$
(1.13)\quad \begin{cases}
\dfrac{d}{dt}v_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}(v_2{}^2-v_1v_3)\\[2mm]
\sqrt{2}\,\dfrac{d}{dt}v_2=\dfrac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}(v_1v_3-v_2{}^2)\\[2mm]
\sqrt{3}\,\dfrac{d}{dt}v_3=\dfrac{2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}(v_2{}^2-v_1v_3)
\end{cases}
$$

となる．この式は (1.6) 式と同じものであり，非結合的代数をもちいることにより自然にみちびかれることがわかる．

一般の p の場合にも同様にみちびくことができ $\mathrm{E}=\sum\sqrt{k}\,v_k\log v_k$ が減少して行き，最終的に $v_k=\gamma^{k-1}v_1$, $k=1, 2, \cdots, p$ となることがわかる．これは H 定理と言われているものであり，上記の Boltzmann の論文に述べられている．たとえば，$p=3$ の場合

$$
\frac{d}{dt}\mathrm{E}=\frac{2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}(v_2{}^2-v_1v_3)\log\frac{v_1v_3}{v_2{}^2}\geq 0
$$

であり等号は $\dfrac{v_3}{v_2}=\dfrac{v_2}{v_1}$ のときなりたつことがわかる．

2. 生存競争のモデル

n 個の種からなる系を考える．それぞれの種は相互のであいがなければ単位時間に ε_1, ε_2, $\cdots$, ε_n の割合で個体数が増加するものとする．時刻 t において種 r と種 s のであう回数は

$m_{rs}N_rN_s\,dt$ とし，そのうちのある割合 P_{rs} が種 s にたべられるものとする．したがって $P_{rs}m_{rs}N_rN_s\,dt$ だけ種 r は減少する．今，種 r, s の重さを β_r, β_s とし，種 s は種 r をたべることにより $\dfrac{\beta_r P_{rs} m_{rs}}{\beta_s} N_rN_s\,dt$ だけ増加するものとする．したがって $a_{rs}=m_{rs}P_{rs}\beta_r$, $a_{sr}=-a_{rs}$ とおくと，種 r と種 s のであいにより，種 r は $\dfrac{1}{\beta_r}a_{sr}N_rN_s\,dt$ 増加し，種 s は $\dfrac{1}{\beta_s}a_{rs}N_rN_s\,dt$ だけ増加する．ここでは同時に3種以上がであうことはないと仮定している．以上より Volterra [13] は

$$dN_r=\varepsilon_rN_r\,dt+\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{sr}}{\beta_r}N_rN_s\,dt \tag{2.1}$$

を得た．

非結合的代数をもちいて，生存競争のモデルを議論しよう．(Itoh [4], [5], [6]；伊藤・上田 [7]) 次のようなランダムな衝突モデルを考える．各粒子は値 1, 2, $\cdots$, n をとるものとする．値 i の1粒子と値 j の1粒子の衝突により確率 $\dfrac{1}{2}+a_{ij}$ で2粒子とも i になり，確率 $\dfrac{1}{2}+a_{ji}$ で2粒子とも j になるものとする．この規則は

$$E_i\circ E_j=\left(\frac{1}{2}+a_{ij}\right)E_i+\left(\frac{1}{2}+a_{ji}\right)E_j \tag{2.2}$$

$$a_{ij}+a_{ji}=0,\quad |a_{ij}|\le\frac{1}{2}$$

により基底の間の積を定義することにより表現される．時刻 t における値 i を持つ粒子の割合を $P_i(t)$ とし，$P(t)=\sum_{i=1}^{n}P_i(t)E_i$ とおけば，

$$\frac{d}{dt}P(t)=P(t)\circ P(t)-P(t) \tag{2.3}$$

が得られる．これは通常の表現によれば

$$\frac{d}{dt}P_i(t)=P_i(t)\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}P_j(t)\right),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{2.4}$$

となる．これは Volterra の方程式において $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_n=0$ とした場合である．非結合的代数をもちいることにより，3種のであいを考慮した場合に自然に議論を拡張することができる．例えば，3種のであいを考慮に入れた

$$\frac{d}{dt}P(t)=k_1\left(P(t)\circ P(t)-P(t)\right)+k_2\left((P(t)\circ P(t))\circ P(t)-P(t)\right) \tag{2.5}$$

を考えれば，次のようなことが言える．

$q\circ q-q=0$, $\sum_{i=1}^{n}q_i=1$, $q_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$ なる q が一意的に存在するとすれば

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} q_i \log P_i(t) = 2k_2 \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_j(t)\right)^2 \geq 0 \tag{2.6}$$

が成りたつことを，この非結合的代数の性質をもちいることにより証明することができる．(Itoh [6])

3. メンデルの法則

Mendel は親のそれぞれの形質について純系であることを確かめてから，単一の形質に関して異った親どうしの間に一連の交配を行った．劣性遺伝子が雑種世代の間に変化したり失われたりせず，また優性，劣性の両遺伝子 R, r が独立に伝達され，したがって性細胞をつくるときには，それぞれ独立に分離することができることを示している．(Watson [14] 参照.)

以上において接合体 RR を E_1, rr を E_2, Rr を E_3 と書くことにすれば，メンデルの法則は基底の間の積

$$E_1 \circ E_1 = E_1 \tag{3.1}$$

$$E_2 \circ E_2 = E_2 \tag{3.2}$$

$$E_1 \circ E_2 = E_2 \circ E_1 = E_3 \tag{3.3}$$

$$E_3 \circ E_3 = \frac{1}{4} E_1 + \frac{1}{4} E_2 + \frac{1}{2} E_3 \tag{3.4}$$

によりあらわすことができる．たとえば，(3.4) 式は雑種どうしの交配により，優性のものと劣性のものとの比率が 3：1 になるということに対応している．また (3.2) 式は劣性の形質をもったものはすべて純系であることを表わす.

以上，接合体 (zygote) について議論した．次に配偶子 (gamete) についての代数を考える．2個の配偶子が受精により融合し，1個の接合体を形成し，さらに配偶子を次の世代に送る．これは基底の間の積

$$\begin{gathered} E_1 \circ E_1 = E_1, \quad E_2 \circ E_2 = E_2 \\ E_1 \circ E_2 = \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} E_2 \end{gathered} \tag{3.5}$$

に対応する．すなわち RR なる接合体からは常に R なる配偶子が得られる．Rr なる接合体からは確率 $\frac{1}{2}$ で E_1 なる配偶子が，また確率 $\frac{1}{2}$ で E_2 なる配偶子が得られる.

突然変異を考えた場合，

$$\left\{\begin{aligned} E_1 \circ E_1 &= (1-\mu_1) E_1 + \mu_1 E_2 \\ E_2 \circ E_2 &= \mu_2 E_1 + (1-\mu_2) E_2 \\ E_1 \circ E_2 = E_2 \circ E_1 &= \frac{1}{2}\left\{(1-\mu_1) E_1 + \mu_1 E_2\right\} + \frac{1}{2}\left\{\mu_2 E_1 + (1-\mu_2) E_2\right\} \\ &= \frac{1}{2}(1-\mu_1+\mu_2) E_1 + \frac{1}{2}(1+\mu_1-\mu_2) E_2 \end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

となる．ここで μ_1 は R から r への突然変異率，μ_2 は r から R への突然変異率である．同様

なことを接合体について考えることもできる．(Gonshor [3])

4. 染色体の倍数性

「2組より多くの染色体をもつ細胞は倍数体 (polyploid) として知られている．二倍体 (diploid) と一倍体 (haploid) という語は，それぞれ染色体二組と一組の細胞を意味し，(中略) 倍数性の程度に応じ，三倍体 (triploid)，四倍体 (tetraploid) などの語が用いられている．

倍数体細胞は，染色体の重複の過程が細胞分裂の過程とずれたときにできる．例えば，もし染色体が1回余分に重複を行うと四倍体細胞となり，2回余分に重複を行うと八倍体となる．倍数体は，いろいろな処理によって多くの植物でほとんど望みどおりにつくることができる．」(Crow [2] より)

$2m$ 倍体について考える．配偶子における m 個の相同染色体は細胞における $2m$ 個から非復元無作為抽出されたものである．したがって $A^s a^{m-s}$ なる配偶子が $A^r a^{2m-r}$ なる接合体から得られる確率を計算することができる．すなわち $2m$ から m をえらびだす組合せの数は ${}_{2m}\mathrm{C}_m$ であり，そのうちの ${}_r\mathrm{C}_s\,{}_{2m-r}\mathrm{C}_{m-s}$ 個が $A^s a^{m-s}$ なるものである．したがって求める確率は ${}_r\mathrm{C}_s\,{}_{2m-r}\mathrm{C}_{m-s}/{}_{2m}\mathrm{C}_m$ である．

たとえば A^3a なる4倍体からは A^2 あるいは Aa が同じ比率で得られる．A^2a^2 から A^2, Aa, a^2 が得られる比率はそれぞれ $1:4:1$ となる．$A^k a^{m-k}$, $A^l a^{m-l}$ なる配偶子の接合により $A^i a^{m-i}$ なる配偶子が得られる確率は

$$ {}_{k+l}\mathrm{C}_i\ {}_{2m-k-l}\mathrm{C}_{m-i}/{}_{2m}\mathrm{C}_m $$

となり，$A^k a^{m-k}$ を基底 E_k に対応させれば，基底の間の積は

$$ E_k \circ E_l = ({}_{2m}\mathrm{C}_m)^{-1} \sum_{i=1}^{m} {}_{k+l}\mathrm{C}_i\ {}_{2m-k-l}\mathrm{C}_{m-i} E_i $$

のように定義される．同様に接合体についての代数を考えることができる．(Moran [11], Gonshor [3])

5. その他の例

その他の例として古代社会における婚姻規則について議論する．この問題については，Morgan [12] あるいは Lévi–Strauss [9] にくわしく述べられている．婚姻規則は系図等のように図によりあらわされることが多い．Lévi–Strauss の著書に André Weil による補遺があり，置換群をもちいて婚姻規則が記述されている．ここでは非結合的代数をもちいて表現し，その応用について述べる．先ず Morgan [12] 第二篇第一章から要点を抜粋する．

「性に基く階級組織および血縁に基づく原初的の氏族組織は，今なお，カミラロイ語を話すオーストラリア原住民の一部分に一般に行われている．彼らはシドニイの北方のダーリング河地方に住んでいる．この二つの組織は他のオーストラリア部族の中にも見出され，古代において彼らの間に普遍的に行われたものと思わしめるほど広範囲にわたっている．」

「その階級は次のごとくである．

男子	女子
1. イッパイ	1. イッパタ
2. クムボ	2. ブタ
3. ムリ	3. マタ

4.　クッビ　　4.　カポタ

イッパイはすべて氏族のいかんにかかわらず互に兄弟である．理論上，彼らは仮想の共通の女性の祖先から由来している．クムボもすべて同じであり，またムリおよびクッビもそれぞれ同じ理由で同様である．また同様にイッパタはすべて氏族のいかんにかかわらず同じ理由で姉妹であり，ブタのすべても同様であり，マタおよびカポタのすべてもそれぞれ同様である．次にすべてのイッパイとイッパタは互に兄弟姉妹であり，彼らが同じ母の子であるか，あるいは傍系の血族親の子であるかを問わず，また彼らの存在する氏族のいかんにもかかわらない．クムボとブタは兄弟姉妹であり，同様にムリとマタおよびクッビとカポタはそれぞれ兄弟姉妹である．もしイッパイとイッパタが出会うと，彼らは互に全然これまで会ってはいなくとも，互に兄弟姉妹として挨拶するのである.」

「カミラロイ族は，兄弟および姉妹の四つの基本的大集団に組織されており，その各々が男子の部と女子の部から構成されているのである．しかし彼らは彼らの占拠している地域に雑居している.」

本源的な法則とは次のごとくであった．

イッパイはカポタと結婚することができるが，その他とはできない．その子はムリおよびマタである．

クムボはマタと結婚することができるがその他とはできない．その子はクッビおよびカポタである．

ムリはブタと結婚することができるが，その他とはできない．その子はイッパイおよびイッパタである．

クッビは，イッパタと結婚することができるが，その他とはできない．その子はクムボおよびブタである．

「カミラロイ族の各男子は妻の選択にあたってカミラロイ族の女子全部の4分の1に限られていることが見られる．しかしこれはこの制度の顕著な部分ではない．理論的にはあらゆるカポタはあらゆるイッパイの妻であり，あらゆるマタはあらゆるクムボの妻，あらゆるブタはあらゆるムリの妻，またあらゆるイッパタはあらゆるクッビの妻である.」

以上 Morgan [12] からぬきだしたのであるが，イッパイを E_1，イッパタを E_2，クムボを E_3，ブタを E_4，ムリを E_5，マタを E_6，クッビを E_7，カポタを E_8，に対応させれば，カミラロイ族の婚姻規則は次のような基底の間の積により表わすことができる．

$$(5.1)\qquad \begin{cases} E_1\circ E_8=\dfrac{1}{2}E_5+\dfrac{1}{2}E_6 \\ E_3\circ E_6=\dfrac{1}{2}E_7+\dfrac{1}{2}E_8 \\ E_5\circ E_4=\dfrac{1}{2}E_1+\dfrac{1}{2}E_2 \\ E_7\circ E_2=\dfrac{1}{2}E_3+\dfrac{1}{2}E_4 \end{cases}$$

これより

$$(5.2)\qquad E_{1+2i}\circ E_{8-2i}=\frac{1}{2}E_{5+2i}+\frac{1}{2}E_{6+2i}$$

を得る．ただし $E_{8m+k}=E_k$ とし，可換律が成り立つものとする．

以上において奇数の添え字は男性の階級，偶数の添え字は女性の階級をあらわす．(5.2) 式から，この社会においては，男性は母親の兄弟の娘，あるいは父親の姉妹の娘，と同じ階級の女性と結婚する，ということを読みとることができる．各階級の人口の時間変化について様々なモデルを考えうる．ここではもっとも単純な例としてランダムな衝突モデルを考え，その帰結について論じる．

イッパイ，イッパタ，クムボ，…，カポタをそれぞれ階級 1, 2, 3, …, 8 とする．

階級 i に属する1粒子と階級 j に属する1粒子が出会ったとする．もし i と j が結婚可能な階級，たとえばイッパイとカポタすなわち1と8であれば，それら2粒子は5あるいは6に属する粒子に変化する．それが5あるいは6である確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である．すなわち2粒子とも階級5という確率は $\frac{1}{4}$，6という確率は $\frac{1}{4}$，5の1粒子と6の1粒子という確率は $\frac{1}{2}$ となる．もし i と j が結婚不可能な階級であれば，衝突による変化はおきないとする．すなわち，上記のモデルにおいては，「個体は，i) 生まれたと同時に出生力を持ち，ii) 子供を作ったと同時に出生力を失う．iii) 子供は一度に二人だけできる.」というような，単純化を行っている．ここで，階級 i において，出生力を持つ人間の数 $P_i(t)$ が従う方程式を考える．(5.1) 式に示された以外の場合の基底の間の積を

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{2} E_i + \frac{1}{2} E_j \tag{5.3}$$

により定義し，$P(t) = \sum_{i=1}^{8} P_i(t) E_i$ とすれば

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t) \circ P(t) - P(t) \tag{5.4}$$

をうる．この方程式の解の動きをしらべることにより，この系の安定性等を議論することができる．(5.4) 式より次の式が得られる．

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dt} P_1 &= P_5 P_4 - P_1 P_8 \\
\frac{d}{dt} P_2 &= P_5 P_4 - P_7 P_2 \\
\frac{d}{dt} P_3 &= P_7 P_2 - P_3 P_6 \\
\frac{d}{dt} P_4 &= P_7 P_2 - P_5 P_4 \\
\frac{d}{dt} P_5 &= P_1 P_8 - P_5 P_4 \\
\frac{d}{dt} P_6 &= P_1 P_8 - P_3 P_6
\end{aligned}\right. \tag{5.5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P_7 = P_3P_6 - P_7P_2 \\ \dfrac{d}{dt}P_8 = P_3P_6 - P_1P_8 \end{cases}$$

例えば，次のような不変量がある．

$$P_1+P_5 = C_1$$
$$P_2+P_4 = C_2$$
$$P_3+P_7 = C_3$$
$$P_6+P_8 = C_4$$

このことは一旦生じたかたよりが以後も保たれることを意味する．現実の集団の大きさは有限であり，確率モデルとしてとりあつかう必要がある．その場合，婚姻規則が安定に存続するために必要な集団の大きさはどの程度であるか等を様々なモデルにより検討することは意味のあることであると思われる．

有益な助言をいただいた査読者に感謝する．

参 考 文 献

[1] Boltzmann, L. (1872). Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekulen, *Wiener Berichte*, **63**, 275–370. (恒藤敏彦訳 (1970). 気体分子間の熱平衡についてのさらに進んだ研究，物理学古典論文叢書 6，統計力学，物理学史研究刊行会編，東海大学出版会.)

[2] Crow, J.F. (1976). *Genetics notes*, Burgess Publishing Company, Minneapolis. (木村資生，北川 修，太田明子共訳 (1972). 遺伝学概説，培風館.)

[3] Gonshor, H. (1960). Special train algebras arising in genetics, *Proc. Edin. Math. Soc.*, (2) **12**, 41–53.

[4] Itoh, Y. (1971). Boltzmann equation on some algebraic structure concerning struggle for existence, *Proc. Japan Acad.*, **47**, 854–858.

[5] Itoh, Y. (1975). An *H*-theorem for a system of competing species, *Proc. Japan Acad.*, **51**, 374–379.

[6] Itoh, Y. (1981). Non-associative algebra and Lotka-Volterra equation with ternary interaction, *Nonlinear Anal.*, **5**, 53–56.

[7] 伊藤栄明，上田澄江 (1975). 生存競争のモデルとシミュレーション，統計数理研究所彙報，**23**，94–104.

[8] Kac, M. (1959). *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Interscience, London.

[9] Lévi-Strauss, C. (1967). *Les Structures Elementaires de la Paréntè*, Mouton & Co and Maison des Science de l'Homme. (初版 1949 年) (馬淵，田島監訳，花崎，鍵谷，小川，喜多村，黒田，竹村，富尾，山下，矢島訳 (1978). 親族の基本構造(上)(下)，番町書房.)

[10] McKean, H.P. (1966). Speed of approach to equilibrium for Kac's caricature of a Maxwellian gas, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **21**, 343–367.

[11] Moran, P.A.P. (1962). The statistical processes of evolutionary theory, Clarendon press, Oxford.

[12] Morgan, L.H. (1877). Ancient society of researches in the lines of human progress from savagery through barbarism to civilization. (青山道夫訳 (1958). 古代社会，岩波文庫，東京.)

[13] Volterra, V. (1931). *Leçons sur la theorie mathématique de la lutte pour la vie*, Cahiers Scientifiques VII, Gauthiers-Villars, Paris.

[14] Watson, J.D. (1976). *Molecular Biology of the Gene*, W.A. Benjamin, Inc., Menlo Park, California. (三浦謹一郎他訳，遺伝子の分子生物学，化学同人，京都.)

[15] Wörz-Busekros, A. (1980). *Algebras in Genetics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Representation of Random Collision Model by Nonassociative Algebras

Yoshiaki Itoh
(The Institute of Statistical Mathematics)

The concept of nonassociative algebra can be applied to the studies on interacting populations in various fields of sciences. Nonassociative algebra in population genetics is well known and has been studied by many authors. Here nonassociative algebras for Boltzmann's model, for model of struggle for existence and for rules of marriage in ancient society are introduced and respectively given by equation (1.8) in Section 1, equation (2.2) in Section 2, and equations (5.1) and (5.3) in Section 5. This will help us to compare various models with each other and to develop the theory of nonassociative algebras.