統計数理研究所彙報
第30巻 第1号 (1982)

Lorenz 曲線に関連した特性値と裾の重さをあらわす測度の推定
――対数正規分布の場合――

東京理科大学 清 水 邦 夫

(1981年10月 受付)

1. 序

対数正規分布のもつ諸性質および母数の推定問題は，文献 [1], [6] によくまとめられている．しかしながら，母数の推定問題に限れば，それ以後いくつかの発展が見られ，文献 [9], [10] では，超幾何関数を用いていくつかの母数の一様最小分散不偏推定量とその分散が簡潔に表現された（母数の一様最小分散不偏推定量に関する歴史的発展の概略は，[10] にある）．

本稿では，対数正規分布を仮定した上で，[12] で扱われた分布の裾の重さをあらわす測度と Lorenz 曲線に関連した特性値のいくつかの一様最小分散不偏推定量とその分散が，[9], [10] と同様な手法により求められる．各母数の最尤推定および標本モーメントによる推定も行われ，推定量の比較が相対効率の概念を導入することによりなされる．

第2節では，考えようとする母数とその式が列挙される．Lorenz 曲線上の接線が均等線と平行になる点の横座標，Gini 集中係数，Theil 係数等が取扱われる．

第3節では，まず，母数の一様最小分散不偏推定と最尤推定を行うさいに重要な役割を演ずる諸公式が，補題としてまとめられる．その上で，母数の一様最小分散不偏推定量とその分散，母数の最尤推定量とその数学的期待値および平均二乗誤差，さらに，母数の標本モーメントによる一つの推定量とその漸近平均二乗誤差が与えられる．

第4節では，一様最小分散不偏推定量，最尤推定量，標本モーメントによる推定量の比較が，平均二乗誤差の比として定義される相対効率をもって行われる．

2. 母数とその式

本稿では，母集団分布が母数 (μ, σ^2) をもつ2母数対数正規分布（以後 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ と書く）であると仮定する．言い換えると，X を $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数とすると，$\ln X$ が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っている．

ここで本稿で扱う母数をまとめておくことにする．

P–1. Lorenz 曲線上の接線が均等線と平行になる点の横座標：$\theta_1=\Phi(\sigma/2)$.

P–2. Gini 集中係数：$\theta_2=2\Phi(\sigma/\sqrt{2})-1$.

P–3. 対数標準偏差：$\theta_3=\sigma$.

P–4. 変動係数の二乗：$\theta_4=\exp[\sigma^2]-1$.

P–5. 尖度：$\theta_5=\omega^4+2\omega^3+3\omega^2-3,\ \omega=\exp[\sigma^2]$.

P–6. Theil 係数：$\theta_6=\mathrm{E}[(X/\mathrm{E}(X))\ln(X/\mathrm{E}(X))]=\sigma^2/2$.

P–7. Theil 係数の変化形：$\theta_7=\mathrm{E}[(X/\mathrm{Med}(X))\ln(X/\mathrm{Med}(X))]=\sigma^2\exp[\sigma^2/2]$.

P–8. Theil 係数の変化形：$\theta_8=\mathrm{E}[(X/\mathrm{Mode}(X))\ln(X/\mathrm{Mode}(X))]=2\sigma^2\exp[3\sigma^2/2]$.

P–1 から P–8 について若干の説明を加える．

$\Lambda(\mu,\ \sigma^2)$ の Lorenz 曲線は，媒介変数 λ $(0 \leqq \lambda \leqq \infty)$ を用いて

$$\begin{cases} u = \Phi((\ln\lambda - \mu)/\sigma) \\ v = \Phi((\ln\lambda - \mu - \sigma^2)/\sigma) \end{cases}$$

による座標 $(u,\ v)$ で表わされることが，[1] の定理 2.6 より分る．ここで，Φ は標準正規分布関数である．$\Lambda(\mu,\ \sigma^2)$ の場合，[1] の p. 113 にあるように，Lorenz 曲線は直線 $v=1-u$ に関して対称であるという著しい性質を持っている．よって，[1] の (11.8) より P–1 の Lorenz 曲線上の接線が均等線 $(v=u)$ と平行になる点の u 座標を得る．

P–2 の Gini 集中係数は [1] の (11.6) に与えられているが，これは分布の裾の重さをあらわす測度としても知られている．この量は，Lorenz 曲線と均等線とで囲まれる部分の面積の2倍に相当する．他に [12] により対数標準偏差，変動係数，尖度，Theil 係数が分布の裾の重さを表わす測度として知られており，これらを $\Lambda(\mu,\ \sigma^2)$ の場合に求めたのが P–3 から P–6 である．ただし，P–4 では変動係数の二乗を扱うものとする．さらに，Theil 係数において $\mathrm{E}(X)$ の代りに $\mathrm{Med}(X)$，メディアンと $\mathrm{Mode}(X)$，モードを用いることにより2つの変化形を得たのが P　, 8 である．P–6, 7, 8 の間には $\theta_6 < \theta_7 < \theta_8$ の関係がある．これは，本質的には $\Lambda(\mu,\ \sigma^2)$ の場合に良く知られた関係 $\mathrm{Mode}(X) < \mathrm{Med}(X) < \mathrm{E}(X)$ に依っている．

P–1 から P–8 にあらわれる諸量はすべて σ に関する狭義単調増加関数であり，σ のみに依存し μ には無関係である．このことは，P–1 から P–8 の諸量が類似した母数と見なせることを示している．

3.　母数の推定量とその(漸近)平均二乗誤差

3.1　補題

P–1 から P–8 の諸量は母集団 $\Lambda(\mu,\ \sigma^2)$ における母数とみなすのが本稿の立場であり，$\Lambda(\mu,\ \sigma^2)$ からの n 個のランダムサンプル $X_1,\ \cdots,\ X_n$ $(n \geqq 2)$ より母数の推定問題を考えることになる．そのために，標本平均，標本分散，対数標本平均，対数標本分散および対数不偏分散の各統計量を，それぞれ

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n, \quad S^2{}_X = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2/n,$$

$$\bar{Z} = \sum_{i=1}^{n} \ln X_i/n, \quad S^2{}_Z = \sum_{i=1}^{n} (\ln X_i - \bar{Z})^2/n, \quad V^2{}_Z = nS^2{}_Z/(n-1)$$

と記すことにする．

上の記法のもとに，母数の一様最小分散不偏推定と最尤推定を行うさいに重要な役割を演ずるつぎの補題が成立する．

補題　3.1.

$$(3.1) \qquad \mathrm{E}[V^{2p}{}_Z] = \frac{2^p \Gamma\left(\dfrac{n-1}{2} + p\right)}{(n-1)^p \Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \sigma^{2p}, \qquad \frac{n-1}{2} + p > 0.$$

補題　3.2.

$$(3.2) \qquad \mathrm{E}[e^{pZ}] = \exp\left[p\mu + \frac{1}{2n} p^2 \sigma^2\right],\ p \text{ は任意の実数.}$$

補題 3.3.

$$(3.3)\qquad \mathrm{E}\left[{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;\,\frac{(n-1)^2}{2n}AV^2{}_Z\right)\right]=\exp\left[\frac{n-1}{n}A\sigma^2\right],\ A \text{ は任意の実数}.$$

補題 3.4.

$$(3.4)\qquad \mathrm{E}\left[\left\{{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;\,\frac{(n-1)^2}{2n}AV^2{}_Z\right)\right\}^2\right]$$

$$=\exp\left[\frac{2(n-1)}{n}A\sigma^2\right]{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;\,\frac{(n-1)^2}{n^2}A^2\sigma^4\right),\ A \text{ は任意の実数}.$$

補題 3.5.

$$(3.5)\qquad \mathrm{E}\left[{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;\,\frac{(n-1)^2}{2n}AV^2{}_Z\right){}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;\,\frac{(n-1)^2}{2n}BV^2{}_Z\right)\right]$$

$$=\exp\left[\frac{n-1}{n}(A+B)\sigma^2\right]{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;\,\frac{(n-1)^2}{n^2}AB\sigma^4\right),\ A \text{ と } B \text{ は任意の実数}.$$

(3.1) は $(n-1)V^2{}_Z/\sigma^2$ が自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布に従うことから明らかである．また，(3.2) は $\bar{Z}$ が平均 μ，分散 σ^2/n の正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2/n)$ に従うことから導かれる．(3.3) と (3.4) は (3.5) の特別な場合であり，(3.5) は [9] で与えられた（超幾何関数 ${}_0F_1$ については，補遺参照）．

3.2 母数の一様最小分散不偏推定量とその分散

統計量 $(\bar{Z},\ V^2{}_Z)$ は正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ の母数 $(\mu,\ \sigma^2)$ の完備十分統計量であるから，母数 $(\mu,\ \sigma^2)$ の関数 $g(\mu,\ \sigma^2)$ の，統計量 $(\bar{Z},\ V^2{}_Z)$ による不偏推定量 $\hat{g}(\bar{Z},\ V^2{}_Z)$ は $g(\mu,\ \sigma^2)$ の一様最小分散不偏 (UMVU) 推定量である（例えば [11], p. 117）．このことに基づいて，母数の UMVU 推定量を構成できる．

以下 P–1 から P–8 の母数の UMVU 推定量とその分散を列挙する．$i=1,\ \cdots,\ 8$ に対して，母数 θ_i の UMVU 推定量を $\hat{\theta}_i$ と書き，その分散を $\mathrm{V}(\hat{\theta}_i)$ と書くことにする．

$$\text{P–1.}\quad \hat{\theta}_1=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n-1}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}V_Z\,{}_1F_2\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2},\,\frac{n}{2}\,;\,-\frac{n-1}{16}V^2{}_Z\right)+\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{V}(\hat{\theta}_1)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{8\pi\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}\sigma^2F^{1:1}_{0:2}\left[\begin{matrix}\frac{n+1}{2}: & \frac{1}{2} & ; & \frac{1}{2} & ;\\ \text{——}: & \frac{3}{2},\ \frac{n}{2} & ; & \frac{3}{2},\ \frac{n}{2} & ;\end{matrix}\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma^2}{8},\ -\frac{\sigma^2}{8}\right]+\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)\left\{1-\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right\}-\frac{1}{4}.$$

$$\text{P–2.}\quad \hat{\theta}_2=\sqrt{\frac{n-1}{2\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}V_Z\,{}_1F_2\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2},\,\frac{n}{2}\,;\,-\frac{n-1}{8}V^2{}_Z\right),$$

$$\mathrm{V}(\hat{\theta}_2)=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}\sigma^2 F^{1:1}_{0:2}\left[\begin{matrix}\frac{n+1}{2}: & \frac{1}{2} & ; & \frac{1}{2} & ;\\ \rule{1em}{0.4pt}: & \frac{3}{2},\ \frac{n}{2} & ; & \frac{3}{2},\ \frac{n}{2} & ;\end{matrix}\right.$$

$$\left. -\frac{\sigma^2}{4},\ -\frac{\sigma^2}{4}\right]-\left\{2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)-1\right\}^2.$$

P-3. $\hat{\theta}_3=\sqrt{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}V_Z,\quad \mathrm{V}(\hat{\theta}_3)=\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}-1\right\}\sigma^2$

P-4. $\hat{\theta}_4={}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;\frac{n-1}{2}V^2{}_Z\right)-1,\quad \mathrm{V}(\hat{\theta}_4)=e^{2\sigma^2}\left\{{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;\sigma^4\right)-1\right\}$

P-5. $\hat{\theta}_5={}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;2(n-1)V^2{}_Z\right)+2{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;\frac{3(n-1)}{2}V^2{}_Z\right)$

$$+3{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;(n-1)V^2{}_Z\right)-3,$$

$$\mathrm{V}(\hat{\theta}_5)=e^{8\sigma^2}\left\{{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;16\sigma^4\right)-1\right\}+4e^{6\sigma^2}\left\{{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;9\sigma^4\right)-1\right\}$$

$$+9e^{4\sigma^2}\left\{{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;4\sigma^4\right)-1\right\}+4e^{7\sigma^2}\left\{{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;12\sigma^4\right)-1\right\}$$

$$+6e^{6\sigma^2}\left\{{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;8\sigma^4\right)-1\right\}+12e^{5\sigma^2}\left\{{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;6\sigma^4\right)-1\right\}.$$

P-6. $\hat{\theta}_6=\frac{1}{2}V^2{}_Z,\quad \mathrm{V}(\hat{\theta}_6)=\frac{1}{2(n-1)}\sigma^4.$

P-7. $\hat{\theta}_7=V^2{}_Z\ {}_0F_1\left(\frac{n+1}{2}\,;\frac{n-1}{4}V^2{}_Z\right),$

$$\mathrm{V}(\hat{\theta}_7)=\sigma^4 e^{\sigma^2}\left\{\frac{n+1}{n-1}e^{-\sigma^2}\ {}_2F_2\left(\frac{n}{2},\ \frac{n+3}{2}\,;\frac{n+1}{2},\ n;\ 2\sigma^2\right)-1\right\}.$$

P-8. $\hat{\theta}_8=2V^2{}_Z\ {}_0F_1\left(\frac{n+1}{2}\,;\frac{3(n-1)}{4}V^2{}_Z\right),$

$$\mathrm{V}(\hat{\theta}_8)=4\sigma^4 e^{3\sigma^2}\left\{\frac{n+1}{n-1}e^{-3\sigma^2}\ {}_2F_2\left(\frac{n}{2},\ \frac{n+3}{2}\,;\frac{n+1}{2},\ n;\ 6\sigma^2\right)-1\right\}.$$

典型的な母数に関し，UMVU 推定量の構成とその分散の評価について説明する．P-1 については，まず

$$\int_0^z e^{-t^2}dt=z\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,;-z^2\right)$$

が知られている（例えば [8]，p. 57）ので，これより

$$\Phi(z)=\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{z^2}{2}\right)+\frac{1}{2} \tag{3.6}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\theta_1&=\frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{\sigma^2}{8}\right)+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k k!}\left(-\frac{1}{8}\right)^k\sigma^{2k+1}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

と書ける．ここで σ^{2k+1} の $V^2{}_Z$ に基づく不偏推定量は (3.1) より得られ，その推定量を代入したときの無限級数和は収束する．よって UMVU 推定量の表現を得る．分散の計算には

$$_BF_D((b);(d);x)\,_BF_D((b');(d');y)=F^{0:B}_{0:D}\left[\begin{matrix}\text{---}:(b);(b');\\ \text{---}:(d);(d');\end{matrix}x,\ y\right] \tag{3.7}$$

を用いて

$$\begin{aligned}(\hat{\theta}_1)^2=&\frac{(n-1)\,\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}{16\pi\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}V^2{}_Z\,F^{0:1}_{0:2}\left[\begin{matrix}\text{---}:\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\\ \text{---}:\frac{3}{2},\ \frac{n}{2};\frac{3}{2},\ \frac{n}{2};\end{matrix}\right.\\&\left.-\frac{n-1}{16}V^2{}_Z,\ -\frac{n-1}{16}V^2{}_Z\right]\\&+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{n-1}{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}V_Z\,{}_1F_2\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2},\ \frac{n}{2};-\frac{n-1}{16}V^2{}_Z\right)+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

を得る（Kampé de Fériet 関数 $_BF_D$ については補遺参照）が，ここで (3.1) を用いれば，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(\hat{\theta}_1)^2]=&\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{8\pi\,\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}\sigma^2F^{1:1}_{0:2}\left[\begin{matrix}\frac{n+1}{2}:\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\\ \text{---}:\frac{3}{2},\ \frac{n}{2};\frac{3}{2},\ \frac{n}{2};\end{matrix}\right.\\&\left.-\frac{\sigma^2}{8},\ -\frac{\sigma^2}{8}\right]+\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる．ここで数学的期待値 E と和 $\sum$ との交換は，交換されたあとの無限級数和が絶対収束するので許される．よって分散表現を得る．

P–2 については P–1 と同様に求めることができ，P–3 については明らかである．

P–4 については [9] で与えられた．変動係数の UMVU 推定量は

$$(e^{\sigma^2}-1)^{1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}e^{-(k-1/2)\sigma^2}$$

において (3.3) を用いて

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}{}_0F_1\left(\frac{n-1}{2}\,;\,-\frac{n-1}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)V^2z\right)$$

を得る．

P–5 については [9] で与えられた．P–6 については明らかである．

P–7 については，UMVU 推定量は

$$\theta_7=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2(k+1)}}{k!\,2^k}$$

より (3.1) を用いて得られる．分散は，(3.7) から

$$(\hat{\theta}_7)^2=V^4zF^{0:0}_{0:1}\left[\begin{matrix}\text{—}:\text{—};\text{—};\\ \text{—}:\frac{n+1}{2};\frac{n+1}{2};\end{matrix}\ \frac{n-1}{4}V^2z,\quad\frac{n-1}{4}V^2z\right]$$

となることより，(3.1) を用いて

$$\mathrm{V}(\hat{\theta}_7)=\sigma^4e^{\sigma^2}\left\{\frac{n+1}{n-1}e^{-\sigma^2}\psi_2\left(\frac{n+3}{2}\,;\,\frac{n+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\,;\,\frac{\sigma^2}{2},\ \frac{\sigma^2}{2}\right)-1\right\}$$

と求まる．ここで，ψ_2 は Appell の関数 F_2 の一つの合流型である（補遺参照）．または

$${}_0F_1(\rho\,;\,z)\,{}_0F_1(\sigma\,;\,z)={}_2F_3\left(\frac{1}{2}(\rho+\sigma),\ \frac{1}{2}(\rho+\sigma-1)\,;\,\rho,\ \sigma,\ \rho+\sigma-1\,;\,4z\right)$$

より

$$(\hat{\theta}_7)^2=V^4z\,{}_1F_2\left(\frac{n}{2}\,;\,\frac{n+1}{2},\ n;\ (n-1)V^2z\right)$$

を得るが，ここで (3.1) を用いれば，超幾何関数 ${}_2F_2$ を用いた分散表現を得る．

P–8 については P–7 と同様に求められる．

なお，実際にサンプルから UMVU 推定値を得るのには無限級数和を計算しなければならないが，それらは収束が速く，べき乗の低い方から足し込んで精度を保つのに必要な桁数まで求めれば十分である．

3.3　母数の最尤推定量とその数学的期待値および平均二乗誤差

θ を母数としその最尤推定量を $\hat{\theta}$ としたとき，母数関数 $g(\theta)$ の最尤推定量は $g(\hat{\theta})$ で与えられる．このことに基づいて，以下 P–1 から P–8 の母数の最尤推定量を与え，さらにその数学的期待値および平均二乗誤差 (MSE) を列挙する．$i=1,\ \cdots,\ 8$ に対して，母数 θ_i の最尤推定量を $\hat{\theta}_i{}^*$，その数学的期待値と MSE をそれぞれ $\mathrm{E}[\hat{\theta}_i{}^*]$ と $\mathrm{MSE}[\hat{\theta}_i{}^*]$ のように書く．

P–1.　$$\hat{\theta}_1{}^*=\Phi\left(\frac{S_Z}{2}\right),\ \mathrm{E}[\hat{\theta}_1{}^*]=\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,-\frac{\sigma^2}{4n}\right)$$

$$+\frac{1}{2},\ \mathrm{MSE}[\hat{\theta}_1{}^*]=\frac{n-1}{8\pi n}\sigma^2F^{1:1}_{0:1}\left[\begin{matrix}\frac{n+1}{2}:\frac{1}{2};\frac{1}{2};\\ \text{—}:\frac{3}{2};\frac{3}{2};\end{matrix}\ -\frac{\sigma^2}{4n},\ -\frac{4n}{\sigma^2}\right]$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma\left\{1-2\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right\}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ -\frac{\sigma^2}{4n}\right)$$

$$+\left\{\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}^2.$$

P–2. $\hat{\theta}_2{}^*=2\Phi\left(\frac{S_Z}{\sqrt{2}}\right)-1,\ \ \mathrm{E}\,[\hat{\theta}_2{}^*]=\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ -\frac{\sigma^2}{2n}\right),$

$$\mathrm{MSE}\,[\hat{\theta}_2{}^*]=\frac{n-1}{\pi n}\sigma^2F^{1:1}_{0:1}\left[\begin{matrix}\frac{n+1}{2}:\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2}\ ; \\ \text{———}:\frac{3}{2}\ ;\frac{3}{2}\ ;\end{matrix}\ -\frac{\sigma^2}{2n},\ -\frac{\sigma^2}{2n}\right]-2\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma$$

$$\times\left\{2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)-1\right\}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{n}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ -\frac{\sigma^2}{2n}\right)+\left\{2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)-1\right\}^2.$$

P–3. $\hat{\theta}_3{}^*=S_Z,\ \ \mathrm{E}\,[\hat{\theta}_3{}^*]=\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma,$

$$\mathrm{MSE}\,[\hat{\theta}_3{}^*]=\left\{\frac{n-1}{n}-2\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}+1\right\}\sigma^2.$$

P–4. $\hat{\theta}_4{}^*=\exp\,[S^2{}_Z]-1,\quad \mathrm{E}\,[\hat{\theta}_4{}^*]=G(2)-1,$

$$\mathrm{MSE}\,[\hat{\theta}_4{}^*]=G(4)-2e^{\sigma^2}G(2)+e^{2\sigma^2},\ \ ここで\ G(b)=\left(1-\frac{b}{n}\sigma^2\right)^{-(n-1)/2}.$$

P–5. $\hat{\theta}_5{}^*=\exp\,[4S^2{}_Z]+2\exp\,[3S^2{}_Z]+3\exp\,[2S^2{}_Z]-3,$

$\mathrm{E}\,[\hat{\theta}_5{}^*]=G(8)+2G(6)+3G(4)-3,\ \ \mathrm{MSE}\,[\hat{\theta}_5{}^*]=G(16)+4G(14)+10G(12)$

$$+12G(10)+9G(8)-2e^{2\sigma^2}(e^{2\sigma^2}+2e^{\sigma^2}+3)\ \{G(8)+2G(6)+3G(4)\}$$

$$+e^{4\sigma^2}(e^{2\sigma^2}+2e^{\sigma^2}+3)^2,\ \ ここで\ G(b)=\left(1-\frac{b}{n}\sigma^2\right)^{-(n-1)/2}.$$

P–6. $\hat{\theta}_6{}^*=\frac{S^2{}_Z}{2},\ \ \mathrm{E}\,[\hat{\theta}_6{}^*]=\frac{n-1}{2n}\sigma^2,\ \ \mathrm{MSE}\,[\hat{\theta}_6{}^*]=\frac{2n-1}{4n^2}\sigma^4.$

P–7. $\hat{\theta}_7{}^*=S^2{}_Z\exp\,[S^2{}_Z/2],\ \ \mathrm{E}\,[\hat{\theta}_7{}^*]=\frac{n-1}{n}\sigma^2\left(1-\frac{1}{n}\sigma^2\right)^{-(n+1)/2},$

$$\mathrm{MSE}\,[\hat{\theta}_7{}^*]=\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\left(1-\frac{2}{n}\sigma^2\right)^{-(n+3)/2}-\frac{2(n-1)}{n}e^{\sigma^2/2}\left(1-\frac{1}{n}\sigma^2\right)^{-(n+1)/2}+e^{\sigma^2}\right\}\sigma^4.$$

P–8. $\hat{\theta}_8{}^*=2S^2{}_Z\exp\,[3S^2{}_Z/2],\ \ \mathrm{E}\,[\hat{\theta}_8{}^*]=\frac{2(n-1)}{n}\sigma^2\left(1-\frac{3}{n}\sigma^2\right)^{-(n+1)/2},$

$$\mathrm{MSE}\,[\hat{\theta}_8{}^*]=4\left\{\frac{n^2-1}{n^2}\left(1-\frac{6}{n}\sigma^2\right)^{-(n+3)/2}-\frac{2(n-1)}{n}e^{3\sigma^2/2}\left(1-\frac{3}{n}\sigma^2\right)^{-(n+1)/2}\right.$$

$$\left.+e^{3\sigma^2}\right\}\sigma^4.$$

P–1 については，(3.6) より

$$\hat{\theta}_1{}^*=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{2\pi n}}V_Z\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{n-1}{8n}V^2{}_Z\right)+\frac{1}{2}$$

と書けるから，ここで (3.1) を使えば $\mathrm{E}(\hat{\theta}_1{}^*)$ を得，さらに MSE の計算には，(3.7) より

$$(\hat{\theta}_1{}^*)^2=\frac{n-1}{8\pi n}V^2{}_ZF^{0:1}_{0:1}\left[\begin{matrix}\text{—}:\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,; \\ \text{—}:\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\,;\end{matrix}\ -\frac{n-1}{8n}V^2{}_Z,\ -\frac{n-1}{8n}V^2{}_Z\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{2\pi n}}V_Z\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{n-1}{8n}V^2{}_Z\right)+\frac{1}{4}$$

となるから，ここで (3.1) を使えばよい．数学的期待値 E と和 $\sum$ との交換は，収束半径内で許される．

P–2 については P–1 と同様に求めることができ，P–3 については明らかである．P–4, 5 については [9] で与えられた．P–6 については明らかである．

P–7 について最尤推定量の数学的期待値と MSE の評価には，A を任意の実数としたとき

$$\mathrm{E}\,[S^{\,p}{}_Z\,e^{AS^2{}_Z}]=\left(\frac{2\sigma^2}{n}\right)^p\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+p\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1-\frac{2A}{n}\sigma^2\right)^{-(n-1)/2+p},\quad \frac{n-1}{2}+p>0$$

が成立することに注意すれば十分である．

P–8 については P–7 と同様に求めることができる．

3.4 標本モーメントによる母数の推定量とその漸近平均二乗誤差

標本の $X_1, \cdots, X_n$ すべては揃っていずに，標本数 n，標本平均 $\bar{X}$ および標本分散 $S^2{}_X$ のみが分っている場合がある．標本モーメントによる推定法は，このような場合に対応する．

以下 P–1 から P–8 の母数の $(\bar{X}, S^2{}_X)$ に基づく一つの推定量とその漸近 MSE とを列挙しのちに P–1 に対して求め方を記すことにする．これらの推定量はすべて漸近的に不偏である．$i=1, \cdots, 8$ に対して，母数 θ_i の $(\bar{X}, S^2{}_X)$ に基づく推定量を $(\hat{\theta}_i)_m$ と書き，その漸近 MSE を $\mathrm{MSE}\,[(\hat{\theta}_i)_m]$ と書く．

P–1. $(\hat{\theta}_1)_m=\Phi\left(\frac{1}{2}\left\{\ln\left(1+\frac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)\right\}^{1/2}\right)$, $\mathrm{MSE}\,[(\hat{\theta}_1)_m]=\frac{1}{32\pi n\sigma^2}e^{-(1/4)\sigma^2}Q(\sigma^2)$.

P–2. $(\hat{\theta}_2)_m=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\ln\left(1+\frac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)\right\}^{1/2}\right)-1$, $\mathrm{MSE}\,[(\hat{\theta}_2)_m]=\frac{1}{4\pi n\sigma^2}e^{-(1/2)\sigma^2}Q(\sigma^2)$.

P–3. $(\hat{\theta}_3)_m=\left\{\ln\left(1+\frac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)\right\}^{1/2}$, $\mathrm{MSE}\,[(\hat{\theta}_3)_m]=\frac{1}{4n\sigma^2}Q(\sigma^2)$.

P–4. $(\hat{\theta}_4)_m=\left(\dfrac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right.$, $\mathrm{MSE}\,[(\hat{\theta}_4)_m]=\dfrac{1}{n}e^{2\sigma^2}Q(\sigma^2)$.

P–5. $(\hat{\theta}_5)_m=\left(1+\dfrac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)^4+2\left(1+\dfrac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)^3+3\left(1+\dfrac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)^2-3,$

$$\mathrm{MSE}\,[(\hat{\theta}_5)_m]=\frac{4}{n}e^{4\sigma^2}(2e^{2\sigma^2}+3e^{\sigma^2}+3)^2Q(\sigma^2).$$

P–6. $(\hat{\theta}_6)_m=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)$, $\mathrm{MSE}\,[(\hat{\theta}_6)_m]=\dfrac{1}{4n}Q(\sigma^2)$.

P–7. $(\hat{\theta}_7)_m=\left(1+\dfrac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)^{1/2}\ln\left(1+\dfrac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)$, $\mathrm{MSE}\,[(\hat{\theta}_7)_m]=\dfrac{1}{4n}(\sigma^2+2)^2e^{\sigma^2}Q(\sigma^2)$.

P–8. $(\hat{\theta}_8)_m=2\left(1+\dfrac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)^{3/2}\ln\left(1+\dfrac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)$, $\mathrm{MSE}\,[\hat{\theta}_8)_m]=\dfrac{1}{n}(3\sigma^2+2)^2e^{3\sigma^2}Q(\sigma^2)$.

P–1 から P–8 において

$$Q(\sigma^2)=(e^{\sigma^2}-1)^2(e^{2\sigma^2}+2e^{\sigma^2}-1)$$

である.

標本モーメントによる推定量の構成とその漸近 MSE の評価には，つぎの命題が有用である.

命題 ([3], p. 354). ν 次と ρ 次の標本中心モーメント m_ν と m_ρ の関数 $H(m_\nu, m_\rho)$ に対し，H は m_ν と m_ρ に関して，それぞれ ν 次と ρ 次の母中心モーメント μ_ν と μ_ρ の近傍で 2 回連続微分可能とする．また，すべての可能な X_i の取り得る値に対して $|H|<cn^p$ であるとする．ここで c と p は非負定数である．そして

$$H_0=H\Big|_{\substack{m_\nu=\mu_\nu\\ m_\rho=\mu_\rho}},\quad H_1=\frac{\partial}{\partial m_\nu}H\Big|_{\substack{m_\nu=\mu_\nu\\ m_\rho=\mu_\rho}},\quad H_2=\frac{\partial}{\partial m_\rho}H\Big|_{\substack{m_\nu=\mu_\nu\\ m_\rho=\mu_\rho}}$$

とおくとき，$H(m_\nu, m_\rho)$ の数学的期待値と MSE は

$$\text{(3.8)}\qquad \mathrm{E}\,[H]=H_0+O(n^{-1}),$$

$$\text{(3.9)}\qquad \mathrm{MSE}\,[H]=\mu_2(m_\nu)H^2{}_1+2\mu_{11}(m_\nu, m_\rho)H_1H_2+\mu_2(m_\rho)H^2{}_2+O(n^{-3/2})$$

で与えられる．ここで

$$\mu_2(m_\nu)=\mathrm{E}\,[(m_\nu-\mu_\nu)^2],$$
$$\mu_{11}(m_\nu, m_\rho)=\mathrm{E}\,[(m_\nu-\mu_\nu)(m_\rho-\mu_\rho)]$$

である.

この命題は $m_\nu=\bar{X}$ であっても成立することに注意しておく．ただし，μ_ν のかわりに母平均 μ_1' で置換える必要がある．この命題を $m_\nu=\bar{X}$, $m_\rho=S^2{}_X$ として用いるため，$\bar{X}$ と $S^2{}_X$ に関して成立する式をまとめておくと

$$\text{(3.10)}\qquad \mu_2(\bar{X})=\frac{1}{n}e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1),$$

(3.11) $$\mu_{11}(\bar{X},\ S^2{}_x)=\frac{1}{n}\,e^{3\mu+(3/2)\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)^2\,(e^{\sigma^2}+2)+O(n^{-2}),$$

(3.12) $$\mu_2(S_x{}^2)=\frac{1}{n}\,e^{4\mu+2\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)^2(e^{4\sigma^2}+2\,e^{3\sigma^2}+3\,e^{2\sigma^2}-4)+O(n^{-2})$$

のようである．また，母数間に成立する式

$$\mu_1'=\mathrm{E}\,[X_i]=e^{\mu+\sigma^2/2},$$

$$\mu_2=\mathrm{V}\,[X_i]=e^{\mu+\sigma^2/2}(e^{\sigma^2}-1)$$

より

(3.13) $$\sigma^2=\ln\left(1+\frac{\mu_2}{\mu'^2{}_1}\right)$$

が得られる．

P–1 について，標本モーメントによる推定量の構成とその漸近 MSE の評価は，つぎのようにしてなされる．(3.13) の μ'_1 と μ_2 のかわりにそれぞれ $\bar{X}$ と $S^2{}_X$ を代入して σ^2 の一つの推定量

$$(\widehat{\sigma^2})_m=\ln\left(1+\frac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}\right)$$

を得るが，この正の平方根を σ の推定量と考え，それを母数 σ のかわりに代入して θ_1 の推定量 $(\hat{\theta}_1)_m$ を得る．それを $H(m_\nu,\ m_\rho)$ とおく $(m_\nu=\bar{X},\ m_\rho=S^2{}_X)$ と，H は m_ν と m_ρ に関して2回連続微分可能であり，任意の x $(-\infty<x<\infty)$ に対して $0<\Phi(x)<1$ だから $|H|<1$ である．よって前述の命題を適用できる．また

$$H_1=-\frac{e^{\sigma^2}-1}{2\sqrt{2\pi}\ \sigma e^{\mu+(13/8)\sigma^2}},$$

$$H_2=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}\ \sigma e^{2\mu+(17/8)\sigma^2}}$$

を得るので，これらを (3.10)，(3.11) および (3.12) と共に (3.9) に代入することにより MSE $[(\hat{\theta}_1)_m]$ を得る．

なお，P–3 から P–8 に対して $|H|<cn^p$ を示すには

$$1+\frac{S^2{}_X}{\bar{X}^2}<n$$

の評価式が有用である．

4. 推定量の比較

UMVU 推定量，最尤推定量および標本モーメントによる推定量の比較が，相対効率の概念を導入することによりなされる．

定義 母数 θ の一つの推定量 $(\hat{\theta})_1$ に対する他の推定量 $(\hat{\theta})_2$ の相対効率を

$$eff.\ [(\hat{\theta})_2\,;\ (\hat{\theta})_1]=\mathrm{MSE}\,[(\hat{\theta})_1]/\mathrm{MSE}\,[(\hat{\theta})_2]$$

表 4.1 相対効率と最尤推定量の MSE (P-1)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	.956 1.058 2.164×10^{-5}	.958 .837 1.914×10^{-4}	.960 .529 5.132×10^{-4}	.965 .270 9.547×10^{-4}	.971 .110 1.473×10^{-3}
50	.992 .988 4.039×10^{-6}	.993 .780 3.565×10^{-5}	.993 .491 9.524×10^{-5}	.994 .249 1.761×10^{-4}	.996 .101 2.694×10^{-4}
100	.996 .979 2.002×10^{-6}	.996 .773 1.767×10^{-5}	.997 .486 4.717×10^{-5}	.997 .246 8.714×10^{-5}	.998 .100 1.331×10^{-4}
200	.998 .975 9.966×10^{-7}	.998 .769 8.793×10^{-6}	.998 .484 2.347×10^{-5}	.999 .245 4.335×10^{-5}	.999 .099 6.619×10^{-5}

表 4.2 相対効率と最尤推定量の MSE (P-2)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	.956 1.059 1.727×10^{-4}	.959 .839 1.501×10^{-3}	.965 .533 3.888×10^{-3}	.975 .274 6.875×10^{-3}	.989 .114 9.933×10^{-3}
50	.992 .988 3.223×10^{-5}	.993 .780 2.790×10^{-4}	.994 .492 7.170×10^{-4}	.997 .250 1.251×10^{-3}	1.000 .102 1.772×10^{-3}
100	.996 .979 1.598×10^{-5}	.997 .773 1.382×10^{-4}	.997 .487 3.548×10^{-4}	.998 .247 6.179×10^{-4}	1.000 .100 8.730×10^{-4}
200	.998 .975 7.953×10^{-6}	.998 .769 6.879×10^{-5}	.999 .484 1.765×10^{-4}	.999 .245 3.071×10^{-4}	1.000 .099 4.332×10^{-4}

により定義する.

P-1 から P-8 の母数の最尤推定量に対する UMVU 推定量の相対効率，最尤推定量に対する標本モーメントによる推定量の漸近相対効率および最尤推定量の MSE の値を表 4.1 から 4.8 に示す. (漸近) 相対効率は標本数 n と母数 σ のみの関数であり，母数 μ には無関係である. 標本数 n は 10, 50, 100, 200 とし，σ は実際上の問題に現われ易いと思われる範囲 0.1 から 0.9 までを 0.2 きざみで計算した. 表中，上段は最尤推定量に対する UMVU 推定量の相対効率，中段は最尤推定量に対する標本モーメントによる推定量の漸近相対効率そして下段は最尤推定量の MSE を表わす. 標本モーメントによる推定量については，漸近 MSE の式中に標本数を代入して計算した. UMVU 推定量の分散と最尤推定量の MSE の表現には無限級数和が現われるが，多重無限級数和の場合組合せが多くなることにより計算回数は多くなるけれども，べき乗の低い方から足し込んで精度を保つのに必要な桁数まで求めれば十分である.

表 4.1 から 4.8 により，以下に述べる関係が観察される. A) σ が 0.1 から 0.9 の範囲で一

表 4.3　相対効率と最尤推定量の MSE (P-3)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	.956 1.058 5.451×10^{-4}	.956 .835 4.906×10^{-3}	.956 .525 1.363×10^{-2}	.956 .266 2.671×10^{-2}	.956 .107 4.415×10^{-2}
50	.992 .988 1.018×10^{-4}	.992 .779 9.159×10^{-4}	.992 .490 2.544×10^{-3}	.992 .248 4.986×10^{-3}	.992 .100 8.243×10^{-3}
100	.996 .979 5.044×10^{-5}	.996 .772 4.540×10^{-4}	.996 .486 1.261×10^{-3}	.996 .246 2.472×10^{-3}	.996 .099 4.086×10^{-3}
200	.998 .975 2.511×10^{-5}	.998 .769 2.260×10^{-4}	.998 .484 6.277×10^{-4}	.998 .245 1.230×10^{-3}	.998 .099 2.034×10^{-3}

表 4.4　相対効率と最尤推定量の MSE (P-4)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	.856 .923 1.940×10^{-5}	.864 .736 1.863×10^{-3}	.891 .480 2.053×10^{-2}	.968 .268 1.406×10^{-1}	1.174 .137 9.185×10^{-1}
50	.970 .961 4.041×10^{-6}	.972 .760 3.849×10^{-4}	.978 .481 4.119×10^{-3}	.992 .248 2.603×10^{-2}	1.021 .104 1.400×10^{-1}
100	.985 .966 2.030×10^{-6}	.986 .763 1.932×10^{-4}	.989 .482 2.060×10^{-3}	.996 .246 1.290×10^{-2}	1.010 .101 6.809×10^{-2}
200	.993 .968 1.018×10^{-6}	.993 .764 9.679×10^{-5}	.995 .482 1.030×10^{-3}	.998 .245 6.424×10^{-3}	1.005 .100 3.359×10^{-2}

様に最尤推定量の方が UMVU 推定量よりも良い（相対効率が1より小）のは，P-1, 2, 3, 6 の場合である．B) P-4, 5, 7, 8 については，σ が 0.1 から 0.9 の範囲の途中で UMVU 推定量の方が最尤推定量よりも良くなる．特に P-5, 8 については，標本数が小さいとき変化の程度が著しいが，最尤推定量の方が UMVU 推定量より良い範囲であっても，UMVU 推定量の効率はさほど落ちない．その意味でこの2種類の推定量については，全般的には UMVU 推定量の方が安定していると言える．C) P-1, 2, 4, 5, 7, 8 については，最尤推定量に対する UMVU 推定量の相対効率は，σ が 0.1 から 0.9 へと大きくなるにつれて大きくなる．P-3, 6 については，式から明らかなように，それは n にはよるが σ にはよらない．D) 標本モーメントによる推定量は，σ が小さい所では高い効率を保つが，σ が大きくなると著しく効率が下る．よって，標本モーメントによる推定量を使う場合は，σ の値が小さいという先験情報が必要であろう．ところで，標本数が小さい場合，標本モーメントによる推定量の MSE は漸近式だから，MSE の良い評価とは言い難い．それで，上の叙述も正確とは言い切れない．より詳しい

表 4.5　相対効率と最尤推定量の MSE (P-5)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	.857 .925 5.167×10^{-3}	.896 .767 7.003×10^{-1}	1.154 .651 1.892×10^{1}	5.653 1.919 1.879×10^{3}	
50	.971 .961 1.074×10^{-3}	.979 .766 1.399×10^{-1}	1.018 .506 2.941	1.157 .302 5.911×10^{1}	1.650 .193 2.064×10^{3}
100	.985 .966 5.398×10^{-4}	.989 .766 6.994×10^{-2}	1.008 .493 1.434	1.071 .270 2.643×10^{1}	1.251 .134 7.191×10^{2}
200	.993 .968 2.705×10^{-4}	.995 .766 3.497×10^{-2}	1.004 .487 7.084×10^{-1}	1.034 .256 1.254×10^{1}	1.113 .114 3.064×10^{2}

表 4.6　相対効率と最尤推定量の MSE (P-6)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	.855 .922 4.750×10^{-6}	.855 .727 3.847×10^{-4}	.855 .458 2.969×10^{-3}	.855 .231 1.140×10^{-2}	.855 .094 3.116×10^{-2}
50	.970 .961 9.900×10^{-7}	.970 .758 8.019×10^{-5}	.970 .477 6.188×10^{-4}	.970 .241 2.377×10^{-3}	.970 .098 6.495×10^{-3}
100	.985 .966 4.975×10^{-7}	.985 .762 4.030×10^{-5}	.985 .479 3.109×10^{-4}	.985 .242 1.194×10^{-3}	.985 .098 3.264×10^{-3}
200	.993 .968 2.494×10^{-7}	.993 .764 2.020×10^{-5}	.993 .480 1.559×10^{-4}	.993 .243 5.987×10^{-4}	.993 .098 1.636×10^{-3}

ことを知りたければ，シミュレーションを行って調べてみる必要があろう．

補遺 1

P–1 から P–8 の母数の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間は，つぎのようにして与えられる．まず $\chi^2=(n-1)V^2{}_Z/\sigma^2$ が自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布に従うことに注意して，任意の α $(0<\alpha<1)$ に対し α_1, α_2 を $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$ となるような正数とし，$\chi^2{}_1$, $\chi^2{}_2$ を

$$\Pr\{\chi^2\leqq\chi^2{}_1\}=\alpha_1,$$
$$\Pr\{\chi^2\geqq\chi^2{}_2\}=\alpha_2$$

の解とする．そして

$$\sigma^2=(n-1)\ V^2{}_Z/\chi^2{}_2,$$

表 4.7　相対効率と最尤推定量の MSE (P-7)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	.856 .923 1.940×10^{-5}	.863 .735 1.858×10^{-3}	.885 .476 2.009×10^{-2}	.937 .258 1.287×10^{-1}	1.045 .120 7.060×10^{-1}
50	.970 .961 4.041×10^{-6}	.972 .760 3.841×10^{-4}	.977 .481 4.055×10^{-3}	.987 .246 2.457×10^{-2}	1.005 .102 1.206×10^{-1}
100	.985 .966 2.030×10^{-6}	.986 .763 1.928×10^{-4}	.989 .481 2.029×10^{-3}	.994 .245 1.222×10^{-2}	1.002 .100 5.924×10^{-2}
200	.993 .968 1.018×10^{-6}	.993 .764 9.660×10^{-5}	.994 .481 1.015×10^{-3}	.997 .244 6.092×10^{-3}	1.001 .099 2.937×10^{-2}

表 4.8　相対効率と最尤推定量の MSE (P-8)

n \ σ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	.857 .925 8.092×10^{-5}	.889 .761 1.086×10^{-2}	1.021 .567 2.357×10^{-1}	1.481 .453 4.671	3.553 .515 1.527×10^{2}
50	.971 .961 1.683×10^{-5}	.978 .765 2.185×10^{-3}	1.002 .496 4.124×10^{-2}	1.059 .270 5.580×10^{-1}	1.177 .126 7.469
100	.985 .966 8.453×10^{-6}	.989 .765 1.093×10^{-3}	1.001 .489 2.031×10^{-2}	1.028 .256 2.646×10^{-1}	1.081 .111 3.294
200	.993 .968 4.236×10^{-6}	.994 .766 5.466×10^{-4}	1.000 .485 1.008×10^{-2}	1.014 .250 1.289×10^{-1}	1.039 .105 1.551

(表4.1から4.8中，上段は（最尤推定量の MSE)/(UMVU 推定量の分散)，中段は（最尤推定量の MSE)/(モーメント法による推定量の漸近 MSE）そして下段は最尤推定量の MSE を表わす)

$$\bar{\sigma}^2=(n-1)V^2{}_Z/\chi^2{}_1$$

とおくと

$$\underline{\sigma}^2\leqq\sigma^2\leqq\bar{\sigma}^2$$

は σ^2 の $100(1-\alpha)\%$ 信頼区間である．P–1 から P–8 の各母数は σ について狭義単調増加関数（$g(\sigma)$ とする）だから，各母数の $100\times(1-\alpha)\%$ 信頼区間は

$$g(\underline{\sigma})\leqq g(\sigma)\leqq g(\bar{\sigma})$$

として作られる．これは [7] において変動係数の場合に取られた方法と同じである．

なお，標本数が大きいときには，最尤推定量の漸近正規性を用いて近似信頼区間を作ること

もできる．また，例えば2つの母集団からの標本より各母集団における P–1 から P–8 の各母数が等しいかどうかの検定は，対数標準偏差が等しいかどうかの検定に同値となるので，F 検定を用いて検定を行うことができる．このことは [5] に指摘されている事実と同様である．

補遺 2

A 1. 一般化された超幾何関数

$$ {}_pF_q(a_1, \cdots, a_p ; b_1, \cdots, b_q ; z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!} \quad (p,\ q \text{ は非負整数}), $$

$$ (a)_k=a(a+1)\cdots(a+k-1),\ k\geqq 1,\ (a)_0=1,\ (0)_0=1, $$

の収束条件は，[2] より

(1) $p<q+1$ のとき，任意の有限な点 z に対して絶対収束，

(2) $p=q+1$ のとき，$|z|<1$ に対して絶対収束，

(3) $p>q+1$ のとき，有限級数以外はすべての $z\neq 0$ に対して発散

である．

特に $p=0$ の場合，${}_0F_q$ を明示すると

$$ {}_0F_q(b_1, \cdots, b_q ; z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k}\frac{z^k}{k!} $$

である．

A 2. Kampé de Fériet 関数

$$ F^{A:B}_{C:D}\left[\begin{matrix}(a): & (b) ; & (b') ; \\ (c): & (d) ; & (d') ;\end{matrix}\ x,\ y\right]=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{k+l}\prod_{j=1}^{B}(b_j)_k(b_j')_l}{\prod_{j=1}^{C}(c_j)_{k+l}\prod_{j=1}^{D}(d_j)_k(d_j')_l}\frac{x^ky^l}{k!\,l!}, $$

(a) は a_j $(j=1, \cdots, A)$ のベクトル的表現，

の収束条件は，[4] より

(1) $A+B<C+D+1$ のとき，任意の有限な点 x, y に対して絶対収束，

(2) $A+B=C+D+1$ のとき，$A-C=-k\leqq 0$ ならば $|x|<1,\ |y|<1$ に対して収束，$A-C=k>0$ ならば $|x^{1/k}|+|y^{1/k}|<1$ に対して収束，

(3) $A+B>C+D+1$ のとき，有限級数以外はすべての $x, y\neq 0$ に対して発散

である．

特に $C=0$ の場合，$F^{A:B}_{0:D}$ を明示すると

$$ F^{A:B}_{0:D}\left[\begin{matrix}(a): & (b) ; & (b') ; \\ \text{——}: & (d) ; & (d') ;\end{matrix}\ x,\ y\right]=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{k+l}\prod_{j=1}^{B}(b_j)_k(b_j')_l}{\prod_{j=1}^{D}(d_j)_k(d_j')_l}\frac{x^ky^l}{k!\,l!} $$

である．$A=C=0$ とか $A=B=C=0$ の場合も類似に定義される．

A 3. Appell の関数 F_2 は

$$ F_2(a,\ b,\ b' ; c,\ c' ; x,\ y)=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(a)_{k+l}(b)_k(b')_l}{(c)_k(c')_l}\frac{x^ky^l}{k!\,l!} $$

で定義され，それは Kampé de Fériet 関数の特別な場合である．F_2 の一つの合流型 ψ_2 は

$$\psi_2(a;c,c';x,y)=\lim_{\varepsilon\to 0}F_2(a,\ 1/\varepsilon,\ 1/\varepsilon;c,c';\varepsilon x,\ \varepsilon y)$$
$$=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(a)_{k+l}}{(c)_k(c')_l}\frac{x^k y^l}{k!\,l!}$$

である．

謝　　辞

本稿を改訂するにあたり，審査者の方々から有益な助言を賜わりました．ここに記して感謝の意を表します．

参 考 文 献

[1] Aitchison, J. and Brown, J.A.C. (1957). *The Lognormal Distribution*, Cambridge Univ. Press, London.

[2] Carlson, B.C. (1977). *Special Functions of Applied Mathematics*, Academic Press, New York.

[3] Cramér, H. (1945). *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

[4] Exton, H. (1976). *Multiple Hypergeometric Functions and Applications*, Halsted Press, New York.

[5] Iyengar, N.S. (1960). On the standard error of the Lorenz concentration ratio, *Sankhyā*, **22**, 371–378.

[6] Johnson, N.L. and Kotz, S. (1970). *Continuous Univariate Distributions* –1, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[7] Koopmans, L.H., Owen, D.B. and Rosenblatt, J.I. (1964). Confidence intervals for the coefficient of variation for the normal and log normal distributions, *Biometrika*, **51**, 25–32.

[8] 森口繁一，他共著 (1960). 数学公式 III, 岩波全書，東京.

[9] 清水邦夫，岩瀬晃盛，牛沢賢二 (1979). 対数正規分布の母数推定，応用統計学，**8**, 97-110.

[10] Shimizu, K. and Iwase, K. (1981). Uniformly minimum variance unbiased estimation in lognormal and related distributions, *Commun. Statist.*, A**10**, 1127–1147.

[11] 竹内 啓 (1963). 数理統計学，東洋経済，東京.

[12] Yanagimoto, T. (1981) Sample measures of the heaviness of tail, *Research Memorandum* No. 211, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Estimation of Measures Related to the Lorenz Curve and of Measures of the Heaviness of Tail — The Case of a Lognormal Distribution —

Kunio Shimizu
(Science University of Tokyo)

This paper deals with the estimation problem of measures related to the Lorenz curve and of measures of the heaviness of tail under a lognormal distribution. The measures to which we address ourselves are as follows: the abscissa of the point, of which the tangent is parallel to the diagonal line, the Gini concentration coefficient and the Theil coefficient, etc. The estimators of these parameters are the uniformly minimum variance unbiased estimator and maximum likelihood estimator, and the estimator based on sample moments. The efficiencies of them are discussed.