統計数理研究所彙報
第30巻　第2号（1983）

ABC分析とその区分線の設定

東京理科大学　牧　野　都　治

（1982年8月　受付）

1. ABC 分析

オペレーションズ・リサーチ用語（JIS Z 8121）[4] に，ABC 分析という用語が定められている．[4] によれば，ABC 分析とは，在庫品目が非常に多いとき，それを使用金額の大きさの順に並べて，A, B, C の3種類に分類し，能率的に重点管理を行なうやり方をいう，と意味づけされている．すなわち，累積品目数百分率を横軸，累積金額百分率を縦軸にとるならば，ABC 分析は図1のように，

とくに変化のはげしい部分を A（高使用金額），
それにつぐ部分を B（中使用金額），
変化のゆるやかな部分を C（低使用金額）

として管理する手法であるが，それはとりも直さずパレート曲線（パレート図ともいう）にもとづく分析に他ならない*．ただし，パレート曲線とは，オペレーションズ・リサーチの分野

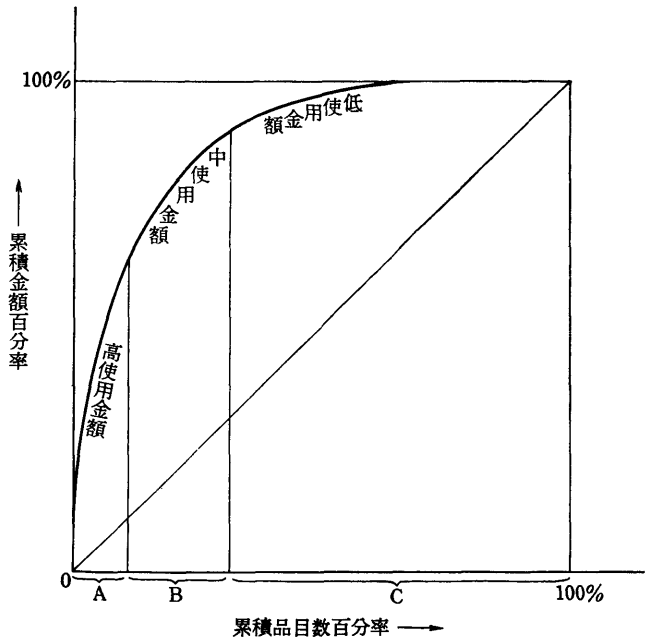

図1　ABC 分析

* OR でいうパレート分析では在庫品目は数量的に順にならべられないカテゴリーでもよいことになっているが，ABC 分析では順にならべられるものを扱う．

などでの呼び名であって，本稿ではその慣習に従うが，これは所得格差の議論の中にみられるローレンツ曲線と，本質的には何ら異なることがない．ただ，われわれはパレート曲線を書くにあたって，金額のかさむ方から累積していくので，曲線が均等線（原点を通る対角線）の上側にできるのに対し，ローレンツ曲線は金額の低い方から累積するので，下側にふくらむ．

ところで，ABC 分析そのものは，1951 年に Dickie, H.F. によって考案されたものであるといわれているが，その根底には次のような考えがある．すなわち，部品を ABC 分析するということは，C とランクづけされる品目であっても，それは必要な部品であって，それの在庫を廃止してしまうわけにはいかない．そこで，価値に応じた努力を投入する必要があると考えた．その後，Drucker, D.F. らによって，ABC 分析は，単に在庫管理に限らず，努力配分を必要とする社会現象全般に適用しうるものであると提唱されるに及んで，現在のように広く用いられるようになってきた．

しかし，ABC 分析は，上述のように，ローレンツ曲線にもとづく分析に他ならないので，この考えの源は，Lorenz, M.O. にあるといってよいであろう．

いうまでもなく，ローレンツ曲線については，従来幾多の研究がなされており，有用な結果が報告されている．それにも拘らず，ABC 分析についての研究はたいへん乏しく，単に事例研究が報告されているにとどまる．とくに，ABC 分析における A, B, C の分け方となると，従来定説がなく，実務上は，かなり恣意的になされているようである．そこで，このことについて，定量的な 1 つの区分法を提案したいというのが，小論の主たるねらいである．

これに先立ってわれわれは，確率分布を通して ABC 分析を評価することを目指し，[13] において，パレート曲線についての若干の考察を行った．

[13] では，とくに待ち行列論で重要な役割りをはたしているアーラン分布，信頼性の解析で重要なワイブル分布をとりあげて，パレート図の性質を調べた．すなわち，非負の値をとる確率変数 T（以下，つねにこのような確率変数についてのみ考える）の確率密度関数を $f(t)$ と書くことにすると，図2 に示すパレート曲線の x 座標，y 座標は，次のようになる．

$$x=\int_t^{\infty} f(t)\,dt \tag{1.1}$$

$$y=\frac{1}{\nu}\cdot\int_t^{\infty} t\cdot f(t)\,dt \qquad (\text{ただし，}\nu=\mathrm{E}(T)) \tag{1.2}$$

また，パレート図で，均等線からの距離が最大になる点を，ふくらみ最大の点とよぶことにすると，その点の x 座標は，

$$\xi_0=\int_\nu^{\infty} f(t)\,dt \tag{1.3}$$

になる．とくに，T が位相 k のアーラン分布に従う場合，すなわち確率密度関数が

$$f(t)=\frac{(k\alpha)^k\cdot t^{k-1}}{\Gamma(k)}\cdot e^{-k\alpha t} \tag{1.4}$$

と書ける場合やワイブル分布

$$f(t)=\frac{m t^{m-1}}{t_0}\cdot e^{-t^m/t_0} \tag{1.5}$$

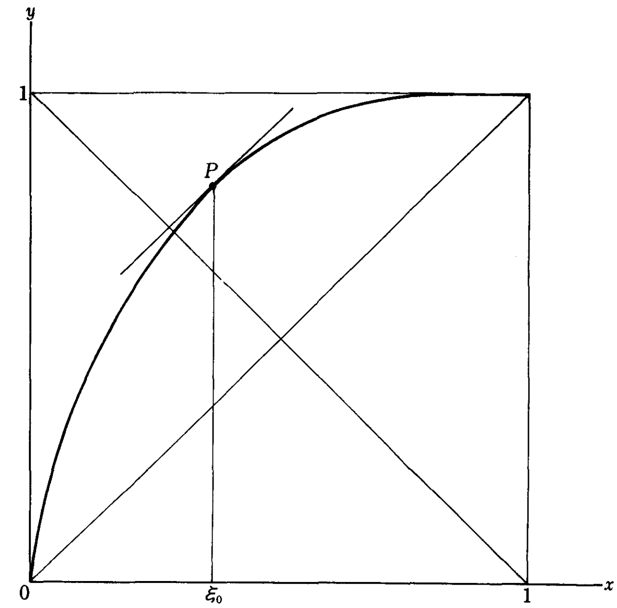

図2 パレート曲線とふくらみ最大の点

に従う場合の，ふくらみ最大の点の軌跡などについて詳しく調べた．(ただし，(1.4) 式の k は必ずしも整数値に限定しないので，ガンマ分布とよぶことにする．)

このようなことをもとにして，次節で，ABC 分析での，A，B，C の区分のし方について考えてみる．

2. 区分線の設定

ABC 分析における区分点をどのように定めるかについては，いろいろの方法が考えられる．そこで，努力配分の問題として，たとえば脱税摘発の問題を考えてみる．この場合，限られた調査官の労力をもって，なるべく効果的な調査をしたいということになる．このことに関して，しばしば話題に上るのは，不正に確定申告した者のうちの上位10%程度による脱税金額が，全体の80%も占めているということである．これをパレート図で表すならば，横軸に累積申告者数百分率，縦軸に累積脱税金額百分率をとって，図1に類するグラフを書くことになる．その意味で，横軸は調査官による努力軸と考え，縦軸はそれにともなう効果を表す軸であると考えることができる．

また，前節で述べた在庫問題で考えるならば，横軸は在庫管理のための努力軸，縦軸はコストという意味での効果軸になっていると考える．

ところで，われわれは ABC 分析における区分法として，図3で斜線を施した3つの長方形の面積が，いずれも等しくなるようにするのがよいと考える．このような区分法を，等積法とよぶ．

努力配分の問題において，等積法による区分のし方がよいと考えるのは，それが，上で述べた意味で，

$$[効果] \times [努力]$$

をバランスさせる方法だからである．

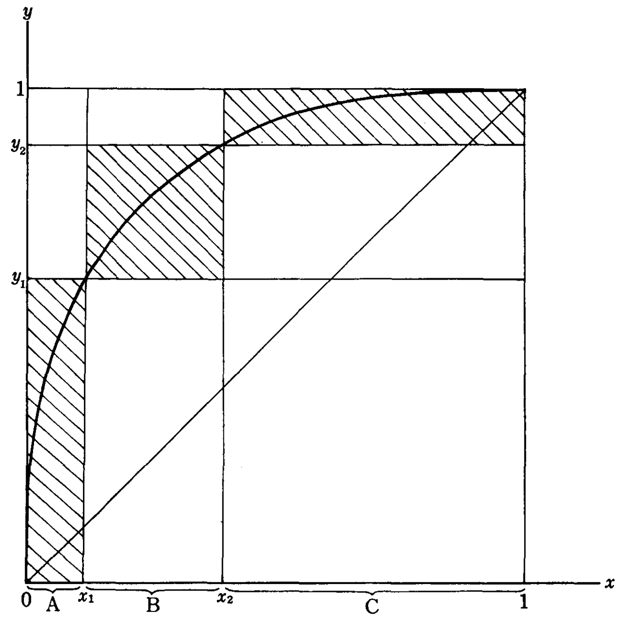

図3　等積法での3分

さて，このような区分法による場合，具体的には図3で，

$$x_1y_1=(x_2-x_1)(y_2-y_1)=(1-x_2)(1-y_2)$$

となる区分点 x_1, x_2 を求めて，

$(0, x_1)$ を A,　　(x_1, x_2) を B,　　$(x_2, 1)$ を C

表1　対数正規分布規準のときの第1区分点

σ の値	x の値	y の値	σ の値	x の値	y の値
0.1	0.315	0.352	1.8	0.087	0.671
0.2	0.298	0.370	1.9	0.079	0.688
0.3	0.280	0.389	2.0	0.072	0.704
0.4	0.264	0.408	2.1	0.065	0.720
0.5	0.247	0.427	2.2	0.058	0.735
0.6	0.232	0.447	2.3	0.052	0.750
0.7	0.216	0.466	2.4	0.047	0.765
0.8	0.202	0.486	2.5	0.042	0.779
0.9	0.187	0.505	2.6	0.037	0.792
1.0	0.174	0.524	2.7	0.033	0.805
1.1	0.161	0.543	2.8	0.029	0.817
1.2	0.149	0.562	2.9	0.026	0.829
1.3	0.137	0.581	3.0	0.022	0.840
1.4	0.126	0.600	3.5	0.011	0.889
1.5	0.115	0.618	4.0	0.005	0.925
1.6	0.105	0.636	4.5	0.002	0.952
1.7	0.096	0.654	5.0	0.001	0.970

とすることになる．このような x_1, x_2 のことを，それぞれ第1区分点，第2区分点とよぶ．そこで，これらの区分点を手早く求める方法を考えたいのであるが，そのためにまず，対数正規分布を規準にして，区分線を設定することを考える．

対数正規分布のパレート曲線は，対角線 $x+y=1$（以下，対角線といえば，いつもこの方をさすものとする）に関して対称な曲線で，ふくらみ最大の点が対角線上にくることは，よく知られている [2].

いま，確率変数 T が，次の確率密度関数をもつ対数正規分布に従うものとする．

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma t}\exp\left(-\frac{(\log t)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2.1}$$

ここで，σ をいろいろ動かしてパレート図を書き，等積法による第1区分点を計算すると，表1のようになる．

（注） (2.1) 式は，より一般的には

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma t}\exp\left(-\frac{(\log t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

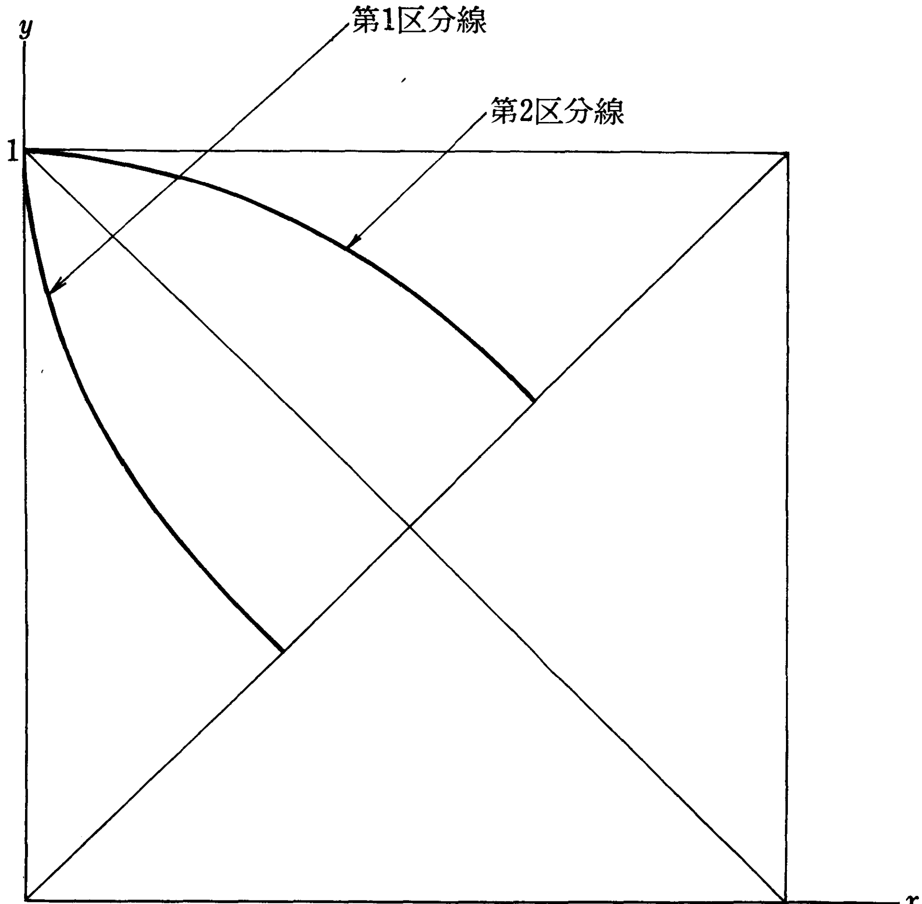

図4 対数正規分布規準の区分線

と書かれるべきであるが，対数正規分布のパレート図は，パラメータ μ に依存しないので，(2.1) 式のようにおいた．

表1をつかって，図4の第1区分線が書ける．図4の第2区分線は，対角線に関して，第1区分線と対称な曲線である．

この区分線を用いて，次のように区分点を定める．それには予め第1区分線，第2区分線を書き込んだ方眼紙を用意しておく．この方眼紙の上に，データから得られるパレート曲線（実際には折れ線）を書く．パレート曲線のふくらみ最大の点が対角線に近いところにくるときには，この曲線と第1区分線，第2区分線との交点の座標を読んで，それを第1区分点，第2区分点とすればよい．しかし，ふくらみ最大の点が，対角線の右上にくるとか，左下にくるときには，次のように扱う．

まず，右上にくる場合を考える．そのために，ガンマ分布やワイブル分布を規準にした区分線について調べてみる．

（注） これらの分布に対するパレート曲線は，ふくらみ最大の点が，対角線の右上にくる．このことについては，文献 [13] を参照されたい．

確率密度関数が (1.4) 式や (1.5) 式で表される，これらの分布に対して，等積法での区分点を算出すると，表2のようになる．

表2 ガンマ分布，ワイブル分布規準のときの区分点

ガンマ型					ワイブル型				
k の値	第1区分点		第2区分点		m の値	第1区分点		第2区分点	
	x の値	y の値	x の値	y の値		x の値	y の値	x の値	y の値
0.1	0.061	0.665	0.200	0.951	0.1	0.002	0.947	0.027	0.999
0.2	0.094	0.619	0.283	0.922	0.2	0.022	0.813	0.125	0.980
0.4	0.133	0.567	0.370	0.883	0.4	0.082	0.660	0.284	0.926
0.6	0.157	0.536	0.417	0.857	0.6	0.129	0.580	0.376	0.882
0.8	0.174	0.515	0.449	0.840	0.8	0.162	0.532	0.432	0.849
1.0	0.187	0.500	0.471	0.826	1.0	0.187	0.500	0.471	0.826
1.5	0.208	0.473	0.507	0.802	1.5	0.225	0.451	0.528	0.786
2.0	0.222	0.457	0.529	0.787	2.0	0.248	0.425	0.560	0.763
2.5	0.233	0.446	0.544	0.775	2.5	0.263	0.409	0.580	0.747
3.0	0.240	0.436	0.555	0.767	3.0	0.274	0.398	0.594	0.736
3.5	0.247	0.430	0.564	0.760	3.5	0.281	0.388	0.603	0.727
4.0	0.252	0.424	0.571	0.755	4.0	0.287	0.382	0.611	0.720
4.5	0.256	0.419	0.577	0.750	4.5	0.292	0.377	0.617	0.715
5.0	0.259	0.414	0.581	0.746	5.0	0.296	0.373	0.622	0.711

表2にもとづいて，図5のような区分線が書ける．

図5によれば，ワイブル分布を規準にしたときと，ガンマ分布の場合とでは，第1区分線に多少のズレがみられる．しかし，いずれの分布に対しても，第2区分線はたいへんよくそろっている．しかも，対数正規分布を規準にした第2区分線とも，あまり大きなくい違いがみられない．

そこで，データから書かれたパレート曲線のふくらみ最大の点が，対角線の右上にくるようなときには，図4の第2区分線を用いて，はじめに第2区分点を定め，ついで第1区分点を作

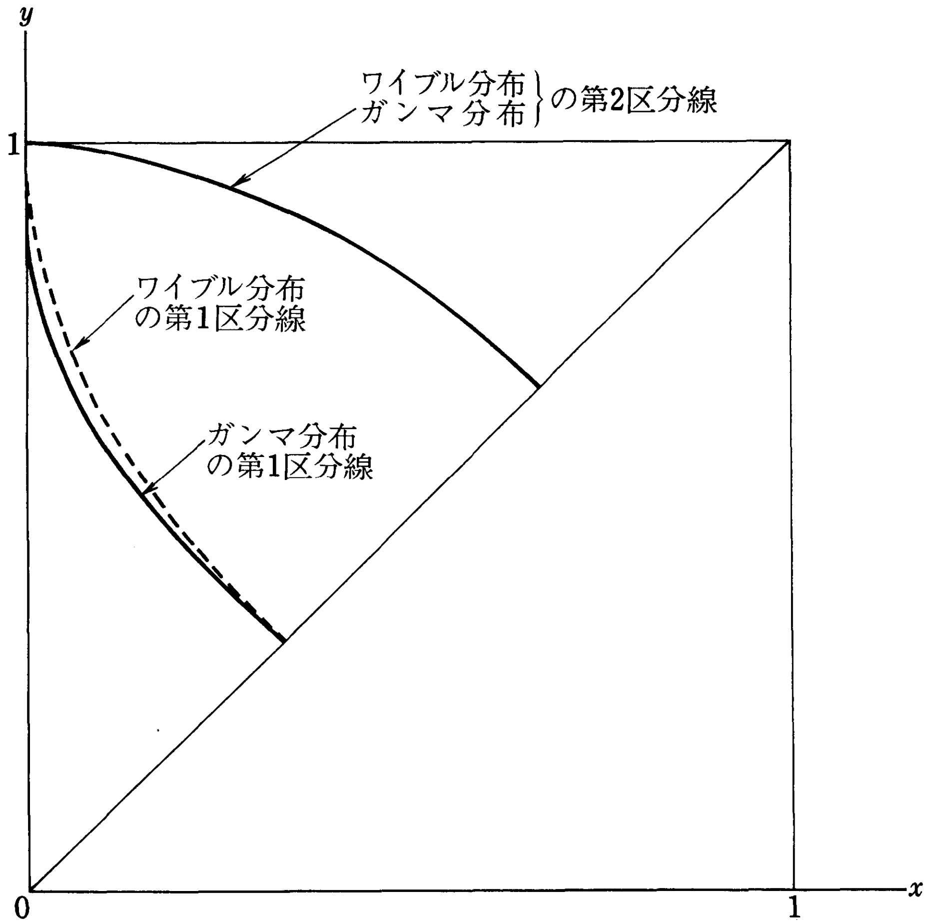

図5 ガンマ分布，ワイブル分布規準のときの区分線

図によって求めるのがよいと考える．

図6は，その手順を示している．

すなわち，この方眼紙に，データから得られるパレート曲線を書く．この曲線と，第2区分線との交点 P_2 の横座標が第2区分点である．つぎに，第1区分点を求めるために，点 P_2 から x 軸，y 軸に垂線を下す．それらの足を Q，R とする．Q，R を結ぶ線分とパレート曲線との交点 P_1 の横座標 x_1 を第1区分点とすればよい．

一方，ふくらみ最大の点が，対角線の左下にくるようなときには，どうしたらよいかを考えるために，パレート分布を規準にした区分線を考えてみる．

（注） パレート分布は，そのパレート図のふくらみ最大の点が，対角線の左下にくる典型的な分布である．(⇒補遺参照)

そのためにいま，確率変数 T が，次の確率密度関数をもつパレート分布に従うものとしてみよう．

(2.2) $$f(t)=\left(\frac{a}{t}\right)^{a+1} \qquad (a>1,\ t>a)$$

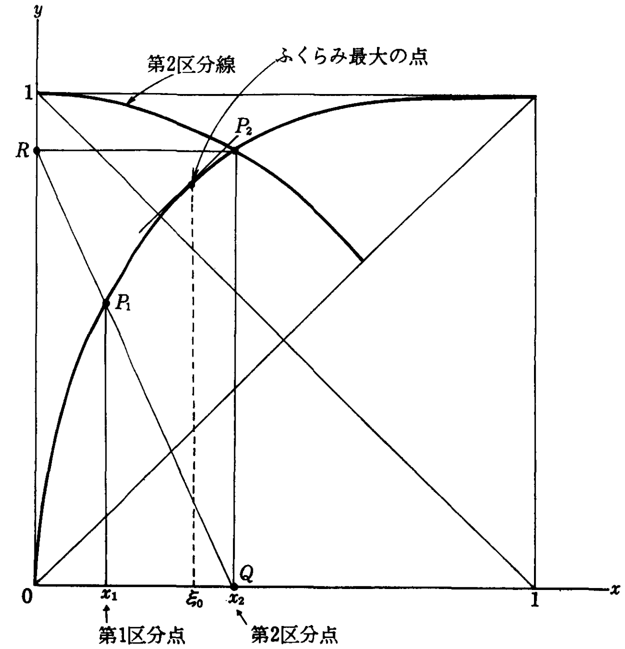

図6　作図による第1区分点の求め方

表3　パレート分布規準のときの区分点

a の値	第 1 区 分 点		第 2 区 分 点	
	x の 値	y の 値	x の 値	y の 値
1.1	0.062	0.777	0.399	0.920
1.2	0.100	0.681	0.451	0.876
1.3	0.128	0.622	0.484	0.846
1.4	0.149	0.581	0.507	0.824
1.5	0.167	0.550	0.525	0.807
1.6	0.181	0.527	0.539	0.793
1.7	0.193	0.508	0.550	0.782
1.8	0.203	0.492	0.560	0.773
1.9	0.212	0.480	0.568	0.765
2.0	0.220	0.469	0.575	0.758
2.5	0.247	0.432	0.598	0.735
3.0	0.263	0.411	0.612	0.721
3.5	0.275	0.397	0.621	0.712
4.0	0.283	0.388	0.628	0.705
4.5	0.289	0.381	0.633	0.701

この分布に対応するパレート曲線に関して，等積法での区分点を算出すると，表3のようになる．

これにもとづいて，図5を書いたのと同じ手順で区分線を書いてみると，その第1区分線は，対数正規分布を規準にした図4の第1区分線と，よくそろっている．そこで，データから書かれたパレート曲線のふくらみ最大の点が，対角線の左下にくるようなときには，図4の第1区

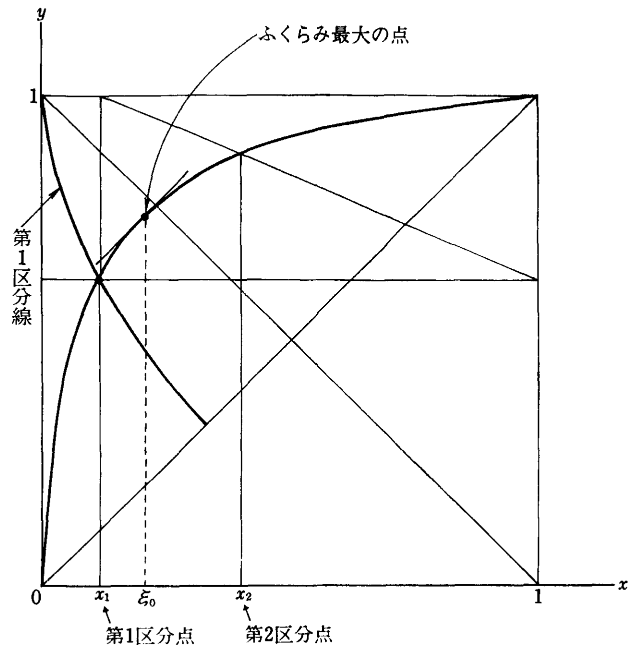

図7 作図による第2区分点の求め方

分線を用いて，はじめに第1区分点を定め，ついで第2区分点を作図により求めるのがよいと考える．

図7は，その手順を示している．

以上により，いずれの場合にも，対数正規分布を規準にして区分線が書き込まれている図4のような方眼紙を用意しておくならば，ABC分析における，等積法での区分点を容易に定めることができて，都合がよいと考える．

要　　約

以上を要約すると，次のようである．

ABC分析での区分点を定めるにあたり，はじめに対数正規分布を規準にして，第1区分線，第2区分線を書きいれた方眼紙を用意しておく．データからパレート曲線を書いたとき，ふくらみ最大の点が，対角線の右上にくるようであれば，まず第2区分線を用いて第2区分点を定め，次に作図により第1区分点を定める．また，ふくらみ最大の点が対角線の左下にくるときには，まず第1区分線を用いて第1区分点を定め，次に作図により第2区分点を定める．

このようにして区分点を定めると都合がよいと考える根拠は，たとえばふくらみ最大の点が対角線の右上にくる場合は，ガンマ分布やワイブル分布を規準にしたときの区分点を考慮しているからである．もちろん，右上にくる場合の理論分布としては，ガンマ分布やワイブル分布だけでなく，それ以外にもいろいろ考えられるし，左下にくる場合についても，パレート分布だけでなく，いろいろな分布が考えられる．しかし，区分点を設定するという観点からすれば，その他の分布を規準にしても，実用上はあまり大きなくい違いはでないといってよいであろう．

このような意味で，上述の区分法のチェックを行うのに，ふつうによく用いられているガン

マ分布，ワイブル分布，パレート分布をとりあげたわけである．

謝　　辞

査読者の方々から，ご懇篤な助言をいただき，小論を修正することができた．あつく感謝の意を表したい．

補遺　パレート分布のパレート曲線

確率密度関数が

$$f(t)=\left(\frac{a}{t}\right)^{a+1} \qquad (a>1,\ t>a)$$

で表されるパレート分布を考えると，パレート曲線は

$$y=x^{(a-1)/a}$$

になる．

ふくらみ最大の点の横座標 ξ_0 は，

$$\frac{dy}{dx}=1$$

を満足する x の値として求められ，

$$\xi_0=\left(1-\frac{1}{a}\right)^{a}$$

また，このときの y 座標は

$$\eta_0=\left(1-\frac{1}{a}\right)^{a-1}$$

になる．

一方，対角線とパレート曲線との交点の縦座標 η_1 は

$$1-y=y^{a/(a-1)}$$

の解である．そこで，

$$\varphi(y)=1-y-y^{a/(a-1)}$$

とおくと，

$$\varphi(\eta_0)>0,\quad \varphi(\eta_1)=0$$

よって，

$$\varphi(\eta_0)>\varphi(\eta_1)$$

しかるに，$\varphi(y)$ は y についての減少関数であるから，

$$\eta_0<\eta_1$$

このことは，パレート分布のパレート曲線のふくらみ最大の点が，対角線の左下にくることを示している．

参考文献

[1] Juran, J.M. (1951). *Quality Control Handbook*, McGraw-Hill.

[2] Aitchson, J. and Brown, J.A.C. (1957). *The Lognormal Distribution*, Cambridge University Press.

[3] 田口時夫 (1964). パレート分布とパレート曲線の分析, 統計数理研究所彙報, **12**, 293-313.

[4] 日本工業標準調査会 (1967). オペレーションズ・リサーチ用語 JIS Z 8121, 日本規格協会.

[5] Taguchi, T. (1968). Concentration-curve methods and structures of skew populations, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **20**, 107–137.

[6] Atkinson, A.B. (1970). On the measurement of inequality, *Journal of Economic Theory*, **2**, 244–263.

[7] Fellman, J. (1976). The effect of transformation on Lorenz curves, *Econometrica*, **44**, 823–824.

[8] Reuter, V.G. (1976). ABC method, *Journal of Systems Management*, 26–33.

[9] Herron, D. (1976). Industrial engineering applications of ABC curves, *AIIE Transactions*, **8**, 210–218.

[10] 牧野都治 (1976). 待ち行列タイプの問題に対するパレート分析, 統計数理研究所彙報, **22**, 129-134.

[11] Kakwani, N.C. (1977). Applications of Lorenz curves in economic analysis, *Econometrica*, **45**, 719–727.

[12] 豊田 敬, 和合 肇 (1978). 所得不平等の計測, 国民経済, 29巻4号, 361-371.

[13] 牧野都治 (1979). 分布の特性の表現に対するパレート図の利用について, 統計数理研究所彙報, **26**, 1-9.

[14] 寺崎康博 (1980). 規模別所得分布の不平等尺度, 日本統計学会誌, **10**, 93-126.

Design of Classification in the ABC Analysis

Toji Makino
(Science University of Tokyo)

The ABC analysis is widely used as a technique to allocate the effort in the field of Operations Research, for example, in the field of Inventory Control.

We draw the Pareto's curve taking as x-axis the accumulated percentage of items and as y-axis the accumulated percentage of costs.

It must be noted that the Pareto's curve is essentially identical with the Lorenz' curve. But there is a little difference between the two curves. Though the Pareto's curve is obtained by accumulating in descending order of values, the Lorenz' curve is obtained by accumulating in ascending order.

In ABC analysis, using the Pareto's curve we decide how to control A, B and C classes as the items corresponding to segment that shows a rapid rate of increase on the curve.

The characteristics of the Lorenz' curve have been investigated by many researchers. However, a few reports of research for the theory of ABC analysis have been published so far. Especially, the study concerned with the way to classify x-axis into A, B and C in the ABC analysis have not been published.

In this paper we investigate the method for the classification in the ABC analysis.