統計数理研究所彙報
第29巻 第1号 (1981)

信頼性試験における寿命試験抜取方式とパラメータ推定

統計数理研究所 鎌 倉 稔 成

(1981年5月 受付)

1. はじめに

抜取検査は出荷検査や受入検査などにおいて，検査が破壊検査になったり，検査対象が連続体であったりして全部を調査することが不可能な場合に用いられる．特に，寿命試験のように本質的に破壊試験となる試験では全数検査が不可能のため，ロットより試料を抜き出して試験する抜取検査が行なわれる．

ロットの良否に関する判定は抽出するサンプル数が多いほど確かなものとなるが，検査費用が増大するのでいたずらにサンプル数を増やすことは好ましくない．また，アイテム一つあたりの検査費用があまり高くない場合でも，時間とともに故障率の増加する IFR 型のロットであれば，試験中に故障率が増加し，試験後の使用には新品同様の性能が期待できなくなってしまう．従って，検査費用の立場からも，検査時間の立場からも，サンプル数はできるだけ少なくして効率の良い検査を行ないたい．

抜取検査には計数データをもとにして判定する計数抜取検査と計量データに基づいて判定する計量抜取検査がある．一般に，計数データは計量データに比べて情報量が少なく，計量値を利用した検査と同程度にまで生産者危険，消費者危険を押えるためには膨大なサンプルを必要とする．しかし，計数抜取検査では go-no-go ゲージなどを用いての合格，不合格の判定で済み手間がかからず非常に簡単であるというメリットを持っている．また，検査の自動化（大きさ n のサンプルを T 時間テストして，その T の時点で故障した数のみを観測すれば良い）も可能となる．もし，計数値のデータを扱いながら，検査に必要なサンプル数が計量値のそれと比べてあまり多くならない検査方式があれば，非常に経済的な検査であると言えよう．

これに対する一つの解答として圧縮限界法がある．圧縮限界法は計数抜取検査の効率を上げる一つの方法で，規格値を厳しくすることによってみかけ上の不良率を増やしてサンプル数の削減を図る．危険率一定のもとでサンプル数を最小ならしめる検査上の規格値は実際の規格値よりも厳しいところ（圧縮されたところ）になることが証明されている（赤尾 [1]，真壁 [2]）．

本論文2節で定時打切試験による計数1回規準型抜取検査の場合について，ロットがワイブル分布に従うという仮定のもとでサンプル数を最も少なくする打切時間を導き出し，非打切試験の場合と比較する．

3節では，定数打切試験に基づくある特定のロットの平均寿命の推定値の分散と打切個数及び平均試験時間の間の関係について考察を与え，打切個数を決定するための新しい基準を提案する．

2. 最適な定時打切試験

2.1 最適打切時間の近似計算法

本節では取替のない定時打切試験による計数1回規準型抜取検査において，生産者危険，消

費者危険を一定にしたままで，サンプル数を最小にする最適打切時間を求める．最適打切時間と圧縮限界とは意味は異なっても数学的には同一の議論で導くことができる．

ここで取扱う特性値はワイブル分布，

$$f(x)=\begin{cases}\lambda m\,x^{m-1}\,e^{-\lambda x^{m}} & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \tag{2.1}$$

に従い，λ は未知，m は既知 ($m\geqq 1$) であるものとする．この分布の平均寿命 μ は

$$\mu=\lambda^{-1/m}\,\Gamma\,(1+1/m) \tag{2.2}$$

で与えられ，ここではこの平均寿命を基準としてロットの良否を判定する．つまり，平均寿命が μ_1 以上のロットは $1-\alpha$ 以上の確率で合格とし，μ_2 以下のロットは β 以下の確率で合格とする抜取方式を考える．今，m は既知であり，平均寿命 μ は (2.2) により λ の単調減少関数であるので限界平均寿命 μ_1, μ_2 に対応して λ_1, λ_2 が決まり，ロットの合格，不合格はこの λ_1, λ_2 を基準にして考えれば良い．

生産者危険，消費者危険をそれぞれ α, β 以下にする抜取方式は

$$\sum_{k=0}^{c}\binom{n}{k}p_1^{\,k}\,(1-p_1)^{n-k}\geqq 1-\alpha \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=0}^{c}\binom{n}{k}p_2^{\,k}\,(1-p_2)^{n-k}\leqq \beta \tag{2.4}$$

を満足する n, c の組みとして与えられる．ただし，p_1, p_2 はそれぞれ，打切時間を T としたときのパラメータ λ_1, λ_2 に対応する不良率として，

$$p_1=1-e^{-\lambda_1 T^{m}} \tag{2.5}$$

$$p_2=1-e^{-\lambda_2 T^{m}} \tag{2.6}$$

で定義される．圧縮限界の問題では p_1, p_2 は他の関数になる（詳しくは真壁 [5]）．与えられた T のもとで (2.4) を満たす最小のサンプル数 n に対しては近似的に等号が成立しているものと考えられるから，n を最小とする T を求めるには，等号制約下で n を最小とする T を求めれば良い．Lagrange の乗数法による近似解法を試みる．

形状母数 m は既知であるので，

$$T^{m}=T' \tag{2.7}$$

と置いて最適な T' を求める．従って問題は，

$$I=n+s_1 f_1+s_2 f_2 \tag{2.8}$$

として，$f_1=0$, $f_2=0$ のもとで I の停留点を調べることになる．ただし，s_1, s_2 は Lagrange の未定乗数で，また f_1 と f_2 は，

$$f_1=\sum_{k=0}^{c}\binom{n}{k}p_1^{\,c}\,(1-p_1)^{n-c}-(1-\alpha) \tag{2.9}$$

$$f_2=\sum_{k=0}^{c}\binom{n}{k}p_2^{\,c}\,(1-p_2)^{n-c}-\beta \tag{2.10}$$

である．つまり，

$$\frac{\partial I}{\partial n}=\frac{\partial I}{\partial T'}=\frac{\partial I}{\partial c}=0 \tag{2.11}$$

$$f_1=0 \tag{2.12}$$

$$f_2=0 \tag{2.13}$$

を解けば良い．(2.11) の第2式より

$$-\frac{\partial I}{\partial T'}=s_1 n\binom{n-1}{c}p_1{}^c(1-p_1)^{n-c-1}\frac{\partial p_1}{\partial T'} + s_2 n\binom{n-1}{c}p_2{}^c(1-p_2)^{n-c-1}\frac{\partial p_2}{\partial T'}=0 \tag{2.14}$$

また，(2.5)，(2.6)，(2.7) より

$$\frac{\partial p_1}{\partial T'}=\lambda_1 e^{-\lambda_1 T'} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial T'}=\lambda_2 e^{-\lambda_2 T'} \tag{2.16}$$

さらに，(2.11) の第3式より，

$$\frac{\partial I}{\partial c}=s_1\binom{n}{c+\frac{1}{2}}p_1{}^{c+1/2}(1-p_1)^{n-c-1/2} + s_2\binom{n}{c+\frac{1}{2}}p_2{}^{c+1/2}(1-p_2)^{n-c-1/2}=0 \tag{2.17}$$

を得る．ただし (2.17) の偏微分は近似的に階差でおきかえ補正したものであり，二項係数はガンマ関数で定義されるものとする．ここで (2.14)～(2.17) を利用して最適な T' が満足する式を導くと，

$$\lambda_2 e^{-\lambda_2 T'}=\sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{p_1(1-p_1)}}\,\lambda_1 e^{-\lambda_1 T'} \tag{2.18}$$

となる．さらに (2.5)～(2.7) を (2.18) に代入して整理すると次式が得られる．

$$\frac{\lambda_1{}^2 e^{-\lambda_1 T^m}}{1-e^{-\lambda_1 T^m}}=\frac{\lambda_2{}^2 e^{-\lambda_2 T^m}}{1-e^{-\lambda_2 T^m}} \tag{2.19}$$

(2.19) を

$$\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 T'}}{1-e^{-\lambda_1 T'}}\Bigg/\frac{\lambda_2 e^{-\lambda_2 T'}}{1-e^{-\lambda_2 T'}}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{2.20}$$

のように表現すれば，それぞれ，パラメータ λ_1, λ_2 を持つ切断された指数分布の打切時における密度の比が λ_2/λ_1 となるようにすれば良いことが分る．上式が T' について解ければ良いがこれ以上簡単にはならないので数値計算によって解を求める．

まず，(2.20) を満足する T' が実際どの程度の精度なのかを見ることにしよう．(2.5)，(2.6) により p_1，p_2 は判別比 λ_2/λ_1 と $\lambda_1 T'$ ($T'=T^m$) によって決定されてしまうので，n，c も判別比と $\lambda_1 T'$ によって決まる．ここでは一例として $\lambda_2/\lambda_1=3.0$ の場合について $\lambda_1 T'$ を横軸に，(2.3)，(2.4) 式を満足する最小の n を縦軸に取ったグラフを図1に示す．(2.20) による近似解法から求めた最適な $\lambda_1 T'$ は 0.864 である．他方，図1で n を最小にする $\lambda_1 T'$ は 0.6 から 0.95 の間に存在し，またそれに対応する n も 12 で近似解法の $\lambda_1 T'$ に対応する 14 と比較して実用上最適な T は (2.20) の解で十分であることが分る．もちろん，所定の判別比に対する最適な $\lambda_1 T'$ を直接計算で正確に求めることも可能であるが計算量が膨大となるため実用的でない．

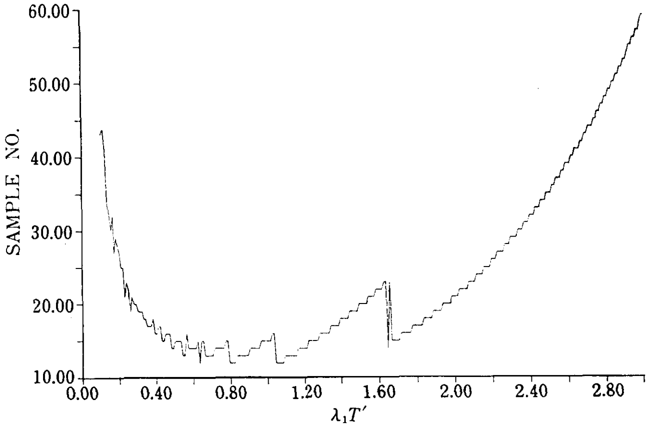

図 1.　打切時間とサンプル数

表 1.　判別比と最適打切時間

λ_2/λ_1	$\lambda_1 T_0'$	λ_2/λ_1	$\lambda_1 T_0'$	λ_2/λ_1	$\lambda_1 T_0'$	λ_2/λ_1	$\lambda_1 T_0'$
1.1	1.521	2.1	1.068	3.1	0.847	4.1	0.710
1.2	1.451	2.2	1.040	3.2	0.830	4.2	0.699
1.3	1.393	2.3	1.013	3.3	0.815	4.3	0.699
1.4	1.339	2.4	0.988	3.4	0.799	4.4	0.679
1.5	1.290	2.5	0.964	3.5	0.785	4.5	0.669
1.6	1.245	2.6	0.942	3.6	0.771	4.6	0.659
1.7	1.204	2.7	0.921	3.7	0.758	4.7	0.650
1.8	1.166	2.8	0.901	3.8	0.745	4.8	0.641
1.9	1.131	2.9	0.882	3.9	0.733	4.9	0.633
2.0	1.099	3.0	0.864	4.0	0.721	5.0	0.624

次に，判別比 λ_2/λ_1 の種々の場合について (2.20) により求めた T' の解 T_0' を示すことにする．T_0' は λ_1，λ_2 の値によって異なるが，判別比が一定のとき $\lambda_1 T_0'$ は一定となる ((2.20) より明らか) ので，表1には判別比を変化させたときの $\lambda_1 T_0'$ の値を示した．たとえば，$\lambda_1=0.1$，$\lambda_2=0.2$ のときには，判別比は2となり，表1より $\lambda_1 T_0'=1.099$ が得られ，最適打切時間は $m=1$ のとき 1.099，$m=2$，$m=3$ の場合はそれぞれ 3.32，2.22 となる．

2.2　サンプル数と合格判定個数の近似計算法

実際に検査をするためには打切時間の他にサンプル数 n と合格判定個数 c が与えられなければならない．これは表1に与えられる $\lambda_1 T_0'$ を (2.5)，(2.6) に代入して p_1，p_2 を求め，(2.3)，(2.4) を満足するように n，c を決定すれば良い．この結果を表2に示す．

最適な打切時間に対応する p_1，p_2 は値が大きく，計数1回抜取検査図 (JIS Z 9002 [6]) からは求まらない．従って，実際に (2.3)，(2.4) を解くことが要求されるが，n が大きいと

ころでは正規近似によって求める方が簡単である．以下に正規近似の方法を述べる．

標準正規分布の下側 100γ パーセント点を u_γ とすると，(2.3)，(2.4) で等号が成立する場合，それぞれに対応して，

$$\frac{c-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}=u_{1-\alpha} \tag{2.21}$$

$$\frac{c-np_2}{\sqrt{np_2(1-p_2)}}=u_\beta \tag{2.22}$$

が得られ，これを n について解くと，

表 2. サンプル数 n と合格判定個数 c ($\alpha=0.05,\ \beta=0.1$)

λ_2/λ_1	n	c	λ_2/λ_1	n	c
1.5	84	67	2.5	18	14
1.6	64	51	2.6	18	14
1.7	49	39	2.7	17	13
1.8	39	31	2.8	14	11
1.9	34	27	2.9	13	10
2.0	29	23	3.0	13	10
2.1	28	22	3.1	13	10
2.2	24	19	3.2	13	10
2.3	23	18	3.3	12	9
2.4	19	15	3.4	12	9

$$n=\frac{p_1(1-p_1)}{(p_2-p_1)^2}\left\{u_{1-\alpha}-\sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{p_1(1-p_1)}}\,u_\beta\right\}^2 \tag{2.23}$$

となる．さらに (2.23) に (2.5)，(2.6)，(2.18) の関係を代入して整理すると，

$$n=\frac{e^{-\lambda_1T_0'}-1}{\{1-e^{-(\rho-1)\lambda_1T_0'}\}^2}\{u_\alpha-\rho u_\beta e^{-(\rho-1)\lambda_1T_0'}\}^2 \tag{2.24}$$

が得られる．ただし，$\rho=\lambda_2/\lambda_1$ とした．また，c に関しては (2.24) で求められた n を (2.21) に代入して

$$c=\sqrt{np_1(1-p_1)}\cdot u_{1-\alpha}+np_1 \tag{2.25}$$

となる．特にこの正規近似は判別比が小さいところで有効である．

2.3 非打切試験の場合との比較

本節では，2.1 節で定義した最適打切時間を用いた定時打切試験と，すべてのサンプルが寿命に達するまで試験する非打切試験との比較を行なう．

非打切試験は，n 個のサンプル中 r 個の故障データが得られたら中途打切をしてロットの合否を判定する検査の $r=n$ という特別の場合である．まずサンプル数の比較を行なうが m が既知であるので $m=1$ の場合に限って議論すれば十分である ($m\neq1$ の場合は $Y=X^m$ と変換すれば同一の議論となる)．

(2.1) のワイブル分布において $m=1$，$\theta=1/\lambda$ として n 個中の故障データが

$$X_{1:n}\leqq X_{2:n}\leqq\cdots\leqq X_{r:n}$$

のように得られたとする．このとき θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ は，取替がないことを仮定して，

$$\hat{\theta}=\frac{1}{r}\left\{\sum_{i=1}^{r}X_{i:n}+(n-r)X_{r:n}\right\} \tag{2.26}$$

で与えられる．この $\hat{\theta}$ を利用して，

$$\hat{\theta}\geqq d=\frac{(1/\lambda_1)\,\chi^2_{1-\alpha:2r}}{2r} \tag{2.27}$$

ならばロットを合格とし，$\hat{\theta}<d$ ならば不合格とする．ただし，$\chi^2_{1-\alpha:2r}$ は自由度 $2r$ の χ^2 分布

の上側 $100(1-\alpha)$ パーセント点で，r は

(2.28) $$\chi^2_{1-\alpha:2r}/\chi^2_{\beta:2r} \geqq \lambda_1/\lambda_2$$

を満足する最小の整数であることが知られている ([2]).

最初に，2.1 節で導いた近似的最適打切時間による定時打切試験に必要なサンプル数 n_1 と，個々の寿命値の計量データを利用した非打切試験に必要なサンプル数 n_2 の比較を行なう．この結果を図2に実線で示す．図は横軸に λ_2/λ_1 を取り，縦軸に n_1 と n_2 の比を取ったものである．ただし，生産者危険を $\alpha=0.05$，消費者危険を $\beta=0.1$ としてある．この図より，最適な定時打切試験では，サンプル数は，非打切試験のそれと比べて高々2倍で済むことが分る．つまり，ある一定の時間までに故障した計数値のデータを利用しても最適な打切時間を選べば，計量値のデータを利用した試験に比べてサンプル数はさほど多くならなくて済むのである．

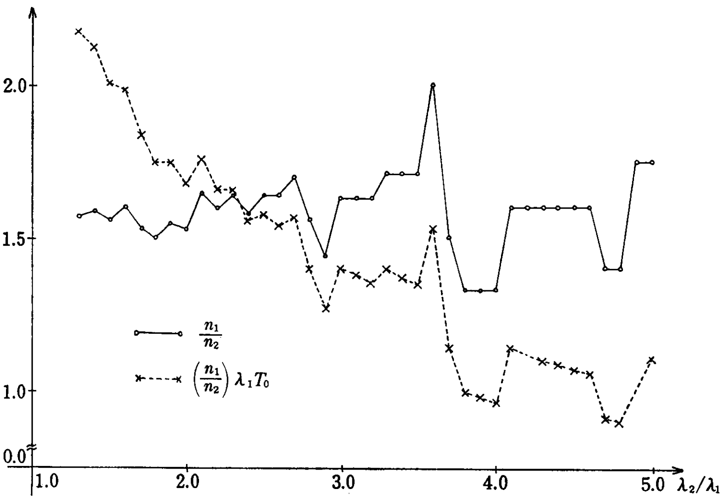

図 2 非打切試験との比較

次に，延べ試験時間について両試験方法の比較をする．m が1以外の場合については比較が困難であるのでここでは指数分布の場合に限って議論する．

定時打切試験の場合，延べ試験時間 S_1 はある確率分布に従って変動する確率変数となるが，扱いが簡単ではないので，

(2.29) $$\mathrm{E}\,(S_1) \leqq n_1 T_0$$

で評価することにする．T_0 は T_0' において $m=1$ とした場合，つまり $T_0=T_0'$ である．他方，非打切方式における延べ試験時間 S_2 は

(2.30) $$S_2=\sum_{i=1}^{n_2} X_{i:n_2}$$

で表わされる．$2\lambda S_2$ は自由度 $2n_2$ の χ^2 分布に従うのでその期待値は $2n_2$，従って

(2.31) $$\mathrm{E}\,(S_2)=n_2/\lambda$$

となる．(2.29)，(2.31) より

(2.32)
$$\frac{\mathrm{E}\ (S_1)}{\mathrm{E}\ (S_2)} \leqq \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \lambda T_0$$

を得るが，この式の右辺の計算結果を示したのが図2の破線である．ただし，実際には λ は未知であるので評価はむずかしいが，ここでは工程が安定しており，良いロット $(\lambda \leqq \lambda_1)$ に関心があるとすれば，(2.32) の右辺を最大にする λ，つまり $\lambda=\lambda_1$ で評価すれば良いことになる．この結果から，最適打切時間を用いた定時打切試験による延べ試験時間は非打切試験のそれと比較して，良いロットの場合には2倍前後で済み，あまり悪くないことが分る．また，この評価は (2.29) の示すように平均延べ試験時間の過大評価となっており，実際には，もっと非打切試験の平均延べ試験時間に近いことが期待される．

本節では，ある一定時間内に故障したアイテムの数からロットの良否の判定のできる計数型の定時打切試験でも，適切に打切時間を取れば，十分に効率の良い判定ができることを示した．

3. 定数打切試験による平均寿命推定

前節まで信頼性試験における抜取試験についての問題を議論してきたが，本節では，検査によって受入れられた特定のロットについて平均寿命を推定する問題を考える．試験の方式は n 個のアイテムのうち，故障数が r 個になったら中途打切をして平均寿命を推定する定数打切試験とする．その際，打切個数 r を一定にしたままでサンプル数 n を変動させて平均試験時間を調べると，指数分布では，Epstein and Sobel [3] によって n を r より大きく取れば極度に試験時間の節約が可能であることが分っている．また，指数分布の場合について，推定値の精度，試験時間の制約のもとでの n，r の決め方が嶋田 [7] に見られる．ここでは，総試験個数 n が与えられた場合にどのように打切個数 r を取ったら良いかを，(2.1) のワイブル分布の場合について推定値の精度，及び，平均試験時間の立場から考察を与える．

まず，推定値の精度の立場から打切個数についての議論をする．n 個中 r 個の故障データが

$$X_{1:n} \leqq X_{2:n} \leqq \cdots \leqq X_{r:n}$$

として得られたとき，平均寿命の最小分散不偏推定量を求めると

(3.1)
$$\hat{\mu} = \frac{\Gamma(r)\,\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+r\right)} \left\{\sum_{i=1}^{r-1} X_{i:n}{}^{m} + (n-r+1)\,X_{r:n}{}^{m}\right\}^{1/m}$$

となる．また，この推定量の分散は

(3.2)
$$\mathrm{Var}\ (\hat{\mu}) = \lambda^{-2/m} \left\{\Gamma\left(\frac{1}{m}-1\right)\right\}^2 \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}+r\right)\Gamma(r)}{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{m}+r\right)\right\}^2} - 1\right]$$

で与えられる．ここでは推定値の変動係数（相対精度に相当）が δ 以下になるように r を決定することを考える．つまり，

(3.3)
$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}\ (\hat{\mu})}}{\mathrm{E}\ (\hat{\mu})} \leqq \delta$$

を満足するように r を決定するのである．(3.3) の左辺はこのままでは扱いにくいので n，r

を十分に大きくしてスターリングの近似式，

$$(3.4)\qquad \log \Gamma(p) \sim \left(p-\frac{1}{2}\right)\log p - p + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12p}$$

を用いて，

$$(3.5)\qquad \frac{\sqrt{\mathrm{Var}\ (\hat{\mu})}}{\mathrm{E}\ (\hat{\mu})} \sim \frac{1}{m}\sqrt{\frac{1}{r}}$$

で近似することにする．従って，

$$(3.6)\qquad r \geqq -\left[-\frac{1}{m^2\delta^2}\right]$$

ただし，[ ] はガウス記号である．

次に，(3.6) の右辺を r_0 と置き，$n>r_0$ を仮定して試験時間の短縮を考慮した最適打切個数を求めることにする．一般に，n を一定にしたままで打切個数を増すと，平均試験時間は増大する．他方，推定値の精度は打切個数の増加に伴って増すことが分る．従って，試験時間の節約の立場からはなるべく打切個数を少なく，つまり $r=r_0$ とすれば良いし，推定精度を上げるためには打切個数を多く，つまり $r=n$ とすれば良いということになる．我々はこの両者の立場を折衷するものとして，単位試験時間当りの精度（分散の逆数を精度と呼ぶ）を判断基準として，これを最大化するように r を決定する方式を提案する．つまり，

$$(3.7)\qquad V\ (r) = \frac{1}{\mathrm{Var}\ (\hat{\mu}_r)} \Big/ \mathrm{E}\ (X_{r:n})$$

を最大にするように，r $(r_0 \leqq r < n)$ を決めるのである．ただし，$\hat{\mu}_r$ は打切個数を r としたときの平均寿命の最小分散不偏推定量である．平均試験時間については，

$$(3.8)\qquad \mathrm{E}\ (X_{r:n}) = \frac{n!}{(r-1)!\ (n-r)!}\lambda^{-1/m}\,\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}(k+n-r+1)^{-(m+1)/m}$$

が成立するが，このままでは扱いにくいので次のように変形して近似を用い，漸近的に最適な((3.7) を最大にするという意味で) 打切個数を求めることにする．

$$(3.9)\qquad V\ (r) = \frac{1}{\mathrm{Var}\ (\hat{\mu}_{r_0})\ \mathrm{E}\ (X_{r_0:n})}\cdot\frac{\mathrm{Var}\ (\hat{\mu}_{r_0})}{\mathrm{Var}\ (\hat{\mu}_r)}\cdot\frac{\mathrm{E}\ (X_{r_0:n})}{\mathrm{E}\ (X_{r:n})}$$

分散比については (3.4) のスターリングの近似式を用いて，

$$(3.10)\qquad \frac{\mathrm{Var}\ (\hat{\mu}_{r_0})}{\mathrm{Var}\ (\hat{\mu}_r)} \sim \frac{r}{r_0}$$

が得られる．また，平均試験時間については $\lim\limits_{n,r\to\infty} r/n = \xi$ $(0<\xi<1)$ のとき，十分大きな n に対して

$$(3.11)\qquad \mathrm{E}\ (X_{r:n}) = G\left(\frac{r}{n+1}\right) + \frac{1}{2}G''\left(\frac{r}{n+1}\right)\mu_2(r,\ n) + O(n^{-1})$$

が成立する (Van Zwet [8])．ただし，$G(x)$ は X の分布関数の逆関数で，本論文ではワイブ

ル分布を扱っているので,

$$G(x)=\left\{-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right\}^{1/m} \tag{3.12}$$

となる. $\mu_2(r,\ n)$ はベーター分布 $B_{i:n}$ の平均値回りの二次のモーメントで,

$$\mu_2(r,\ n)=\frac{r(n+1-r)}{(n+1)^2(n+2)} \tag{3.13}$$

である. さらに, $\mathrm{E}(X_{r:n})=G(r/n)+O(n^{-1})$ も示されるので, ここでは第一項までの近似を用いて,

$$\frac{\mathrm{E}(X_{r_0:n})}{\mathrm{E}(X_{r:n})}\sim\left\{\frac{-\ln\left(1-\frac{r_0}{n}\right)}{-\ln\left(1-\frac{r}{n}\right)}\right\}^{1/m} \tag{3.14}$$

とする. (3.9), (3.10), (3.14) より,

$$V(r)\sim\frac{\left\{-\ln\left(1-\frac{r_0}{n}\right)\right\}^{1/m}}{\mathrm{Var}(\hat{\mu}_{r_0})\ \mathrm{E}(X_{r_0:n})\cdot r_0}\cdot\frac{r}{\left\{-\ln\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\}^{1/m}} \tag{3.15}$$

と近似できることが分る. 従って右辺を最大にするためには,

$$W(r)=\frac{1}{r}\left\{-\ln\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\}^{1/m} \tag{3.16}$$

と置いて $W(r)$ を最小にすれば良い.

$$\frac{dW(r)}{dr}=\frac{\left\{-\ln\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\}^{(1-m)/m}}{r^2}\left\{\frac{r}{m(n-r)}+\ln\left(1-\frac{r}{n}\right)\right\} \tag{3.17}$$

であるから, $W(r)$ は $m>1$ のとき唯一の極小値を持つことが分る. $r/n=\xi$ としたときの ξ についての解が表3である. よって $r_0/n=\xi_0$ とすれば, $\xi\leqq\xi_0$ のときには打切個数を r_0 とし, $\xi>\xi_0$ のときには, 打切個数を,

$$r=\left[n\xi+\frac{1}{2}\right] \tag{3.18}$$

とすると, $r_0\leqq r<n$ の範囲で漸近的に (3.7) を最大にするように打切個数が決められたことになる. ただし, $m=1$ のときには $dW(r)/dr>0$ であるので常に打切個数は r_0 となる.

以上のことを簡単な例で示すことにしよう. $m=2$ のワイブル型のロットで総試験個数が1,000個, 変動係数を0.02以下にしたい場合を考える. (3.6) より $r_0=625$ となる

表 3. 最適打切個数
($\xi=r/n$)

m	ξ	m	ξ	m	ξ
1.1	.171	2.1	.737	3.1	.858
1.2	.298	2.2	.757	3.2	.865
1.3	.396	2.3	.774	3.3	.871
1.4	.472	2.4	.789	3.4	.877
1.5	.534	2.5	.802	3.5	.882
1.6	.584	2.6	.814	3.6	.887
1.7	.625	2.7	.825	3.7	.892
1.8	.660	2.8	.834	3.8	.896
1.9	.690	2.9	.843	3.9	.900
2.0	.715	3.0	.851	4.0	.903

が，表3から $\xi=0.715$ となり，$\xi>\xi_0$ であるから最適打切個数としては715個が得られる．

4. むすび

本研究では，定時打切試験を用いた計数1回抜取検査において，圧縮限界法の場合と同様の考え方に基づいて危険率一定のもとでサンプル数が最小となる打切時間を導いた．その結果，最も情報を多く利用している非打切方式による計量抜取検査と比較してみると，サンプル数は高々2倍で済み，計数値のデータを利用しても打切時間を最適に取れば，十分に効率的な試験ができることが分った．計数型の定時打切試験では，ある一定時間内に故障した試料数さえ知れば良いので手間がかからず，非常に簡単であるというメリットを持っており，総合的な効率は計量抜取検査のそれを凌ぎ得るものである．

さらに，受入検査で受入れられたロットなど，ある特定のロットについて平均寿命を推定する問題を考え，定数打切試験における最適な打切個数を与えるための判断基準を提案し，サンプル数が大きいときに漸近的に最適となる打切個数決定のための表を与えた．

［注］ 本論文は [4] の一部を加筆，修正したものである．

謝辞　本研究をまとめるにあたり，いろいろ御助言下さった，東京工業大学，真壁　肇教授に深く感謝の意を表します．さらにレフリーの方々から適切なコメントをいただきました．ここに記して感謝致します．

参考文献

[1] 赤尾洋二 (1958). 圧縮限界を利用した母不良率の検定，品質管理，**9**, 54-62.
[2] 土肥清一，大津　亘，牛嶋昭資，徳竹茂男，山崎喜光共訳 (1960). DOD H108 寿命試験および信頼度試験のための抜取手順と抜取表，日本規格協会.
[3] Epstein, B. and Sobel, M. (1953). Life Testing, *J. Amer. Statist. Ass.*, **48**, 486–502.
[4] 鎌倉稔成，真壁　肇 (1980). 信頼性における検査と推定のためのいくつかの手法について，品質管理学会第17回研究発表会要旨集，33-36.
[5] 真壁　肇 (1962). 圧縮限界による計数規準型および両側規格値のある計量規準型抜取方式に関する考察，品質管理，第12回QC大会報文集，6-9.
[6] 日本工業標準調査会 (1956). 計数規準型一回抜取検査 (JIS Z 9002)，日本規格協会.
[7] 嶋田正三 (1964). 信頼性と寿命試験，日本科学技術連盟.
[8] Van Zwet, W. R. (1970). *Convex Transformations of Random Variables*, Mathematisch Centrum Amsterdam.

Life Test Sampling Plan and Parameter Estimation in the Reliability Test

Toshinari Kamakura
(The Institute of Statistical Mathematics)

In this article we consider the problem of sampling inspection by attribute under Type I censoring and the estimation of the expected life time under Type II censoring, where the life time is assumed to have Weibull distribution with known shape parameter m and unknown scale parameter θ ($\lambda=1/\theta$). First, we derive the optimal censoring time t, which minimizes sample size under given risks guided by a reasoning which is similar to that of compressed limit method, and then compare the sample size with that of sampling inspection by variable which uses complete sample. The comparison shows that the former is at most two times of the latter, which means that the optimal censoring time method is practically more efficient than the inspection-by-variable method, considering the cost of the inspection. Secondly, to design the Type II censoring we propose the ratio of the precision of the estimate to the expected waiting time as a criterion and give the table to derive the asymptotically optimal Type II censoring.