統計数理研究所彙報
第29巻 第1号 (1981)

決定問題におけるリグレット・レリーフ比基準の適用例

統計数理研究所 村 上 征 勝

(1980年1月 受付)

人間の意思決定行動は極めて広範囲に及び，かつ多種多様であるが，しかし合理性を第一義に考えるなら，そこに意思決定において規範となるべき幾つかの共通の基準が考えられる．優越性基準 (Dominance criterion) はそのような基準の一つである．優越性基準は消去法による決定方式選択の基準であり，一般にはこの基準だけで最適な決定方式を見い出すことは困難である．そのため，これまであまりその重要性は認識されていなかった．しかし，次節で述べるように，意思決定において（一個の）最適な決定方式より（複数個の）合理的な決定方式を見い出すことを重視する立場に立つとき，優越性基準は非常に重要な意味をもつ．

ここでは，優越性基準の一つとして [1], [2] で提案したリグレット・レリーフ比基準 (Regret-relief ratio criterion) の有効性や問題点を，主として幾何学的な面から検討する．

1. 人間の意思決定と優越性基準

統計的意思決定問題では，将来実現するある状態 $\theta\ (\in\Theta)$ において，いかなる行動 $a\ (\in A)$ をとるのが損失という観点からみて合理的であるかを問題とする．損失は θ と a に依存し（表1)，いかなる θ が実現するかは（事前）確率 $w\ (\in W)$ という型でしかわからない．しかし，θ の推定に役立つ情報 $x\ (\in X)$ の得られる条件付確率 $f(x|\theta)$ が利用できるため（表2)，実際にはどの x が得られた時にどの a を選ぶべきかを決める決定方式の選択問題の解として導かれる．決定方式としては，各 x に対してとるべき行動 a を定めた非確率化決定方式 $d\ (\in D)$ に加え，幾つかの非確率化決定方式をある確率で採用する確率化決定方式 $\delta\ (\in D^*)$ も考える．

表1 損失表

	a_1	a_2	---	a_n
θ_1	$l(\theta_1, a_1)$	$l(\theta_1, a_2)$	---	$l(\theta_1, a_n)$
θ_2	$l(\theta_2, a_1)$	$l(\theta_2, a_2)$	---	$l(\theta_2, a_n)$
⋮	⋮	⋮		⋮
θ_k	$l(\theta_k, a_1)$	$l(\theta_k, a_2)$	---	$l(\theta_k, a_n)$

表2 条件付確率

	x_1	x_2	---	x_m
θ_1	$f(x_1\|\theta_1)$	$f(x_2\|\theta_1)$	---	$f(x_m\|\theta_1)$
θ_2	$f(x_1\|\theta_2)$	$f(x_2\|\theta_2)$	---	$f(x_m\|\theta_2)$
⋮	⋮	⋮		⋮
θ_k	$f(x_1\|\theta_k)$	$f(x_2\|\theta_k)$	---	$f(x_m\|\theta_k)$

しかし，現実の複雑な決定問題をこのような簡単なモデルでどこまで忠実に再現できるか，あるいは，損失，事前確率は一意に定まるのか等，かなり多くの問題が残されている．このようなことを考慮するなら，問題の定式化には関与するが，後は理論から導かれる（一個）の解を盲目的に受入れるという，いわば理論中心の意思決定者の態度は賢明ではない．意思決定は，時には人間の行動の源泉に関わる極めて重要な問題にもなりうる．このような場合には，いかなる状況においていかなる決定方式が最適なものになり得るのかという，問題の大局的把

握が不可欠であり，さらに最終的にどの決定方式を用いるかは，意思決定の主体である当人が自ら検討し，決定するという態度が必要となる．このためには，考慮に値しない不合理な決定方式は初めから除外して考えたほうが望ましい．一般に情報 x が m 個，行動 a が n 個の場合には n^m 個の非確率化決定方式が考えられる．仮に $n=4$，$m=4$ としても256個の非確率化決定方式が存在する．

しかし実際には，この中で考慮に価する合理的な決定方式はほんの一握りにすぎない．たとえば，$\Theta=\{\theta_1, \theta_2\}$ の場合には13（一般には $n(m-1)+1$）個しかない（[3]）．では，いかにしてこのような合理的な決定方式を見い出せばよいか．優越性基準が有効性を発揮するのは実はこのような場合である．

さて，優越性基準についての定式化を試みよう．非確率化決定方式 d とは，X 空間から A 空間への写像であり

$$d\ (x)=a$$

と書くことにする．

通常，決定方式 d や δ の評価は危険度

$$(1)\qquad \begin{cases} R\ (\theta,\ d)=\displaystyle\sum_{j=1}^{m} l\ (\theta,\ d\ (x_j))\ f\ (x_j|\theta) \\ R\ (\theta,\ \delta)=\displaystyle\sum_{i=1}^{t} \pi_i R\ (\theta,\ d_i) \quad \left(\sum_{i=1}^{t} \pi_i=1\right) \end{cases}$$

に基づいておこなわれる．今，2つの決定方式 d_i と $d_i{}^*$ の危険度を比較した時に

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{すべての}\ \theta\ \text{について} & R\ (\theta,\ d_i{}^*)\leqq R\ (\theta,\ d_i) \\ \text{少なくとも一つの}\ \theta\ \text{について} & R\ (\theta,\ d_i{}^*)<R\ (\theta,\ d_i) \end{cases}$$

であるなら，いかなる θ が実現しようと危険度は常に $d_i{}^*$ の方が d_i より小さいか等しいため，d_i を用いることは合理性に反する．この時，d_i は $d_i{}^*$ によって優越（dominate）されるという．またどのような決定方式によっても優越されない決定方式を許容的な決定方式という．合理性という観点からは，意思決定者は許容的な決定方式にのみ注目すればよい．

表3　決定方式 d_i の危険度

	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
θ_1	1	3	3.5	4	6	6.5	7
θ_2	5	3.5	2.5	1	4	0.5	0

さて，具体的な例で（2）の優越性基準の効力を調べてみる．表3において

$$R\ (\theta_1,\ d_4)<R\ (\theta_1,\ d_5),\quad R\ (\theta_2,\ d_4)<R\ (\theta_2,\ d_5)$$

であるので，d_5 は d_4 によって優越されているが，残りの決定方式間には（2）の優越関係は存在しない．では残りの決定方式はすべて許容的な決定方式であろうか？．θ_1, θ_2 の事前確率が w_1, w_2 の時，決定方式 d_i の期待危険度 $r(d_i)$ 位は

$$r\ (d_i)=\mathrm{E}_\theta R(\theta,\ d_i)=w_1 R(\theta_1,\ d_i)+w_2 R(\theta_2,\ d_i),\quad w_1+w_2=1$$

で表わされる．これは $R(\theta_1,\ d_i)$ と $R(\theta_2,\ d_i)$ の凸1次結合であり，図1においては $R(\theta_1,\ d_i)$ と $R(\theta_2,\ d_i)$ を結ぶ線分で表わされる．この図における包絡線は θ の事前分布に対する最小の期待危険度を表わしている．この図から明らかなように，決定方式 d_2, d_3, d_6 はいかなる θ の事前分布に対しても期待危険度を最小にする決定方式にはならず，意思決定者には不要の決定方式である．したがって表3の決定問題は表4の決定問題として考えればよい．そこで d_2, d_3,

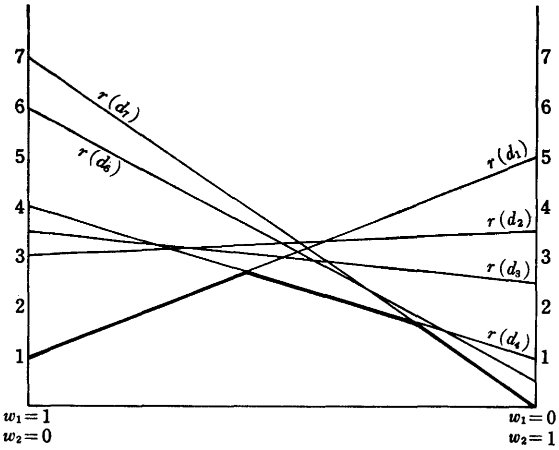

図 1

表 4 決定方式 d_i の危険度

	d_1	d_4	d_7
θ_1	1	4	7
θ_2	5	1	0

d_6 のような (2) の優越性基準では見い出せないが，しかし意思決定者にとって不要の決定方式を見い出す基準が必要となる．リグレット・レリーフ比基準はそのような基準の **1** つである．

2. リグレット・レリーフ比基準

決定方式の選択において，危険度 $R(\theta_s, d)$ そのものではなく θ_s における最小の危険度との差（リグレット： regret 後悔度）を考慮すべきであるという考え方がある．

ここでは，リグレットの定義を拡げて，3 つの決定方式 d_i, d_j, d_k の θ_s における危険度が

$$R(\theta_s, d_i) < R(\theta_s, d_j) < R(\theta_s, d_k)$$

のような関係にある時，$R(\theta_s, d_j) - R(\theta_s, d_i)$ を θ_s における d_j の d_i に対するリグレット，$R(\theta_s, d_k) - R(\theta_s, d_j)$ を θ_s における d_j の d_k に対するレリーフ (relief 安心度)，またリグレットとレリーフの比

$$\gamma(\theta_s, d_j;\ d_i, d_k) = \frac{R(\theta_s, d_j) - R(\theta_s, d_i)}{R(\theta_s, d_k) - R(\theta_s, d_j)} \tag{3}$$

を θ_s における d_j の d_i, d_k に対するリグレット・レリーフ比と定義する．

ところで，(3) の比の値が 1 より大きい場合は，d_j を用いた時の後悔の度合が安心の度合より大きいので，d_j を用いることは合理性に反する．以下に述べるリグレット・レリーフ比基準はこのような考え方に基づいている．

定理 （リグレット・レリーフ比基準）

決定方式 d_i, d_j, d_k の危険度が $\theta \in \Theta_1$ $(\subset\Theta)$ に関して

$$R(\theta, d_i) < R(\theta, d_j) < R(\theta, d_k) \tag{4}$$

また $\theta \in \Theta_2$ $(=\Theta - \Theta_1)$ に関して

$$R(\theta, d_i) > R(\theta, d_j) > R(\theta, d_k) \tag{5}$$

の時，

$$\underset{\theta\in\Theta_1}{\mathrm{Min}}\ \{\gamma(\theta,\ d_j;\ d_i,\ d_k)\}\times\underset{\theta\in\Theta_2}{\mathrm{Min}}\ \{\gamma(\theta,\ d_j;\ d_i,\ d_k)\}>1 \tag{6}$$

なら，d_j は d_i と d_k をある確率で採用する確率化決定方式によって優越される．

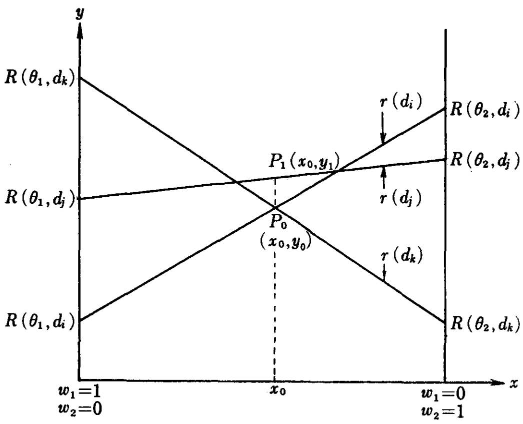

図 2

証明は [2] で与えてあるので，ここでは幾何学的な観点から，$\Theta=\{\theta_1,\ \theta_2\}$ と $\Theta=\{\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3\}$ の場合について，この定理の意味を考えてみる．

(イ) $\Theta=\{\theta_1,\ \theta_2\}$ の場合

決定方式 $d_i,\ d_j,\ d_k$ の危険度が

$$R(\theta_1,\ d_i)<R(\theta_1,\ d_j)<R(\theta_1,\ d_k)$$
$$R(\theta_2,\ d_i)>R(\theta_2,\ d_j)>R(\theta_2,\ d_k)$$

の時に，θ のいかなる事前確率に対しても d_j が期待危険度最小の決定方式とならない場合は，図2において $r(d_i)$ と $r(d_k)$ の交点を $P_0(x_0,\ y_0)$ とすると，x_0 における $r(d_j)$ の Y 座標値 y_1 が y_0 よりも大きい場合である．y_0, y_1 はそれぞれ，

$$y_0=\frac{R(\theta_1,\ d_k)\ R(\theta_2,\ d_i)-R(\theta_1,\ d_i)\ R(\theta_2,\ d_k)}{\{R(\theta_1,\ d_k)-R(\theta_1,\ d_i)\}+\{R(\theta_2,\ d_i)-R(\theta_2,\ d_k)\}}$$

$$y_1=\frac{R(\theta_2,\ d_j)\{R(\theta_1,\ d_k)-R(\theta_1,\ d_i)\}+R(\theta_1,\ d_j)\{R(\theta_2,\ d_i)-R(\theta_2,\ d_k)\}}{\{R(\theta_1,\ d_k)-R(\theta_1,\ d_i)\}+\{R(\theta_2,\ d_i)-R(\theta_2,\ d_k)\}}$$

であるので $y_1>y_0$ より

$$\frac{\{R(\theta_1,\ d_j)-R(\theta_1,\ d_i)\}\{R(\theta_2,\ d_j)-R(\theta_2,\ d_k)\}}{\{R(\theta_1,\ d_k)-R(\theta_1,\ d_j)\}\{R(\theta_2,\ d_i)-R(\theta_2,\ d_j)\}}>1.$$

これは $\gamma(\theta_1,\ d_j;\ d_i,\ d_k)\times\gamma(\theta_2,\ d_j;\ d_i,\ d_k)>1$, つまり前述の定理に他ならない．

(ロ) $\Theta=\{\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3\}$ の場合

決定方式 $d_i,\ d_j,\ d_k$ の危険度が

$$R(\theta_1,\ d_i)<R(\theta_1,\ d_j)<R(\theta_1,\ d_k)$$
$$R(\theta_2,\ d_i)>R(\theta_2,\ d_j)>R(\theta_2,\ d_k)$$
$$R(\theta_3,\ d_i)>R(\theta_3,\ d_j)>R(\theta_3,\ d_k)$$

である場合，$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ の事前確率 $w_1,\ w_2,\ w_3$ に対する各決定方式の期待危険度は

$$r(d.)=\mathrm{E}_\theta R(\theta,\ d.)=\sum_{s=1}^{3}w_s R(\theta_s,\ d.)\qquad .=i,\ j,\ k$$

であり，三角形座標を用いた図3において $r(d_i)$, $r(d_j)$, $r(d_k)$ は平面で示される．$w_1,\ w_2,\ w_3$ のいずれかがゼロの場合は図4における直線で示されるが，この図から推察されるように

$$\mathrm{Min}\{\gamma(\theta_1,\ d_j;\ d_i,\ d_k)\times\gamma(\theta_2,\ d_j;\ d_k,\ d_i),\ \gamma(\theta_1,\ d_j;\ d_i,\ d_k)\times\gamma(\theta_3,\ d_j;\ d_k,\ d_i)\}>1 \tag{7}$$

であれば，d_j はいかなる事前分布に対しても期待危険度最小の決定方式とはならない．

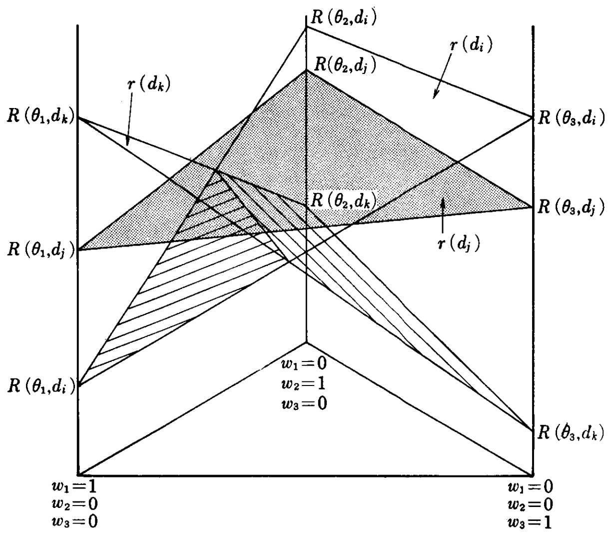

図 3

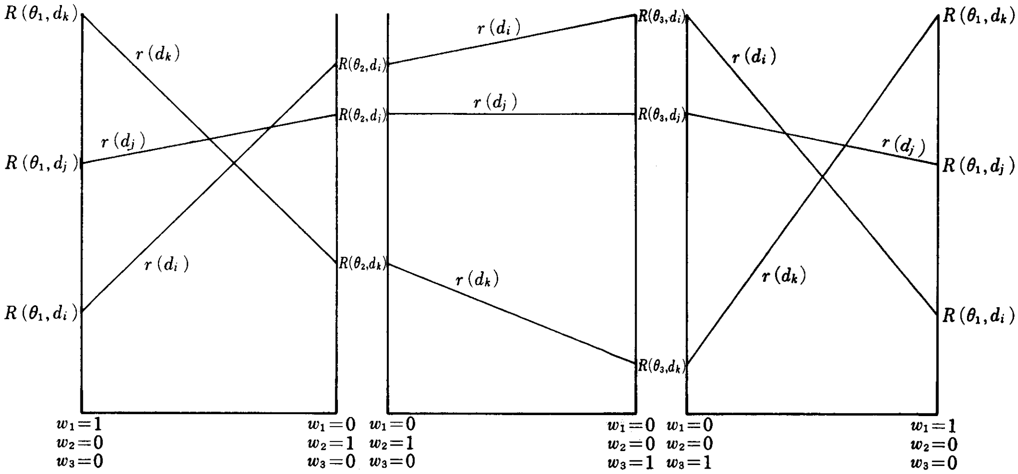

図 4

(7) 式は $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ の場合の (6) 式に他ならない.

ところで，リグレット・レリーフ比基準は (4)，(5) を満足する3つの決定方式 d_i, d_j, d_k に関して d_j が2つの決定方式 d_i と d_k のある確率化決定方式によって優越される場合の条件を与えているが，$\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ の場合に d_j が優越されるか否かはこの基準だけでは十分でないことは次の例で簡単に知ることができる．今4つの決定方式の危険度が表5の場合，d_3 と他の決定方式との間には (2) の優越関係はなく，また (4)，(5) を満たす d_1, d_4 に対する d_3 のリグレット・レリーフ比は

$$\gamma(\theta_1, d_3;\ d_1, d_4)\times\mathrm{Min}\,\{\gamma(\theta_2, d_3;\ d_1, d_4),\ \gamma(\theta_3, d_3;\ d_1, d_4)\}$$

$$=\frac{0.7}{0.6}\times\mathrm{Min}\left\{\frac{1}{0.7},\ \frac{1.7}{2.30}\right\}=0.86<1$$

表 5

	d_1	d_2	d_3	d_4
θ_1	0.9	1.3	1.6	2.2
θ_2	2.8	2.9	2.1	1.1
θ_3	7.7	4.7	5.4	3.7

であるが，図5より明らかなようにd_3は期待危険度最小の決定方式にはならない．このように，リグレット・レリーフ比基準のみで期待危険度が最小とならないような不要な決定方式を全て見い出すことはできない．このような問題点はあるにせよ，この比較的単純な基準が実際の問題において不要な決定方式を見い出すのに非常に有効であることを次節において数値例で示す．

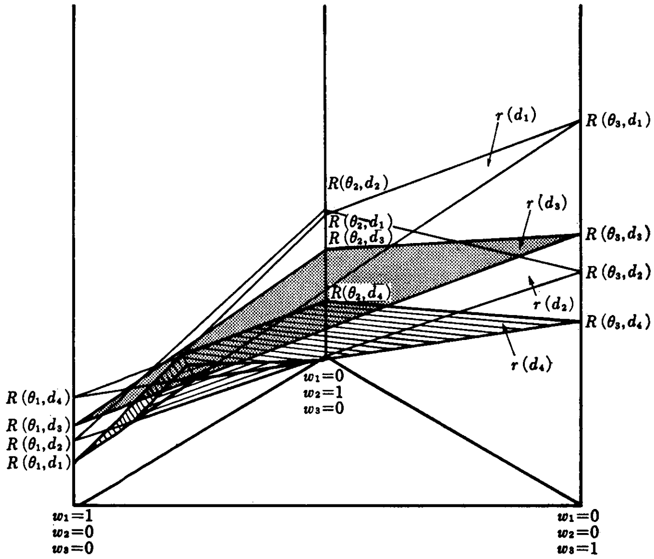

図 5

3. 数　値　例

$\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$，$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$の時，損失$l(\theta, a)$が表A，表B，表Cで与えられる場合について考えてみる．どの損失表の場合にも乱数を用いて20種類の$f(x|\theta)$の分布を用意した．表6，表7，表8に損失表A，B，Cにおいて

(1)　従来の優越性基準 (2) を用いた場合

(2)　リグレット・レリーフ比基準を用いた場合

(3)　(1)，(2) の2つの基準を併用した場合

において見い出すことのできた期待危険度最小とならない不要な決定方式の個数を示してある．なお，決定方式の総数は表Aの場合，$4^4=256$；表B，Cの場合$5^4=625$である．

表6，7，8において (1) と (2) を比較してみるとリグレット・レリーフ比基準が従来の優越性基準に劣るのは，60ケース中表8の * を付けた3ケースのみであり，平均では表Aで35，表Bで37，表Cで13，従来の優越性基準より不要の決定方式を多く見い出している．また (3) の場合と (2) の場合の差は平均で表Aでは2，表Bでは4，表Cでは14であるが，このことから，従来の優越性基準 (2) で発見できる不要な決定方式の大部分はリグレット・レリーフ比基準でも発見できることがわかる．

損失表 A

	a_1	a_2	a_3	a_4
θ_1	0	2	3	7
θ_2	4	3	0	3
θ_3	13	10	6	0

表 6

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	従来の優越性基準	リグレット・レリーフ比基準	従来の優越性基準 + リグレット・レリーフ比基準	(3)−(1)	決定方式の総数−(3)
1	198	240	241	43	15
2	194	237	238	44	18
3	212	237	238	26	18
4	192	234	235	43	21
5	209	234	235	26	21
6	206	236	236	30	20
7	179	234	236	57	20
8	219	231	239	20	17
9	216	238	239	23	17
10	203	237	237	34	19
11	208	236	237	29	19
12	208	233	234	26	22
13	194	223	229	35	27
14	187	238	238	51	18
15	190	231	232	42	24
16	189	236	236	47	20
17	187	233	235	48	21
18	199	237	238	39	18
19	191	220	223	32	33
20	206	238	238	32	18
平均	199	234	236	36	20

2つの基準を併用すると，(2) だけの場合より発見できた不要な決定方式の割合は平均で，表Aの場合 77.7%→92.2%，表Bの場合 86.6%→93.1%，表Cの場合 92.2%→96.5% へと増加している．

この数値例からわかるように，$\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ の場合にはリグレット・レリーフ比基準は非常に有効であるといえる．

参考文献

[1] Murakami, M. (1976). On the reduction to a complete class in multiple decision problems, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **28**, A, 145–165.

[2] Murakami, M. (1978). On the reduction to a complete class in multiple decision problems (2), *Ann. Inst. Statist. Math.*, **30**, A, 27–34.

[3] Murakami, M. Some properties of the risk set in multiple decision problems (投稿中).

損 失 表 B

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	0	1	3	6	10
θ_2	5	2	1	4	7
θ_3	15	9	5	3	2

表 7

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	従来の優越性基準	リグレット・レリーフ比基準	従来の優越性基準 + リグレット・レリーフ比基準	(3)－(1)	決定方式の総数－(3)
1	548	578	581	33	44
2	523	584	586	63	39
3	531	566	570	39	55
4	544	569	576	32	49
5	525	575	579	54	46
6	568	584	590	22	35
7	569	595	598	29	27
8	502	567	571	69	54
9	543	574	580	37	45
10	547	578	581	34	44
11	551	578	581	30	44
12	523	574	578	55	47
13	545	582	585	40	40
14	557	585	588	31	37
15	535	585	589	54	36
16	553	576	581	28	44
17	540	577	582	42	43
18	550	580	582	32	43
19	532	573	580	48	45
20	537	572	578	41	47
平均	541	578	582	41	43

損 失 表 C

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
θ_1	0	1	3	6	8
θ_2	5	6	2	3	9
θ_3	10	8	3	4	1

表 8

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	従来の優越性基準	リグレット・レリーフ比基準	従来の優越性基準 + リグレット・レリーフ比基準	(3)－(1)	決定方式の総数－(3)
1	557	597	604	47	21
2	562	587	601	39	24
3	585	591	605	20	20
4	527	587	600	73	25
5	588	589	604	16	21
6	586	592	603	17	22
7*	582	574	600	18	25
8	574	587	603	29	22
9	581	594	603	22	22
10	580	592	599	19	26
11	583	595	604	21	21
12	575	587	603	28	22
13	577	590	601	24	24
14	574	593	605	31	20
15	573	595	602	29	23
16	574	593	605	31	20
17*	592	579	601	9	24
18*	577	574	602	25	23
19	591	594	607	16	18
20	577	592	607	30	18
平均	576	589	603	27	22

Some Applications of Regret-Relief Ratio Criterion to Statistical Decision Problems

Masakatsu Murakami
(Institute of Statistical Mathematics)

In the application of statistical decision theory to an actual decision problem, the set of reasonable decision rules, i.e., the complete class of decision rules, is more essential for the decision-maker's responsibility rather than the one best decision rule.

For this purpose, a new concept "regret-relief ratio" criterion was introduced ([1], [2]). Here, "relief" of a decision rule means an opposite concept to "regret of the decision rule". In this note, "regret-relief ratio" criterion in 3-state of nature case is discussed from the geometric point of view and its usefulness is shown with some numerical examples.