

# 非線型振動現象と時系列モデル

統計数理研究所 尾 崎 統

(1980年1月 受付)

## Non-linear Vibrations and Time Series Models

T. Ozaki

(The Institute of Statistical Mathematics)

Time series models for non-linear random vibrations are presented and some typical non-linear phenomena such as *Amplitude-dependent Frequency Shift*, *Jump Phenomena* and *Limit Cycle* are explained through the models. Statistical identification procedure of the models are presented and applied to some real data. Stationarity conditions and some geometric aspects of the models are also discussed.

### 1. はじめに

世の中の多くの現象は動的な構造を持っていると同時に不確定要素による攪乱を受けており確率過程とみなされる場合が多い。また統計熱力学や統計流体力学にみられるように微視的なレベルでは決定論的な動きをしているものを巨視的なレベルでは確率的な現象とみなすことによって意味のある有用な結論を引き出せる場合も多い。このような確率過程の観測データをもとにその確率過程を発生させるシステムの構造なり特性に関する推論、あるいは将来の予測や制御をしようとする場合、時系列モデルが必要となる。なかでも自己回帰モデル

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

や移動平均モデル

$$x_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

あるいは自己回帰移動平均モデル

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

などが最もよく知られたものであり、スペクトルの推定、システムの予測や制御に応用されその有用さが認められている (Box & Jenkins [5], 赤池・中川 [1])。上記のモデルはいずれも線型モデルであるがシステムの非線型性が特に強い場合、予測や制御の性能をよりよくする為にも線型時系列モデルの拡張としての非線型時系列モデルの使用が自然に考えられる。同時にシステムの非線型性がこのモデルをとおして説明されれば更に望ましいであろう。

非線型時系列モデルとしては線型自己回帰モデルの拡張としての非線型自己回帰モデル

$$x_t = Q(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}) + \varepsilon_t$$

( $Q(\cdot)$  は多項式) や、線型移動平均モデルの非線型拡張である Volterra 型モデル

$$x_t = Q(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}) + \varepsilon_t$$

や、両線型 (Bilinear) モデル

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \sum_i \sum_j \pi_{ij} x_{t-i} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

などが知られている。非線型自己回帰モデルは一ステップ先の予測の為のモデルとしては有効であるが  $\varepsilon_t$  が白色雑音の時  $x_t$  は定常確率過程とはなり得ず  $t \rightarrow \infty$  で確率 1 で発散する。Volterra 型モデルは通常の Gauss 過程への移動平均モデルの近似の悪さを考える時非線型な確率過程のモデルとしてのパラメタリゼーションの効率の悪さが推察される。両線型モデルはその形からわかるように少くとも線型モデルとしては最も一般的な自己回帰移動平均モデルを含んでおりモデルとして有効であることを期待させるが、しかしその非線型項の導入は前記の二モデルと同様形式的であり、その意味は明白でなく、またそれによって特定の非線型現象の機構を説明するというものもなされていない。

本稿では、これらの非線型時系列モデルとは別に、非線型現象の中でも良く知られた極限周期 (Limit Cycle) 現象、飛躍 (Jump) 現象、振幅従属周期ずれ現象に注目し、これらの非線型性を構造的に持ちつつ外からの攪乱、白色雑音によって駆動されている動的システムのモデルとしての時系列モデルを導入する。その為に次節でまずそれらの非線型現象を説明し、第3節でそれらを表現する時系列モデルを与える。第4節ではモデルのデータへのあてはめについて議論し数値例を与える。第5節ではモデルの性質、定常エルゴード性や、特異点、極限周期の安定性、カオスとの関係について議論する。

## 2. 非線型現象

よく知られた非線型現象の一つに振動論における振幅従属周期ずれ現象がある。これは非線型振動方程式

$$(2.1) \quad \ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0$$

において見られ、 $\beta=0$  の時は調和振動を表わし  $x = \sin(\omega t + \theta)$  で固有周波数  $\omega$  は  $\sqrt{\alpha}/2\pi$  であるが、 $\beta>0$  の時は振幅  $|x|$  が大きくなるにつれて復元力が非線型に増大し固有周波数  $\omega$  は高周波域にずれる。逆に  $\beta<0$  の時は振幅  $|x|$  が大きくなると復元力がそれに線型に比例せず、より少い増加しかみられず固有周波数  $\omega$  は低周波域にずれる (図1参照)。前者の場合 ( $\beta>0$ ) を剛バネ (hard spring)、後者の場合 ( $\beta<0$ ) を柔バネ (soft spring) と呼ぶ。

振動方程式 (2.1) が減衰項を含み外力  $F \cos \omega t$  を受けると我々は次の Duffing 方程式 (Duffing [7]) の名で知られる式、

$$(2.2) \quad \ddot{x} + c\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F \sin \omega t$$

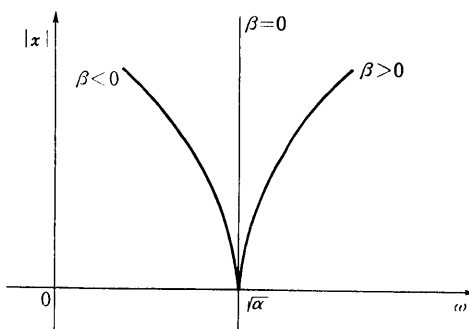


Fig. 1

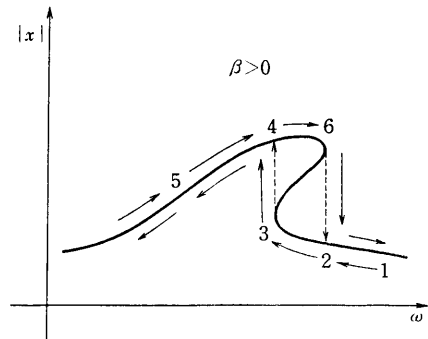


Fig. 2 剛バネ型飛躍現象

を得る。この振動方程式に特徴的な非線型現象は図2にみられるような飛躍 (Jump) 現象である。剛バネ,  $\beta > 0$ , の時外力  $F \cos \omega t$  の周波数  $\omega$  をゆっくり減少させてゆくと振幅  $|x|$  は図2の1から2を通して次第に増加し3から急に4に飛躍しその後4から5へとゆっくり減少してゆく。逆に周波数  $\omega$  を低周波からゆっくりと増加させると  $|x|$  は5から4を通して次第に増大し6から急に減少して2に飛躍しその後, 2から1へとゆっくり減少してゆく。柔バネ,  $\beta < 0$  の時は図3にあるように飛躍が逆方向に起るだけで全く同様な現象が観測される。一般には外力は(2.2)における調和波のかわりに

$$(2.3) \quad \ddot{x} + c\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = n(t)$$

のように連続スペクトルを持つ確率過程  $n(t)$  の場合が多い。このように復元項が非線型な振動システムの例としては外力によってゆすられている振り子や海上航行中の船の横ゆれなどがある。

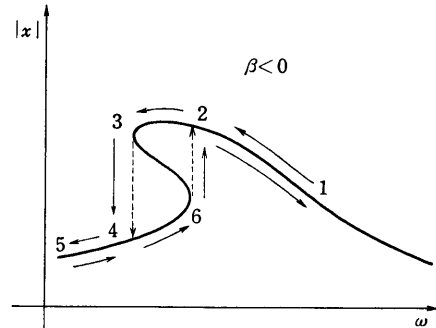


Fig. 3 柔バネ型飛躍現象

この他によく知られた非線型現象として極限周期 (Limit Cycle) 現象がある。これは振動論では van der Pol 方程式と呼ばれる式,

$$(2.4) \quad \ddot{x} - c(1-x^2)\dot{x} + \alpha x = 0$$

によって生成される振動現象で, 電気回路理論に表われる (van der Pol [25]).  $c > 0, \alpha > 0$  であり(2.4)の形からもわかるように  $|x|$  が小さい時, 減衰項は負になり  $x$  は振動しつつ発散しはじめる。しかし  $|x|$  が大きくなると減衰項は正になり  $x$  は振動しつつ減衰をはじめる。この二つの動きの繰り返しのよって  $x$  は外からの励起なしに振動をする構造になっている。外からの不規則攪乱がある場合は

$$(2.5) \quad \ddot{x} - c(1-x^2)\dot{x} + \alpha x = n(t)$$

となり, 外乱  $n(t)$  によって駆動される乱れ極限周期 (perturbed limit cycle) を生成する。

以上三つの非線型現象を見てきたがこれらを実現する時系列モデルについて以下次節において考察する。

### 3. 非線型時系列モデル

確率線型振動方程式

$$(3.1) \quad \ddot{x} + c\dot{x} + \alpha x = n(t)$$

で定義される確率過程に対して ARMA モデル

$$(3.2) \quad x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

が対応していることはよく知られている (Pandit and Wu [19]). ここに  $n(t)$  は連続ガウス白色雑音,  $\varepsilon_t$  は離散ガウス白色雑音である。(3.1) はその固有方程式

$$\rho^2 + c\rho + \alpha = 0$$

の根 (振動系であるから虚根) が負の実部を持つ時減衰し, 正の実部を持つ時発散する。つまり固有根は

$$\rho = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\alpha - \frac{c^2}{4}} i$$

で与えられ、従ってこの振動システムは  $c > 0$  の時減衰し、 $c < 0$  の時発散する。一方 (3.2) はその固有方程式

$$\lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0$$

の根が単位円外にある時発散し、単位円の内側にある時減衰して定常な時系列を与える。今、固有根が複素根の時、

$$\lambda = \frac{\phi_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4\phi_2 - \phi_1^2} i$$

で与えられ  $|\lambda|^2 = -\phi_2$  である故  $\phi_2 < -1$  の時発散し、 $0 > \phi_2 > -1$  の時定常な時系列を与える。固有周波数については、(3.1) は固有根の虚部で決まり、今の場合

$$\omega = \sqrt{-\phi_2 - \phi_1^2/4} / 2\pi$$

で与えられるのに対し、(3.2) では固有周波数  $f$  はその固有根の偏角で決まり、

$$f = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{-4\phi_2 - \phi_1^2}}{\phi_1} \right)$$

で与えられる。

さてここで前節で述べた非線型振動方程式にもどって (3.1) との関係を見てみよう。極限周期を生じさせる van der Pol 方程式は減衰項が振幅に従属して変化するものであったし、Duffing 方程式では復元項の復元係数が振幅に従属して変化した。いいかえると van der Pol 型の振動システムでは固有根の実部が振幅に従属して正から負、負から正へと変化する、Duffing 型では固有根の虚部が振幅に従属して変化する。従って上述の (3.1)、(3.2) の対応を考える時、時系列モデルで van der Pol 型、Duffing 型の非線型現象を実現させるには固有根  $\lambda$  を振幅従属にしてやればよいことがわかる。

たとえば Duffing 型の非線型現象を表わすには

$$x_t = (\phi_1 + \pi_1 x_{t-1}^2) x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

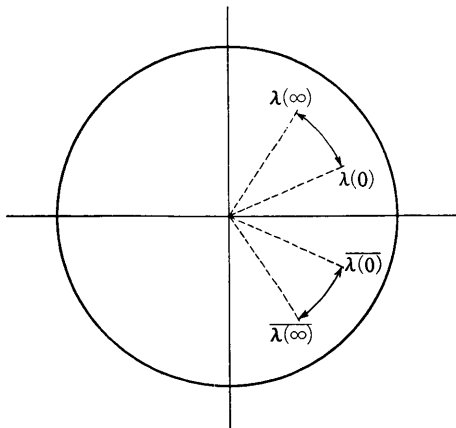


Fig. 4

が考えられるが、このような多項式型の非線型自己回帰モデルで定義された時系列は定常でなく  $t \rightarrow \infty$  で必ず発散する (Ozaki and Oda [12])。そこで通常多項式のかわりに

$$(3.3) \quad x_t = (\phi_1 + \pi_1 e^{-\pi_1 x_{t-1}^2}) x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

で  $\pi_1 > 0$  としてやれば図4のように  $x_{t-1} = 0$  の時の“瞬時的”固有方程式

$$\lambda^2 - (\phi_1 + \pi_1) \lambda - \phi_2 = 0$$

の根  $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$  と  $x_{t-1} = \pm \infty$  の時の“瞬時的”固有方程式

$$\lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0$$

の根  $\lambda_\infty, \bar{\lambda}_\infty$  が単位円の内側にある時、時系

列は発散せず安定で、固有根  $\lambda$  は  $\lambda_0$  と  $\lambda_\infty$  の間を振幅に従属して動く剛バネ型の挙動を示し、逆に  $\pi_1 < 0$  の時は柔バネ型の挙動を示すことが期待される (Ozaki [13]).

例として次のモデルを考えてみよう.

$$(3.4) \quad x_t = (1.5 + 0.28e^{-x_{t-1}^2})x_{t-1} - 0.96x_{t-2} + \varepsilon_t$$

固有根  $\lambda$  は  $|\lambda|^2 = 0.98$ ,  $25^\circ \leq \arg(\lambda) \leq 40^\circ$  で  $\sigma_\varepsilon^2 = 0.025$  とした時のシミュレーションの図が図5である. 振幅が小さい時低周波に、振幅が大きい部分では高周波に支配的周波数がずれる剛バネ型の振幅従属周期ずれ現象が図から読みとれるであろう.

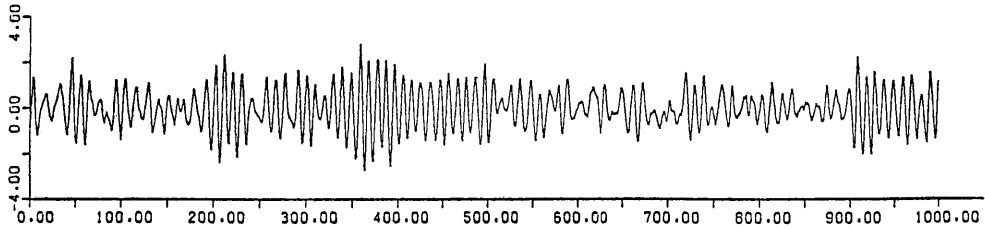


Fig. 5  $x_t = (1.5 + 0.28e^{-x_{t-1}^2})x_{t-1} - 0.96x_{t-2} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0, 0.025)$

今  $\varepsilon_t$  のかわりに周波数  $f$  が 0.005 から 0.1 まで変わる正弦波  $\sin 2\pi ft$  を使ったシミュレーションをしてみると、図6のように  $f=0.062$  あたりで急に振幅が小さくなるのに対し逆に  $f$  を 0.1 から 0.005 まで変えていくと図7のように  $f=0.052$  あたりで飛躍する図2のような剛バネ型の飛躍現象を実現していることが確かめられる. 上記モデル (3.4) と同じ固有根の間を振幅に従属して逆方向に動く次のような柔バネ型のモデル

$$(3.5) \quad x_t = (1.78 - 0.28e^{-x_{t-1}^2})x_{t-1} - 0.96x_{t-2} + \varepsilon_t$$

で同じようなシミュレーションを行うと (3.4) の場合と逆方向の振幅従属周期ずれ現象がみられまた飛躍現象は図3のような柔バネ型の飛躍現象が容易に確認される (Ozaki [16], Haggan and Ozaki [9]).

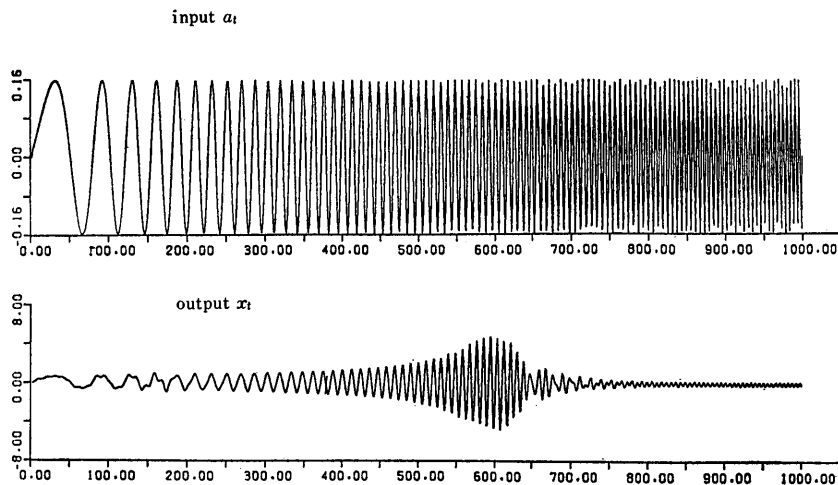


Fig. 6  $x_t = (1.5 + 0.28e^{-x_{t-1}^2})x_{t-1} - 0.96x_{t-2} + a_t$ ,  $a_t = \sin 2\pi ft$ ,  $f(0) = 0.1$ ,  $f(N) = 0.005$

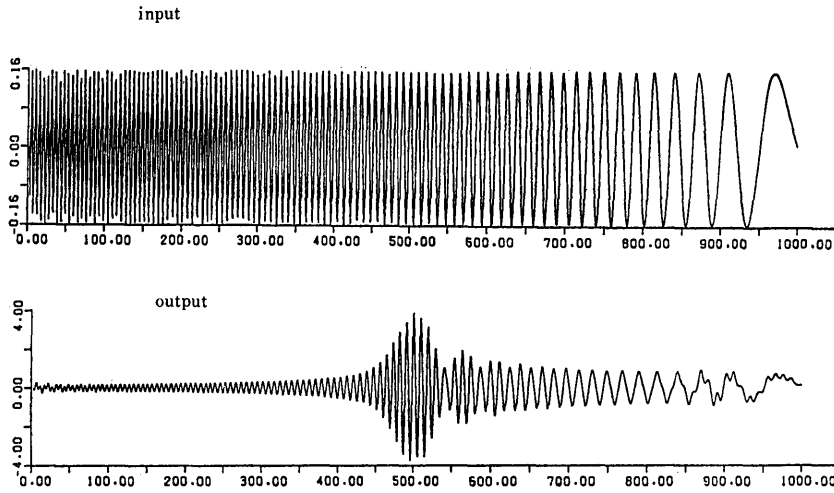


Fig. 7  $x_t = (1.5 + 0.28e^{-x_t+1^2})x_{t-1} - 0.96x_{t-2} + a_t$ ,  $a_t = \sin 2\pi f(t)t$ ,  $f(0) = 0.1$ ,  $f(N) = 0.005$

van der Pol 型の極限周期現象は前節でみたように振幅が小さい時減衰係数が負になって発散しはじめ振幅が大きくなると減衰係数が正になって減衰しはじめ、その繰り返しのよって振動すると解釈することができる。時系列モデルの場合では“瞬時的”固有根  $\lambda$  が、振幅が小さい時単位円の外に出、振幅が大きくなると単位円の内側に入るようにしてやればよい。つまり

モデル

$$(3.6) \quad x_t = (\phi_1 + \pi_1 e^{-x_t-1^2})x_{t-1} + (\phi_2 + \pi_2 e^{-x_t-1^2})x_{t-2} + \varepsilon_t$$

において、係数  $\phi_1, \phi_2, \pi_1, \pi_2$  を与える際、多項式

$$\lambda^2 - (\phi_1 + \pi_1)\lambda - (\phi_2 + \pi_2) = 0$$

が単位円の外に根を持ち、多項式

$$\lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0$$

が単位円の内側に根を持つように与えてやればよい。例えば

$$(3.7) \quad x_t = (1.95 + 0.23e^{-x_t-1^2})x_{t-1} - (0.96 + 0.24e^{-x_t-1^2})x_{t-2} + \varepsilon_t$$

は図8のように  $|\lambda|^2$  が 0.96 と 1.2 の間を

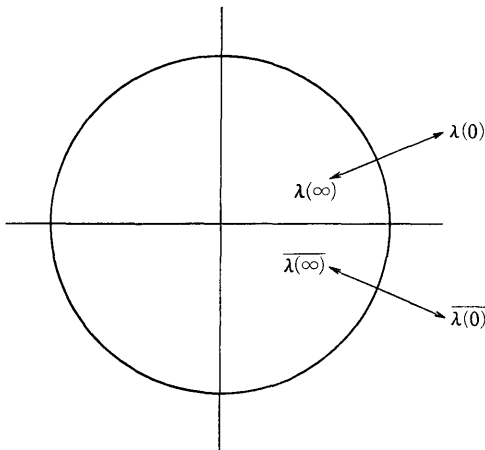


Fig. 8

動く。図9は白色雑音がない場合に二つの違う初期値から出発した  $x_t$  がどちらも同じ極限周期に近づく様子を示す。このようにモデル (3.7) は軌道安定な極限周期を持つことが確かめられる。

以上我々は非線型振動論で知られた Duffing 型の非線型性、飛躍現象、振幅従属周期ずれ現象、van der Pol 型の極限周期現象を再現する時系列モデルの可能なことを見たが、ここで Duffing 方程式や van der Pol 方程式は一般的な非線型振動方程式

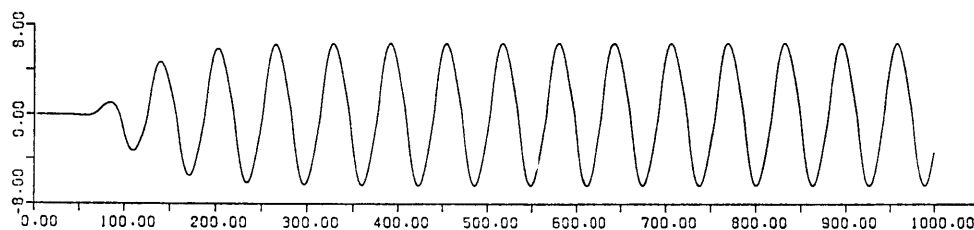
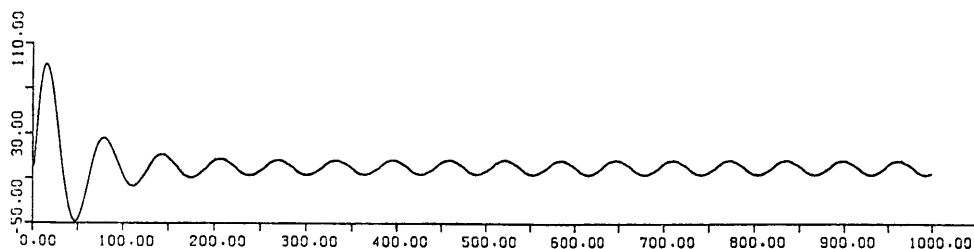


Fig. 9  $x_t = (1.95 + 0.23e^{-x_t-1^2})x_{t-1} - (0.96 + 0.24e^{-x_t-1^2})x_{t-2}$

$$(3.8) \quad \ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)x = F(t)$$

の一近似型に過ぎないということに注意する必要がある。Duffing 型の振動システムでは (3.8) において  $f_1(x) \equiv c$ ,  $f_2(x) \equiv \alpha + \beta x^2$ , van der Pol 型の振動システムでは,  $f_1(x) \equiv -c + cx^2$ ,  $f_2(x) \equiv \alpha$  で近似したものを見ることができる。Duffing 型の振動システムに関してはより高次の多項式で近似することにより, より精密に復元力の動きを近似することができるし, van der Pol 型のシステムでも高次の多項式  $p(x)$  を用いれば,  $|x|$  が小さい時  $p(x) < 0$ ,  $|x|$  が大きい時  $p(x) > 0$  を満足する限り極限周期が存在し, しかもより一般的な形の極限周期を与える。同様に時系列モデルにおいても

$$(3.9) \quad x_t = g_1(x_{t-1})x_{t-1} + g_2(x_{t-1})x_{t-2} + \varepsilon_t$$

において  $g_1(x_{t-1})$ ,  $g_2(x_{t-1})$  を

$$g_1(x_{t-1}) = \phi_1 + (\pi_0^{(1)} + \pi_1^{(1)}x_{t-1} + \dots + \pi_{r_1}^{(1)}x_{t-1}^{r_1})e^{-x_{t-1}^2}$$

$$g_2(x_{t-1}) = \phi_2 + (\pi_0^{(2)} + \pi_1^{(2)}x_{t-1} + \dots + \pi_{r_2}^{(2)}x_{t-1}^{r_2})e^{-x_{t-1}^2}$$

のように高次の Hermite 型多項式で近似すれば Duffing 型, van der Pol 型の振動システムを含むより一般の非線型振動システムに対してよりよい時系列近似モデルを与えるであろうことがわかる (Ozaki [17])。またスペクトルに複数のピークを持つような非線型時系列に対しては高次ラグのモデル

$$(3.10) \quad x_t = (\phi_1 + \pi_1 e^{-\gamma x_{t-1}^2})x_{t-1} + \dots + (\phi_p + \pi_p e^{-\gamma x_{t-1}^2})x_{t-p} + \varepsilon_t$$

が考えられる。ここに  $\gamma$  は観測値  $x_t$  のスケールリングを考慮して導入されたパラメータである。

#### 4. モデルのあてはめ

モデルのあてはめは Akaike [2] のエントロピー最大化原理に基づいて行うことができる。モデル  $g(z;x)$  の分布  $f(z)$  に対するエントロピー  $B(f;g)$  は次式で定義される。

$$(4.1) \quad B(f; g) = - \int \left\{ \frac{f(z)}{g(z; x)} \right\} \log \left\{ \frac{f(z)}{g(z; x)} \right\} g(z; x) dz$$

二つの分布の間の距離を測る尺度としてはいろいろな量が考えられ、エントロピーは一つの尺度に過ぎないという考え方があるが、Boltzman の論文 (Boltzman [4]) および Sanov [21] の定理 13 の結果から分布間の距離を測る尺度としてのエントロピーの重要さがわかる。Akaike [2] のエントロピー最大化原理は次のように与えられる。「統計的推論の問題をデータ  $x$  から分布  $f(z)$  を推定する形に組み立て、平均エントロピー

$$(4.2) \quad E_x B(f; g) = \int B(f; g) f(x) dx$$

を最大化するようなモデル  $g(z; x)$  を求める。」いわゆる AIC

$$AIC = (-2) \log(\text{最大尤度}) + 2(\text{パラメータ数})$$

はこの (一)  $E_x B(f; g)$  の推定量であり AIC を最小化するという事は平均エントロピーを最大化することをめざしていることは言うまでもない。

今モデルとして

$$(4.3) \quad x_t = (\phi_1 + \pi_1 e^{-\gamma x_{t-1}^2}) x_{t-1} + \dots + (\phi_p + \pi_p e^{-\gamma x_{t-p}^2}) x_{t-p} + \varepsilon_t \\ (0 \leq p \leq m)$$

を考えモデルのあてはめに際して我々は AIC を平均エントロピーの推定量として採用することにする。モデル (4.3) の次数  $p$  を固定した時のパラメータ  $\{\gamma, (\phi_i, \pi_i); i=1, \dots, p\}$  の最尤推定は本質的には非線型最適化に帰着するが、これは大量の計算量を必要とすることからできるだけ避けることが望ましい。ここでパラメータ  $\gamma$  を固定し初期値の影響が無視できるとすると問題は容易になり、 $x_t$  の  $\{x_s; s < t\}$  と  $\{e^{-\gamma x_{t-1}^2} x_s; s < t\}$  の上への線型回帰問題に帰着する。 $\gamma$  はスケーリングパラメータであり  $e^{-\gamma x_{t-1}^2}$  が殆んどの  $x_t$  に対し無視できる程小さくなるような  $\gamma$  の範囲は除外して問題ないであろう。この決められた  $\gamma$  の値の範囲を細かく分割し各点  $\gamma_0$  での最適モデルを AIC により求める。モデルの AIC は

$$(4.4) \quad AIC = (n-m) \log \hat{\sigma}_p^2 + 2(2p+1)$$

と与えられる。 $n$  はデータ数、 $\hat{\sigma}_p^2$  は次数  $p$  のモデルの残差分散。各  $\gamma$  に対して得られたモデルの AIC の値を再び比較し最小 AIC を与える  $\gamma$  を最適モデルの  $\gamma$  の推定量として選ぶことにする (Haggan and Ozaki [8])。従って  $\gamma$  を  $\gamma_0$  に固定する時モデル

$$(4.5) \quad x_t = (\phi_1 + \pi_1 e^{-\gamma_0 x_{t-1}^2}) x_{t-1} + \dots + (\phi_p + \pi_p e^{-\gamma_0 x_{t-p}^2}) x_{t-p} + \varepsilon_t$$

を  $t=m+1, \dots, n$ ;  $p=1, \dots, m$  に対して最小二乗推定手法によるあてはめを行う。(4.5) を行列型で書くと次式を得る。

$$(4.6) \quad \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(n_1)'} &= (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-(n-m+1)}) \\ \mathbf{Y}^{(n_1)'} &= (e^{-\gamma_0 x_{n_1}^2} x_{n_1}, e^{-\gamma_0 x_{n_1-1}^2} x_{n_1-1}, \dots, e^{-\gamma_0 x_{n_1-(n-m+1)}^2} x_{n_1-(n-m+1)}) \\ n_1 &= n-m, n-m+1, \dots, n \\ \mathbf{A} &= (\mathbf{X}^{(n-1)}, \mathbf{Y}^{(n-1)}, \mathbf{X}^{(n-2)}, \mathbf{Y}^{(n-2)}, \dots, \mathbf{X}^{(n-p)}, \mathbf{Y}^{(n-p)}) \\ \boldsymbol{\beta}' &= (\phi_1, \pi_1, \phi_2, \pi_2, \dots, \phi_p, \pi_p) \\ \mathbf{e}' &= (e_n, e_{n-1}, \dots, e_{m+1}). \end{aligned}$$



従って  $\beta$  の正規方程式は

$$A' A \beta = A' X^{(n)}$$

となり  $\beta$  は

$$\beta = (A' A)^{-1} A' X^{(n)}$$

から得られる。  $\beta$  はマルコフチェインのパラメータの最尤推定量で、その漸近的性質は Billingsley [3] に与えられている。

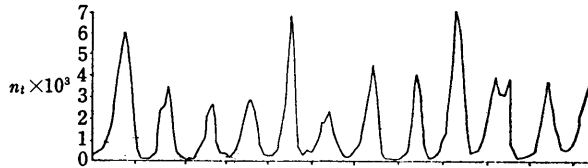


Fig.10 Canadian lynx data

以上述べたあてはめ法を実際にデータにあてはめてみよう。図 10 は 1821 年から 1934 年の間にカナダの Mackenzie 川周辺で捕獲されたオオヤマ猫 (Lynx) の年間捕獲数の時系列である。このデータは約 10 年の周期性のあるデータとしてよく知られ、Moran [11] によって統計学者の注目を引くこととなった。彼はデータをより対称にする為に常用対数をとって解析した。最近では Campbell and Walker [6] と Tong [22] の二つの違ったアプローチによる解析がある。前者は線スペクトルが含まれているとみて、9.63 年周期の調和波プラス自己回帰モデルによるあてはめ、後者は連続スペクトルとみて 11 次の自己回帰モデルをあてはめて議論している。この二つの違ったアプローチを和解させるものとしてモデル (4.3) をあてはめることを考える (Haggan and Ozaki [8])。極限周期の存在は自己励起的な振動の機構の内在を示唆するであろうし、推定モデルを調べることによってスペクトルの周波数のずれに関する何らかの示唆が与えられるかもしれない。前述のあてはめ法を適用した結果  $\hat{p}=11$ ,  $\hat{\gamma}=3.89$ ,  $\hat{\sigma}^2=0.0321$  のモデルが得られた。推定パラメータは表 1 にあるとおりである。

表 1

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\hat{\phi}_i$	1.088	-0.268	0.253	-0.434	0.403	-0.356	0.213	-0.096	0.226	0.063	-0.379
$\hat{\pi}_i$	0.019	-0.499	-0.045	0.281	-0.532	0.602	-0.533	0.302	-0.181	0.182	0.157

$$\lambda^{11} - \phi_1 \lambda^{10} - \dots - \phi_{11} = 0$$

の固有根は全て単位円の内側にあり、

$$\lambda^{11} - (\phi_1 + \pi_1) \lambda^{10} - \dots - (\phi_{11} + \pi_{11}) = 0$$

の固有根のうち一對の互に共役な根が単位円の外にあり、その偏角は約 10 年周期の極限周期の存在を示唆する。実際白色雑音を入れないで、オオヤマ猫のデータの値を初期値に使うシミュレーションをしてみると約 9.45 年の極限周期が存在することが確かめられる (Haggan and Ozaki [8])。したがって我々のモデルは白色雑音がない場合は Campbell and Walker [6] のように決定論的な周期解を持つ。白色雑音がある場合は決定論的周期解は消失し約 9.5 年の周期

に関する周波数成分は線スペクトルではなく Tong [22] のような連続スペクトルになる. 以上のことから我々のモデルは Campbell and Walker [6] のモデルと Tong [22] のモデルの二つの特徴を兼ね備えているとみることができる. Ozaki [17] はさらにオオヤマ猫の捕獲数の増加と減少の非対称性に注目し, 高次の Hermite 型のモデル (3.9) をあてはめることによって非対称な極限周期のモデルを与えた.

## 5. モデル解析

前節に述べた如く我々の非線型時系列モデルはただ単にデータによくフィットする, あるいはよい予測値を与えるというだけでなく, データを発生させる機構に内在する構造に関する示唆を与えてくれる. ここでは (4.3) 型のモデルについてさらにその性質を調べてみよう. モデルが与えられた時そのモデルによって定義される確率過程が定常か否かは重要な問題である. Tweedie [24] は一般のノルム空間上に定義されたマルコフチェインのエルゴード性について次のような定理を与えた. 「マルコフチェイン  $V_n$  の遷移則 (transition law)  $p(v, \cdot)$  が強連続つまり  $v$  の函数として連続で次の二条件を満たすようなコンパクト集合  $K$  と正の数  $c$  が存在するとき  $V_n$  はエルゴード的である.

$$(5.1) \quad \begin{aligned} & \text{i) } E\{\|V_{n+1}\| - \|V_n\| \mid V_n = v\} \leq -c \quad v \notin K \\ & \text{ii) ある } B > 0 \text{ が存在して} \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad E\{\|V_{n+1}\| - \|V_n\| \mid V_n = v\} \leq B < \infty \quad v \in K$$

マルコフチェインがエルゴード的であれば通常の方法によって定常な測度が定義できる. 我々のモデルは言うまでもなくマルコフチェインであり, その形から遷移則が強連続であることも明らかである. i) は我々のモデルでは  $|x_{i-1}|$  が大きくなりある閉集合  $K$  の外に出る時  $x_i$  は平均的に減衰することに対応している. ii) は  $x_{i-1}$  が  $K$  の中にある時は  $x_i$  は平均的に有界であることを意味し,  $x_i$  が  $x_{i-1}, \dots, x_{i-p}$  の連続函数プラスガウス白色雑音の形をしていることから常に満たされている. 従って我々のモデルの定常エルゴード条件は

$$\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \phi_p = 0$$

の固有根が全て単位円の内側にあることであるということが出来る (Ozaki [15]).

モデル

$$(5.3) \quad x_i = (\phi_1 + \pi_1 e^{-x_{i-1}^2}) x_{i-1} + \dots + (\phi_p + \pi_p e^{-x_{i-p}^2}) x_{i-p} + \varepsilon_i$$

の白色雑音  $\varepsilon_i$  を無くするとこれは  $x_i$  の非線型差分方程式を与える. この解  $x_i$  の幾何学的性質は  $\varepsilon_i$  によって駆動された場合の確率過程  $x_i$  の行動を予測する上で重要な情報を与えることは言うまでもない. (5.3) が極限周期構造を持つ為の必要条件は

$$\text{i) } \lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \phi_p = 0 \text{ の全ての根が単位円の内側にある,}$$

$$\text{ii) } \lambda^p - (\phi_1 + \pi_1) \lambda^{p-1} - \dots - (\phi_p + \pi_p) = 0 \text{ の少なくとも1個の根が単位円の外にあること,}$$

であることは前節のみた. しかしここで注意しなければならないのは上の二条件を満たしていても  $x_i$  はある非ゼロ特異点  $\xi$  に収束することがあるということである. 特異点  $\xi$  が存在すればそれは

$$\xi = (\phi_1 + \pi_1 e^{-\xi^2}) \xi + \dots + (\phi_p + \pi_p e^{-\xi^2}) \xi$$

を満たすことから

$$0 < (1 - \sum \phi_i) / \sum \pi_i < 1$$

のとき

$$\xi = \pm \sqrt{-\log\{(1-\sum \phi_i)/\sum \pi_i\}}$$

で与えられる. 非ゼロ特異点  $\xi$  が存在してもそれは不安定特異点であれば解  $x_t$  は  $\xi$  には収束せず従って極限周期を持つ場合がある. 例えばモデル

$$x_t = (\phi_1 + \pi_1 e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-1} + (\phi_2 + \pi_2 e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-2}$$

の場合その非ゼロ特異点の安定条件は

$$h_1 = (\pi_1 + \phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1) / (\pi_1 + \pi_2) + 2(1 - \phi_1 - \phi_2) \log\{(1 - \phi_1 - \phi_2) / (\pi_1 + \pi_2)\}$$

$$h_2 = (\pi_2 + \phi_2 \pi_1 - \phi_1 \pi_2) / (\pi_1 + \pi_2)$$

とするととき

$$A^2 - h_1 A - h_2 = 0$$

の固有根が単位円の内側にあることであることは容易にわかる (Ozaki [14]). 次のモデル

$$(5.4) \quad x_t = (1.57 + 3e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-1} - (0.83 + 2e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-2}$$

は非ゼロ特異点は存在するが安定条件を満たさず図 11 にみられるように不安定特異点の近くから出発した解は振動をはじめ極限周期へと近づいて行く. 一方モデル

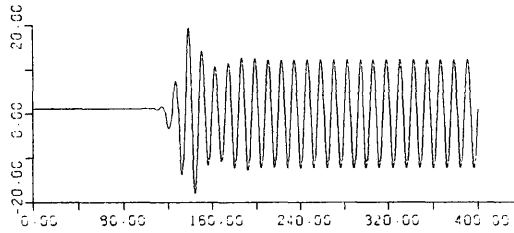


Fig. 11  $x_t = (1.57 + 3e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-1} - (0.83 + 2e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-2}$

$$(5.5) \quad x_t = (1.8 + 4e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-1} - (0.97 + 0.1e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-2}$$

は非ゼロ特異点が存在して安定条件を満たし, 従って図 12 にみられる如く解  $x_t$  は振動しつつ安定特異点へと収束する. モデル (3.9) のような高次の Hermite 型多項式を用いたモデルは特異点に関しより複雑な構造を与えるであろうことは容易に想像できる. 例えば簡単な場合でも次のようなモデル

$$(5.6) \quad x_t = (0.8053 + 4x_{t-1}^2 e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-1}$$

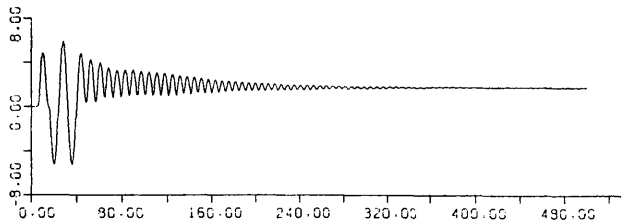


Fig. 12  $x_t = (1.8 + 4e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-1} - (0.97 + 0.1e^{-x_{t-1}^2}) x_{t-2}$

は三つの安定特異点  $\xi_0=0$ ,  $\xi_1^+=2.1294\dots$ ,  $\xi_1^-=-2.1294\dots$  と二つの不安定特異点  $\xi_2^+=0.226\dots$ ,  $\xi_2^-=-0.226\dots$  を持ち, 白色雑音入力  $\varepsilon_t$  によって駆動されるとき, 図 13 にみられるように安定特異点のまわりをふらつきながら時おり一つの安定特異点から他の安定特異点の周辺へ飛躍したりしつつも全体としては定常なエルゴード確率過程を与える.

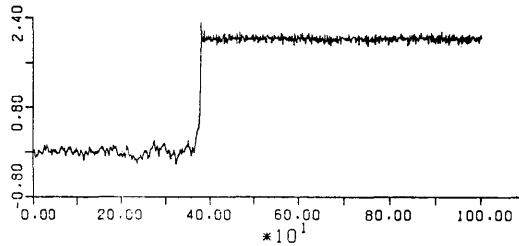


Fig. 13  $x_t = (0.8053 + 4x_{t-1}^2)x_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_t \sim N(0, 0.002)$

安定性の問題は極限周期に関しても問題となる. 極限周期は非線型差分方程式の周期解であるが周期解の中には不安定周期解もあることに注意しなければならない. 周期解の安定条件は連続微分方程式に関しては Poincaré [20] によって与えられているがモデル (5.3) の場合は周期解の安定条件は差分型の変分式を考えることにより容易に与えることができる (Ozaki [17]).

以上, モデル (5.3) の白色雑音が無い場合, つまり決定論的非線型差分方程式の解についてみてきたが, 白色雑音入力がない場合の出力  $x_t$  は特異点収束か極限周期の決定論的動きだけをするとに限らない. 定常条件を満たすことから解  $x_t$  が発散することはないが極限周期の周期が有限でない場合, つまりカオスを生成することも可能である. Li and Yorke [10] は差分方程式がカオスを生成する為の条件を議論している. 例えば次のモデル

$$(5.7) \quad x_t = (0.5 - 9e^{-x_{t-1}^2})x_{t-1}$$

はカオスを生成する (Tong and Pemberton [23]). このモデルは固有限が振幅に従属して 0.5 と  $-8.5$  の間を変化すると考えることができる. 従って固有根が重根を持ちそれらが 0.5 と  $-8.5$  の間を動くモデル

$$(5.8) \quad x_t = (1 - 18e^{-x_{t-1}^2})x_{t-1} - (0.25 - 72.5e^{-x_{t-1}^2})x_{t-2}$$

も, もちろんカオスを生成するであろうことが推察できる. 図 14 は (5.8) の解  $x_t$  を表わし, 現にカオスの様相を示している. これらの事実を見て確率過程の観測値としての時系列は決定論的差分方程式で表現すべきであり, 白色雑音で駆動される非線型時系列モデルは否定されるべきであると考えるのは早計であろう. カオスの差分モデルの問題点は統計モデルと違ってパ

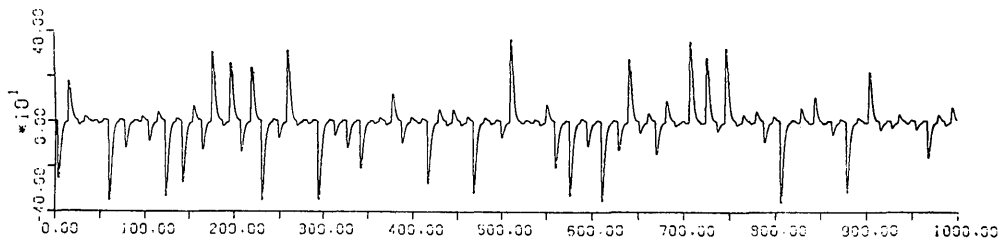


Fig. 14  $x_t = (1 - 18e^{-x_{t-1}^2})x_{t-1} - (0.25 - 72.5e^{-x_{t-1}^2})x_{t-2}$

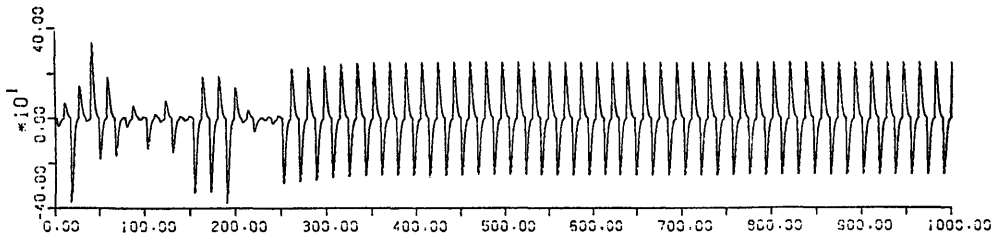


Fig. 15  $x_t = (0.95 - 16.9e^{-x_{t-1}^2})x_{t-1} - (0.25 - 72.5e^{-x_{t-1}^2})x_{t-2}$

ラメータに関して非常に不安定であることである。例えば (5.8) のかわりに少しパラメータを動かしたモデル

$$(5.9) \quad x_t = (0.95 - 16.9e^{-x_{t-1}^2})x_{t-1} - (0.25 - 72.5e^{-x_{t-1}^2})x_{t-2}$$

を考えるとこれはもはやカオスではなく図 15 のような決定論的軌道安定極限周期を生成する。モデル (5.9) の固有根は 0.5 と -8.5 に非常に近い二対の互に共役な複素根の間を振幅に従属して変化している。カオスは一般に固有根の一つが負の実軸に近づく時のみ起ることも経験的に確かめられており、カオスを生成するのは定常条件を満すパラメータ空間の中のごく狭い限られた領域のパラメータである。固有根が負の実軸に近づくということは時系列の周波数が最高域の 0.5 に近づくということでありこのような高周波的な動きは連続なデータの場合、観測の時間間隔を十分短くとることによって避けられるということに注意しておきたい。

## 5. 結 語

白色雑音に駆動される線型モデルとしての自己回帰モデルや自己回帰移動平均モデルの有用性は多くの分野で確められており疑うべくもない。本稿では線型乱振動の非線型拡張としての Duffing 型、van der Pol 型の非線型乱振動の為のモデルとして、自己回帰モデルの拡張としての非線型モデルを提案しその統計的あてはめ法、モデルの性質などについて議論した。Hermite 型多項式を用いたモデルは一つの近似方式であってももちろん同じ考え方に立って他のモデルを考えることもできる (Ozaki [18])。非線型時系列の研究はまだ始まったばかりである。確率現象としての高調波の問題、パイスベクトルとの関連、カオスとの関連など問題は多い。今後の発展が期待される。

## 参 考 文 献

- [1] 赤池・中川 (1972). ダイナミックスシステムの統計的解析と制御, サイエンス社.
- [2] Akaike, H. (1977). On entropy maximization principle, *Applications of Statistics* (ed. P.R. Krishnaiah), North-Holland.
- [3] Billingsley, P. (1961). *Statistical Inference for Markov Processes*, Holt, New York.
- [4] Boltzman, L. (1877). Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmethorie und der Wahrscheinlichkeitrechnung respective den Satzen über das Warmegleichgewicht, *Wiener Berichte*, 76.
- [5] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1970). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco.
- [6] Campbell, M.J. and Walker, A.M. (1977). A survey of statistical work on the Mackenzie river series of annual Canadian lynx trappings for the year 1821-1834, and a new analysis, *J. R. Statist. Soc., A*, **140**, 411-431.
- [7] Duffing, G. (1918). *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz*, F. Vieweg u. Sohn: Braunschweig.

- [8] Haggan, V. and Ozaki, T. (1978). Amplitude-dependent AR model fitting for non-linear random vibrations, *Technical Report No 103*, Department of Mathematics (Statistics), UMIST, to appear in *Biometrika*, **67**.
- [9] Haggan, V. and Ozaki, T. (1979). Amplitude dependent exponential AR model fitting for non-linear random vibrations, *Proc. of the International Time Series Meeting*, Nottingham, March, 1979, North-Holland.
- [10] Li, T-Y and Yorke, J.A. (1975). Period three implies Chaos, *Amer. Math. Monthly*, **82**, 985-992.
- [11] Moran, P.A.P. (1953). The statistical analysis of the Canadian lynx cycle, *Aust. J. Zool.*, **1**, 163-173.
- [12] Ozaki, T. and Oda, H. (1978). Non-linear time series model identification by Akaike's Information Criterion, *Information and Systems* (ed. B. Dubuisson), Pergamon Press.
- [13] Ozaki, T. (1980). Non-linear time series models for non-linear random vibrations, *J. Appl. Prob.*, **17**, 84-93.
- [14] Ozaki, T. (1979 a). Stability analysis of non-linear time series models, *Research Memorandum No. 150*, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- [15] Ozaki, T. (1979 b). A note on ergodicity and stationarity of non-linear time series models, *Research Memorandum No. 152*, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- [16] Ozaki, T. (1979 c). Statistical analysis of Duffings Process through non-linear time series models, *Research Memorandum No. 151*, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- [17] Ozaki, T. (1979 d). Statistical analysis of perturbed limit cycle processes through non-linear time series models, *Research Memorandum No. 158*, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- [18] Ozaki, T. (1979 e). Non-linear threshold AR models for non-linear random vibrations. *Research Memorandum No. 157*, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, to appear in *J. Appl. Prob.*
- [19] Pandit, S.M. and Wu, S.M. (1975). Unique estimates of the parameters of a continuous stationary stochastic processes, *Biometrika*, **62**, 497-501.
- [20] Poincaré, H. (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, T. 1, Gauthier-Villars, Paris.
- [21] Sanov, I.N. (1961). On the probability of large deviations of random variables, *IMS and AMS Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 213-244.
- [22] Tong, H. (1977). Some comments on the Canadian lynx data, *J. R. Statist. Soc., A*, **140**, 432-436.
- [23] Tong, H. and Pemberton, J. (1979). On stability and limit cycles of non-linear autoregression in discrete time, *Technical Report No. 120*, Department of Mathematics (Statistics), UMIST.
- [24] Tweedie, R.L. (1975). Sufficient conditions for ergodicity and stationarity of Markov chains on a general state space, *Stoch. Proc. Appl.*, **3**, 385-403.
- [25] van der Pol (1927). Forced oscillations in a system with non-linear resistance, *Phil. Mag.*, S. 7., **3**, 65-80.