統計的推論のパラダイムの変遷について

統計数理研究所　赤　池　弘　次

(1980年1月　受付)

On the Transition of the Paradigm of Statistical Inference

Hirotugu Akaike
(The Institute of Statistical Mathematics)

The paradigm of the conventional Fisherian statistics, the statistical model building by testing and estimation, is reviewed and it is argued that its main limitation is due to the lack of the recognition of the objective nature of log likelihood by Fisher. The same limitation is found in the Bayesian approach based on subjective probability.

The use of a randomizer to compensate for the lack of necessary information in making a decision on the preference between two alternatives illustrates that, contrary to L.J. Savage's argument, the analysis of preference does not necessarily leads to a proper probability distribution.

Based on these observations it is argued that the technical contribution of Bayesian statistics is the introduction of a more general and natural model for the use of the information supplied by a likelihood function and that the concept of the likelihood of a Bayesian model should positively utilised in developing a prior distribution.

It is concluded that the Bayesian modeling supported by the objective interpretation of likelihood will constitute a new paradigm of statistics.

1. はじめに

統計理論の展開に際して研究者の心理の役割りを積極的に考慮するものとして主観確率にもとづくベイズ理論の立場がある．この立場では，すべて未知なものを確率変数と考える．未知のパラメータがあればかならずその分布を想定し，観測によって得られるデータとベイズの定理とによってこの事前分布を事後分布に変換することで統計のすべてがつくされると考えるわけである．

R.A. フイッシャーがベイズ理論の実用上の難点を論じ，直接確率概念によらない推論の方式として有意性検定あるいは統計的推定の理論を展開したことはよく知られている．フイッシャーの影響が強まるにつれ，その客観性を重視する態度が主観的側面を持つベイズ理論に対立するものとして強調され，これがいわゆる正統派の立場と目されるようになった．しかし B. ド・フィネティ，L.J. サベジ，D.V. リンドレイ等による主観的，あるいは個人的，ベイズ理論の鼓吹により，統計理論研究者が大きく客観主義と主観主義のふたつの立場に分れているとみなされるのが現状である．

統計理論研究者のこの動向は，一般にそれぞれの時点における支配的な哲学上の立場の反映と見ることもできるが，逆に確率あるいは統計に関する概念の深化が哲学的な問題を提起しつゝあると見ることもできる．こゝでは上記のふたつの立場が統計理論の発展に対して与える積極的な影響と阻害的な影響とについて概観することを試みる．特に，従来見逃されてきた，統計的モデルの構成に際して研究者の心理が果す役割りに注目し，主観的立場と客観的立場との関係を可能な限り明らかにして今後の統計理論の動向を占うことにする．このためまずフイッ

シャーの理論の限界を論じ，ベイズ理論の基礎としての主観確率の理論に検討を加え，これらを統合する形で現在展開しつゝある新しい統計的モデル構成の一般的傾向について略述する．

2. フイッシャーによる統計的推論の図式

フイッシャーによる統計的推論の図式は図1のようになっている．SPECIFICATION の段階で分布の型 $f(\cdot|\theta)$ を想定し，ESTIMATION の段階でパラメータの推定値 $\theta(x)$ をデータ x の関数として決定する．TEST の段階でこのようにして得られた分布 $f(\cdot|\theta(x))$ が良くデータに適合しているか否かを検定し，適合不良と判定されればふたたび SPECIFICATION の段階へもどって $f(\cdot|\theta)$ を考え直し，適合良と判定されれば $f(\cdot|\theta(x))$ が最終結果として採用される．

この図式から明らかなことは，SPECIFICATION の段階における分布型 $f(\cdot|\theta)$ の選択に著しい主観性が見られることである．当然のことながら，考えられる $f(\cdot|\theta)$ の範囲の決定には研究者の主観的な知識と判断が必要とされる．さらに検定による型の決定という方法自体が極めて主観的に運用されていることは良く知られている通りである．

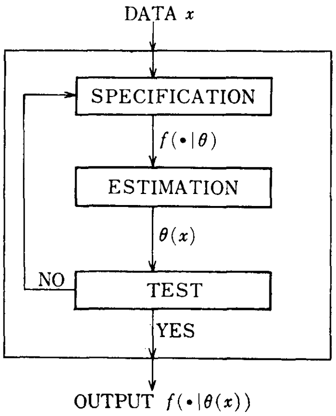

図1 フイッシャーの統計的推論の図式

さて，上記フイッシャーの図式は，現実の科学的研究における研究者の経験的な情報処理の過程を近似的に描き出したものにすぎない．すぐれた研究者はすぐれた情報処理を行なうわけで，この図式はすぐれた研究者の経験を定式化して他の人々にも有用ならしめようとしたものと見ることができる．すなわち，フイッシャーの図式はすぐれた研究者の心理の動きにひとつの客観的な表現を与えようとしたものといえる．客観的な推定あるいは検定の方法が与えられるとすると，研究者にとって最も重要な仕事は $f(\cdot|\theta)$ の範囲の決定であることになる．ここがこの図式を実際的に利用しようとするとき主観的要素が決定的に介入してくる部分である．

3. フイッシャーと尤度

フイッシャーの推定論が尤度概念に基礎を置くものであることは良く知られている．ベイズ理論による先験確率にもとづく推論の含む恣意性を避けるものとして，尤度にもとづく推定の理論が展開されたわけである．先験確率，あるいは事前確率，の主観性を排除し，相対頻度の極限という客観的に理解可能な確率概念に基礎を置く尤度によって理論が展開されるところにこの理論の特徴がある．

フイッシャーの理論において，たとえ尤度の定義が客観的な確率概念にもとづいて与えられたとしても，前節で述べたように分布型 $f(\cdot|\theta)$ の想定の主観性からは逃れることはできない．この点に関連して，フイッシャー自身の尤度の解釈そのものが極めて主観的なものであったことを見逃すことはできない．フイッシャーはその著書『統計的方法と科学的推論』において，ベイズの業績の議論に際して，確率がある意見の強さ，あるいは判断の状態の程度を表わしているものであるということにはたぶんすべての人が賛成するであろうと述べ，さらに数学的尤度について，「数学的確率と同様に，明確な意味をもつ“合理的な信念の尺度”として役立つ」と述べている．しばしば見られるようにフイッシャーの統計理論を主観的ベイズ理論を排した客観的理論と単純にみなすのは，統計的方法を実用する場面での解釈の問題に関する主観性に

ついての彼の慎重な態度を無視した議論である．

尤度概念の積極的利用がフイッシャーの統計学における最も著しい貢献であることは明らかと思われる．しかし1912年の論文 "On an absolute criterion for fitting frequency curves" をはじめとして，対数尤度がより自然な criterion として登場することを見逃すことはできない．フイッシャーは彼の導入した情報量と，統計力学におけるエントロピーとの奇妙な相似性に気附いていた．彼の好んで用いた記号 $S(\log f)$ は，独立な観測値の組に関する対数尤度を示す．標本の大きさが大となるとき，$S(\log f)$ はその期待値の推定値と考えられる．

いまこゝで $f=f(\cdot|\theta)$ とし，データ x の真の分布を g とする．$\log f$ の期待値は

$$\mathrm{E}\log f(x|\theta)=\int g(x)\log f(x|\theta)\,dx$$

によって与えられる．この量は本質的には L. ボルツマンによって導入された熱力学的エントロピーの確率論的表現そのものである．$\mathrm{E}\log f(x|\theta)-\mathrm{E}\log g(x)$（これを $g(\cdot)$ の $f(\cdot|\theta)$ に関するエントロピーと呼ぶ．ただし E は $g(\cdot)$ に関する平均である．）が，$f(\cdot|\theta)$ という分布から多数の独立な標本がとられるときその標本分布として $g(\cdot)$ が得られる確率の対数（に比例するもの）と解釈できる．ボルツマンは熱力学的エントロピーの確率論的解釈を，「いわゆる分布の確率」の対数として与えている．

フイッシャーは，平均対数尤度とボルツマンによるエントロピーの確率的表現とのこの同一性に気がついていなかった，と思われる．これが尤度の持つ客観性の積極的利用の妨げとなり，フイッシャーの理論の限界を形作っていることが見られる．

4. カイ2乗検定

かの有名な書『研究者のための統計的方法』を見るとき，最も印象的な部分として多くの興味ある数値例による検定の説明がある．こゝで用いられる検定はその多くがいわゆるカイ２乗検定である．

カイ２乗検定はもともと K. ピアソンによって導入された．これを論じたピアソンの1900年の論文は，統計学発展の歴史に一時期を画する偉大な貢献である．検定に対する種々の批判あるいは不信の声のある中で，おそらく，独立性の検定，一様性の検定，適合度の検定等の名の下に用いられるカイ２乗検定ほど実用的に多くの人々に用いられている統計量は他に例が無いであろう．

このカイ２乗検定について，「カイ２乗検定はたしかに役に立つ．しかし一体何をこれによって測っているのであろうか？」という疑念が繰返し表明されている．これは，検定という操作を無反省に機械的に適用する人でない限り，当然抱くべき疑問である．この疑問に対する答として，「これらのカイ２乗検定は，想定する仮説による制約に従って構成される統計的モデルが，より制約を受けないモデルに比してエントロピーの意味でどの程度適合度が低下しているかを測るものである」とするのが筆者の立場である．エントロピー概念の欠如がこのように明快なカイ２乗検定の解釈を妨げてきたのである．

5. 検定と推定の分離

フイッシャーは，彼の推定論が分布型 $f(\cdot|\theta)$ が既知との想定の下でのパラメータの推定に関するものであるとしながらも，将来分布型そのものの推定を含むより一般的な推定の理論が展開される可能性に目をつむってはならないと述べている．図１の図式によれば，与えられるデータは x であり，最終生産物は $f(\cdot|\theta(x))$ である．このことは，分布型の決定までを含めた推定の問題が，この図式において解決されていることを示している．

この事実に気がついて見ると，図1のTESTと表示されている部分が分布型の決定を実現していることがわかる．こうして，検定は実はフイッシャーのいう分布型の推定を含むより一般的な推定の実現に利用されていることが明らかとなる．こゝでは，検定は常にふたつ以上の分布型，あるいは統計的モデル，の比較を実行するために利用されている．

カイ2乗検定に対して前節で述べたような解釈が可能な場合を考えると，検定はエントロピーの意味で最良な適合を示す分布型，あるいは統計的モデル，の推定を実現するものであると解釈される．エントロピー概念の認識の欠如が，検定と推定との間のこの直接的な関係の解明をさまたげてきたわけである．これがフイッシャーの推定論に不自然な形態を与え，推定と検定というふたつの概念の便宜的な併置という，以来伝統的なものとなる統計的推論の定式化が行なわれたのである．この便宜的定式化が検定の推定論的本質を覆いかくし，その後数十年間にわたる統計理論の研究の停滞を引き起すこととなった．これは，エントロピーあるいは対数尤度の持つ"主観的に選択されたモデルの客観的評価"という特性を把握しえなかったことから生じた事態であるとみなすことができる．

6. ベイズ理論

実用的な観点から見るとき，最尤法の研究はフイッシャーの最も著しい統計学への寄与と考えてよいであろう．これは与えられたモデルのパラメータについて，先験分布の考えをかりることなく適用できる方法であり，無数の実際的問題に成功的に適用されてきた．最尤法ならびに有意性検定に関するフイッシャーの理論の展開は，ベイズの理論をいたずらに無視することなく，これを十分に理解しながら，その難点を回避するという形で具体化されている．

フイッシャーがより一段とベイズの方法に近づくのは，単に最尤推定値の利用に止まらず，尤度関数の形全体を推論の目的のために使おうとするときである．最尤推定の方法は極めて実用上有効ではあったが，これを小サンプルの場合に適用しようとすると問題が生じる．各種の数値的方法の発展にともない，極めて多くのパラメータを持つ複雑な統計的モデルが実用されはじめると，これまでの常識では極めて大きなサンプルと考えられていたデータが実は小サンプルであることに気付く．逆に言えば，現在得られているデータが許す範囲で可能なかぎり複雑なモデルをあてはめようとするため，いわゆる大サンプルという場面が生じなくなってきたといえる．こうなると，最尤法の直接的利用によっては有効な結果が望まれなくなり，最尤法に代って尤度関数の与える情報を極限迄利用する方法を発展させる必要性が生じてくる．

分布型 $f(\cdot|\theta)$ によって与えられるモデルの族を考える場合，ひとつの固定した θ で定まるモデルのデータ x に関する尤度は $f(x|\theta)$ で与えられる．θ の選択について考えるとき，もし θ の先験分布として $p(\theta)$ が与えられる場合，データ x が求められると

$$p(\theta|x)=\frac{f(x|\theta)p(\theta)}{p(x)}$$

によって θ の事後分布が与えられる．ただしこゝに

$$p(x)=\int f(x|\theta)p(\theta)d\theta$$

である．

いわゆるベイジアンの立場は，関心のある事象を表現するに必要な θ を考え，その先験分布 $p(\theta)$ がデータ x によって事後分布 $p(\theta|x)$ に変換されるという形でデータ x の与える情報は利用されるべきであるというにつきる．実用の立場から考えると，$p(\theta)$ の決定が問題である．この点をめぐる議論はベイズ以来たえることなく続けられて現在に至っている．

先験分布 $p(\theta)$ の決定の問題を別とすれば，ベイズの方法は θ の関数として見たときの尤度

関数 $f(x|\theta)$ の与える全情報の適切な利用法を与えるものといえる．θ に依存する量 $h(\theta)$ を考えるとき，

$$\mathrm{E}_x h(\theta)=\int h(\theta)\,p(\theta|x)\,d\theta$$

によって x が与えられたときの $h(\theta)$ の期待値が定義されるが，$p(\theta|x)$ の定義より，この期待値は尤度関数 $f(x|\theta)$ の全般的な動きの情報に依存して定まることがわかる．$f(x|\theta)$ を最大にする θ の値を $\theta(x)$ とすると，この最尤推定値 $\theta(x)$ を用いて定義される $h(\theta(x))$ は尤度関数の局所的な情報しか利用していない．こゝに適切な先験分布にもとづくベイズの方法の最尤法に対する優位性を示唆するものがある．

次の典型的な例を考えよう．与えられたデータ $\{y(t)\,;t=1,2,\cdots,N\}$ に対して，$y(t)$ が互に独立に平均 $m(t)$，分散 σ^2 を持つガウス分布に従うものとする．問題は $m(t)$ の推定である．しばしば $m(t)$ は低次の t の多項式であるとしてこの問題が処理される．しかし実際問題における真の $m(t)$ はおそらく無限次の t の多項式でしか表現できないようなものであろう．そこで $m(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_kt^k$ とおく場合，k として可能な限り大きな値をとることが望まれる．最尤法を適用すれば $a_0,a_1,\cdots,a_k$ の推定値は最小2乗解として求められるが，もし k が $N-1$ より大きい場合には解が確定しなくなる．$k=N-1$ の場合には対応する $m(t)$ の値が丁度 $y(t)$ に一致する結果となり，対応する σ^2 の最尤推定値は0となる．

もしこゝで最尤推定値が有意味のものとなるようにするために k を小さく取ることにすると，これは構造を恣意的に制約したモデルを想定することとなり，その結果特定の偏りを導入することになる．そこでいま試みに $k=N-1$ とおくことにしよう．これは $\{m(t)\,;t=1,2,\cdots,N\}$ を直接パラメータとして考えるに等しい．そこで多項式による表現をやめて $m(t)$ 自身をパラメータと考えることにする．こうして得られる“自然な”モデルは，σ^2 も未知とするとパラメータの数が $N+1$ となって，データの数とパラメータの数とはほとんど一致する．このようなモデルにもとづく推論はもちろん最尤法に頼ることはできない．しかし種々のパラメータの組 $\{\sigma^2, m(t)\ (t=1,N)\}$ に対しその尤度は定義され，したがってこれらのパラメータに対する適当な先験確率を想定することができれば，ベイズの方法によって有意義な結果を得ることは可能である．こうしてベイズ的方法は最尤法では処理不可能な問題に対しても適当な解を与える可能性を持つことが明らかとなる．

7. 先 験 分 布

ベイズ的方法の実用に際して最大の問題となるのは先験分布の決定である．先験分布について通常よく見られる説明は，データの分布 $f(\cdot|\theta)$ は“客観的”な確率分布としての意味を持つものであり，先験分布 $p(\theta)$ はその人の“主観的”，あるいは個人的，確率分布を示すものであるというものである．このような説明がしばしばなされるのは，こういった説明が自然に見えるような事例によって説明がなされるからである．もし事実そのような場面が日常的に発生するものとすると，こゝに“客観的”確率と“主観的”確率というふたつの概念が存在することを認めないわけにはいかなくなる．いわゆる客観主義者はこのふたつの概念を客観確率の一方に統一しようとし，いわゆる主観主義者はこれらを主観確率の立場から説明しようとしてきたのである．

J. L. サベジはその著書『The Foundations of Statistics』を通じて最近のベイズ理論の普及に著しい影響を与えたが，その主観確率の存在を正当化するための議論には筆者には受け入れ難いものがある．それは彼が主観確率の存在を証明するための第1番目の前提条件としてあげる，“人の好み (preference) は線形順序の条件をみたしている”という想定が，対象の多面的な特

性が問題となる現実の選択の困難を無視したものであるからである．筆者は最近のベイズ理論国際研究集会において，この困難を多数の候補者からの嫁選びの困難にたとえて論じたが，主観主義の立場に立つ人々は，現実の困難はあるにしても理想としては順序がはっきりつくように指導するのが正しいとしてこれを問題としない．

さてサベジはある論文で，無作為化 (randomization) の有効性に言及し，これが有効であるにもかゝわらずそれを主観確率の立場が説明できないのは主観確率の理論が不完全だからだと述べている．さて無作為化とはひとことでいえばサイコロを振って決定を行なうことである．これの有効性を認めることは実はサベジの主観確率の理論全体をゆるがすことになる．サベジの第1前提条件に対する筆者の反論は，“ある行動の結果としてAとBとのふたつの中どちらか一方を獲得できると知っても，われわれはAとBとのどちらがより好ましいかを判定できないためにこの行動をとる決心がつかない場合がある”ということである．日常生活におけるこのような困難の例は無数にある．

いかに努力してもAとBとの優劣を決定するに十分な情報が得られない場合，人々はどのように行動してきたであろうか．古来このような場合に人々は占いその他の自己以外によるもっともらしい判断に頼る方法に頼ってきた．その最も安価なものがサイコロを振ることである．そこでは，たとえば(AとBとはどちらがよいとも言えない．→奇数の目ならA，偶数の目ならB，が良いとする．）という解決法がとられるのである．こゝではAとBとの何れがより好ましいかの判断が手持ちの情報によっては“不可能”な場合に，その情報の不足分をサイコロ投げの結果によって補い，それによってAとBとの優劣が決定されている．すなわち，好みの順序の決定が，サイコロという“確率機械”を使ってなされているわけである．サイコロという無作為化の道具 (randomizer) の必要性は，この場合好みの順序の一意的決定の不可能性に起因している．したがってこのようなサイコロの利用，すなわち無作為化，を認めることは，確定した好みの順序の存在というサベジの第一前提条件の不成立を認めることになる．前述のようなサイコロの利用は，歴史的にはサベジの理論あるいは確率論そのものに先行するものであることは確かであるから，好みの線形順序という性質にもとづいて確率が決定されるというサベジの理論は歴史的事実に一致しないといえよう．むしろサイコロのような客観的に多くの人々の経験によって確認された randomizer の利用を通じて“客観確率”の概念が成立し，これの選択問題解決への利用を通じて好みの確率的評価という概念が発生したものと見るべきであろう．すなわち，AとBとの優劣は一意的には確定しがたく，その決定に randomizer を用いることにするとき，randomizer のAとBとに与える“客観確率”をどのように決定するかを考慮することによってAとBとの“主観確率”が定まる．すなわち“客観確率”を用いて“主観確率”が測られていると見ることができる．こゝに両者が同等視される根拠がある．このようなふたつの“確率”の間の関係はI.ハッキングによって『The Emergence of Probability』で指摘されているが，われわれは特に randomizer が“すべての可能性を無視することなく”選択を実現する合理的な方法として人間社会に受け入れられてきた点を重視し，これを確率そのものによって選択が決定されるとするサベジの理論に対する反証と見るのである．

さて，この主観確率はあくまでもその確率分布にしたがう randomizer による決定を認めるという意志の表現である．この分布をベイズ的方法の先験分布として用いる場合，その方法の結果を評価するためには，この先験分布を実現する randomizer が存在すると想定して各種の結果を評価するという思考実験により，この先験分布によって表現される“主観確率”の分布の妥当性の検討がなされなくてはならない．この場合の先験分布が，ある固定した客観確率の分布として与えられるものでないことは当然である．先験分布が客観確率の分布として与えられる場合に対してしかベイズの方法の適用を認めないという立場は，サベジの主観確率の理論

と同じく，前述のサイコロ利用の歴史を無視するものである．一方多くの主観主義者は，サイコロがAとBとに与える客観確率はそれによって予期される結果が現在当事者が持っている情報あるいは知識によくなじむように決定されるという事実を見落し，ベイズの方法における先験分布 $p(\theta)$ の決定がそれにもとづいて得られる (x,θ) に関する分布 $f(x|\theta)p(\theta)$ が現在得られている知識とよくなじむようになされるべきだという当然の事実を認めない．しばしば見られる，$p(\theta)$ は $f(x|\theta)$ に関係なく決定されるべきであるという主観主義者の主張がこの事実を示している．こうして $p(\theta)$ 決定の主な手掛りが失われてきたのである．

8. 変則先験分布

前節では，あるAとBとの優劣の決定をサイコロを投げて決定する場合，AとBとにわりあてられるサイコロの客観確率によってAとBとの主観確率が定まるかのように述べた．これは実は正しい記述ではない．

A, B, C, ……等多くの比較の対象がある場合，これらの任意のひとつを X あるいは Y で表わし，各 X に正の値を与える関数 $\pi(X)$ を考える．X と Y との優劣決定のために用いられるサイコロの X と Y とにわりあてる客観確率が $p(X)=\pi(X)/(\pi(X)+\pi(Y))$, $p(Y)=\pi(Y)/(\pi(X)+\pi(Y))$ で与えられるとすれば，これによってサイコロを用いて行なう任意の X と Y との優劣評価の手順は確定する．前節の議論だけからでは，この $\pi(X)$ が数学的確率の条件を満す必要性は認められない．$\pi(X)/\pi(Y)$ が X の Y に対する確率の比を与えさえすればよいわけである．

このことは，いわゆるベイズ統計において，先験分布 $p(\theta)$ の積分がかならずしも1である必然性が無いことを意味する．もしこの積分が有限であれば，それによって正規化した $p(\theta)$ を考えれば形式的には確率分布となる．もし $p(\theta)$ の積分が無限大となる場合にはこのような正規化は不可能である．これが従来のベイズ統計において improper prior distribution（変則先験分布と訳しておく）と呼ばれるものである．

変則先験分布 $p(\theta)$ については，$f(x|\theta)p(\theta)$ は (x,θ) の確率分布にはならない．したがって当然 $p(\theta)$ の選択にあらためて特別の考慮が必要であり，また形式的にベイズの定理を適用してもその結果に対して通常の条件附確率に期待できる特性が保証されないことも当然である．この点に関する誤解は一般的で，ベイズ理論に関する教科書に多くの混乱を見ることができる．

9. 新しい統一化の方向

以上述べてきたことから，フイッシャーの流れを汲むいわゆる正統派の立場に立つ客観主義者も，ド・フィネティあるいはサベジの流れを汲む主観主義者も，いずれの主張も一方的には正しくないと判断するのが妥当であろう．客観的立場を強調したと考えられるフイッシャー自身が，尤度の極めて主観的な解釈にとどまり，主観的立場を強調するサベジが無作為化の有効性を是認する等の事実を見ると，いわゆる客観主義の立場あるいは主観主義の立場を終始貫いて統計の基礎づけを行なおうとすることが如何に困難なものであるかが明らかである．

では今後われわれの進むべき方向は何であろうか．基礎的概念に混乱の生じるとき，これからの脱却に有効なものは歴史的視点に立つ考察である．近来のベイズ統計の台頭は，技術的に見れば統計的モデルの複雑化にともなうフイッシャーによる統計推論の範例（パラダイム）の無力化に起因する．多パラメータ化にともなう最尤法の無力化がその典型である．ベイズ統計がその優位性を示すためには，当然この典型的な問題に対して有効な方法を提供しなくてはならない．

ベイズ統計を唱える人は，ド・フィネティの著しい例を除き，しばしばデータの分布 $f(\cdot|\theta)$ に客観性を仮定する．現実の場面においては $f(\cdot|\theta)$ の選定自体が最も重要な事前情報の適用分野であり，したがって最も主観的である．主観主義の人々は，しばしばこの主観性を軽視するために，かえって尤度 $f(x|\theta)$ の持つ“データ x による $f(\cdot|\theta)$ の良さの客観的評価”という特性を見落す．これは程度の差はあるが，フイッシャーの尤度に対する主観的理解と軌を一にするものである．主観確率の有効性を，既にその有効性が確認されている客観確率との対応を通じて明らかにすることがベイズ統計の発展のために必要である．

ベイズ統計の統計学への技術的な寄与は何であるか．それは先験分布という極めて自然な，われわれの心理的期待を良く表現する要素を統計的モデル構成の分野に積極的に導入したことである．$f(\cdot|\theta)$ と $p(\theta)$ とによって与えられる統計的モデルの良さは，モデルの尤度

$$p(x)=\int f(x|\theta)\,p(\theta)\,d\theta$$

によってデータを通じて客観的に評価される．こうしてフイッシャー流の方法を，いくつかの $p(\theta)$ の集りによって表現されるモデルの族に対して展開していくことが容易に実現される．

以上に述べられたベイズ模型の利用は単に可能性の議論にとどまることなく，既に多くの実用的な結果を生みだしている．特に通常の少数パラメータの考えに立つモデル構成では取扱い困難な非定常時系列のモデル化にその威力を発揮しつゝある．統計的推論のパラダイムは，拡張されたモデルの尤度という概念を中心に着実に書換えられつゝある．こゝでは各研究者の経験，知識等が，心理的評価の形をとって直接モデルの構成に投入される．このようにして得られたモデルは，更に客観的な評価の過程を経て，実用に供されていくのである．