変動係数の分布の近似とその評価

統計数理研究所　牛　沢　賢　二*

(1979年5月　受付)

Approximate Distributions of the Coefficient of Variation and their Evaluation

Kenji Ushizawa
(The Institute of Statistical Mathematics)

Usefulness of the coefficient of variation (C.V.) is discussed by Masuyama [5] and others in relation to the biochemical individual variability. The distribution of C.V. and its approximation was given by McKay [6], furthermore Iglewicz and Myers [3] compared the several approximations with exact percentage points, where their definition of C.V. is different from McKay's one. In this note, using the McKay's definition we consider the absolute value and derive the exact distribution which is expanded in infinite series in Section 2. In Section 3, we propose newly two types of the approximation formula for the distribution, i.e. normal type and χ^2 type, and comparing them with the exact distribution we discuss the quality of those approximations in Section 4. (Now at the SANNŌ Institute of Business Administration.)

1. 序

変動係数の有用性についての議論が生体の個体差に関連して増山 [5] 等によって行なわれている．また正規母集団からの標本にもとづく分布及び近似式は McKay [6] によって与えられ，その他の近似式も含めての精度の評価は Iglewicz と Myers [3] によってなされた．ところで Iglewicz の定義は McKay のとは異なり，絶対値をはずした形である．ここでは変動係数をばらつきの1つの尺度とみなす観点から McKay の定義に従い，2節でその分布を数値計算の可能な表現で与え，3節では McKay 等の近似式の概略を述べるとともに，新たにこれらの近似式よりも簡便な正規型，カイ2乗型の近似式を提議する．4節では数値計算の結果と比較してそれらの近似式の特徴について考察を行なう．

2. 標本変動係数の分布

確率変数 $X_i\,(i=1\sim n)$ が互いに独立に正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従うとき

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad , \qquad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

は独立で，$\bar{X}$ は $N(\mu,\ \sigma^2/n)$，$(n-1)\ S^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う．いま $n\bar{X}^2/\sigma^2$ は非心 χ^2 分布であるから

$$U=\frac{\dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2}{\dfrac{n}{\sigma^2}\bar{X}^2}=\frac{n-1}{n}\frac{S^2}{\bar{X}^2}$$

---

* 現在，産業能率大学・地域科学研究所

は自由度 $(n-1,\ 1)$，非心度 $\lambda=n\,\mu^2/\sigma^2$ の非心 F 分布に従う．このことから

$$V=\frac{S}{|\bar{X}|}\qquad \text{(McKay の定義，Iglewicz は } \frac{S}{\bar{X}} \text{ と定義)}$$

の分布は

$$f(v)=\sum_{k=0}^{\infty}2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{(n-1)/2}\frac{e^{-\lambda/2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!\,B\left(\frac{n-1}{2},\ k+\frac{1}{2}\right)}v^{n-2}\left(1+\frac{n-1}{n}v^2\right)^{-(n/2+k)}\qquad (v\geq 0)$$

となることを容易に示すことができる．また累積密度関数は次のようになる．

(2.1)(注)
$$F(v)=\int_0^v f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda/2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k\,!}I_u\left(\frac{n-1}{2},\ k+\frac{1}{2}\right)$$

ここで，$I_u\ (p,\ q)$ は不完全ベータ関数比

$$I_u\ (p,\ q)=\frac{1}{B\ (p,\ q)}\int_0^u x^{p-1}\ (1-x)^{q-1}\,dx,\quad 0<u<1$$

であり，また

$$u=\frac{n-1}{n}v^2\Big/\left(1+\frac{n-1}{n}v^2\right)$$

である．以下，母変動係数を $r\ (=\sigma/\mu)$ で表わす．

(注)

(2.1) 式を用いてのパーセント点の計算は，$r\ll 1$ を考えているので非心度 λ が大きく級数の収束が遅い．しかし，$I_u\ (p,\ q)<1$ でしかも $e^{-(\lambda/2)}\ (\lambda/2)^k/k!$ がポアソン分布の確率をあらわし λ が大きいとき正規分布に近づく（竹内（[7]，p.130）ことに注意すれば，必要な有効桁を得るために k についての無限級数において，どの辺の計算を実行すればよいかという見通しがつく。

実際の計算では，不完全ベータを超幾何級数に展開し，さらに Kummer 変換 [1] した次式による‘はさみうち法’で実行した．

$$F(v)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda/2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k\,!}\frac{2}{B\left(\frac{n-1}{2},\ k+\frac{1}{2}\right)}\frac{U^{(n-1)/2}}{n-1}(1-u)^{k-1/2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}-k\right)_l}{\left(\frac{n+1}{2}\right)_l}\left(\frac{u}{u-1}\right)^l$$

ただし

$$u=\frac{n-1}{n}v^2\Big/\left(1+\frac{n-1}{n}v^2\right),\quad (a)_l=a\cdot(a+1)\cdots(a+l-1),\quad (a)_0=1$$

各項の係数

$$E_k=\frac{e^{-\lambda/2}\ \left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k\,!\ B\left(\frac{n-1}{2},\ k+\frac{1}{2}\right)}$$

の計算は次の漸化式

$$E_0=\frac{e^{-\lambda/2}}{B\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{1}{2}\right)},\quad E_{k+1}=\frac{\lambda}{(k+1)\,(2k+1)}E_k$$

による．明らかに u によらない．また

$$A_l=\frac{(a)_l\,c^l}{(b)_l}\ \text{とすると，}\ A_{l+1}=\frac{(a+l)\,c}{(b+l)}A_l,\quad A_0=1$$

に気がつく．初期値としては $v_0=r\ (=\sigma/\mu)$ を採ることにより計算した．

3. パーセント点の近似

McKay [6], Iglewicz と Myers [3] が与えた近似式の概略を述べるが, 2節での定義を採用すると $Y=|\bar{X}|$ の分布 $g(y)$ は次式のようになる.

$$g(y) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left\{e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2/n}} + e^{-\frac{(y+\mu)^2}{2\sigma^2/n}}\right\} \quad (y\geq 0)$$

明らかに $\mathrm{E}(1/y)$ は存在しない. そこでモーメントによらない近似式を考える.

近似式 1. McKay の近似

McKay は $U=\frac{n-1}{n}V^2\Big/\left(1+\frac{n-1}{n}V^2\right)$, $B=n\left(1+\frac{1}{r^2}\right)$ としたとき

$$BU \sim \chi_{n-1}{}^2 \tag{3.1$'$}$$

を得た. 以後 "$X\sim\chi^2$" の記号 "$\sim$" は X が '近似的' に χ^2 分布に従うという意味を表わすこととする. ここで $\chi_1{}^2=\sum(X_i-\bar{X})^2/\sigma^2$, $\chi_2'^2=n\bar{X}^2/\sigma^2$ とおくと

$$BU = \mathrm{E}\,(\chi_1{}^2+\chi_2'^2)\frac{\chi_1{}^2}{\chi_1{}^2+\chi_2'^2}$$

と変形できるから非心ベータを χ^2 近似したことになる. (3.1$'$) から

$$\Pr\{BU<t_0\} = \Pr\left\{V<\left(\frac{n}{n-1}\,\frac{t_0}{B-t_0}\right)^{1/2}\right\} \tag{3.1}$$

となり, $t_0=\chi_{\alpha,n-1}{}^2$ ($\chi_{\alpha,n-1}{}^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布の 100α パーセント点) とすれば V のパーセント点の近似を得る.

近似式 2. Jennett と Welch の近似

Iglewicz と Myers が Hald の近似とよんでいるものであるが, これは非心 t 分布に関連して Jennett と Welch [4] が用いた方法である. 実際には $\sqrt{(n-1)S^2/\sigma^2}$ すなわち χ^2 分布の平方根をとったものを正規分布 $N(\sqrt{n-1},\ 1/2)$ でさらに $|\bar{X}|/\sigma$ を $N(1/r,\ 1/n)$ で近似すれば

$$\Pr\{V<v_\alpha\} = \Pr\{S/\sigma - v_\alpha|\bar{X}|/\sigma<0\}$$

において次のように近似できる.

$$S/\sigma - v_\alpha|\bar{X}|/\sigma \sim N\ (1-v_\alpha/r,\ \ 1/2(n-1)+v_\alpha/n)$$

このことから, パーセント点 v_α の近似は次式のようになる.

$$v_\alpha \simeq \frac{1}{1/r^2-z_\alpha{}^2/n}\left\{\frac{1}{r}+\frac{z_\alpha}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{n-1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{z_\alpha{}^2}{n}\right)}\right\} \tag{3.2}$$

ここで z_α は $N(0,\ 1)$ の 100α パーセント点を表わす. また記号 "$\simeq$" は近似値を意味することとする.

近似式 3. Iglewicz と Myers の近似

Iglewicz と Myers [3] が $S/\bar{X}$ の分布の近似として与えたものであり $r\ll 1$ の場合には $\bar{X}$ と $|\bar{X}|$ は分布としてほとんど区別できないであろうから

$$V\sim N\left(r,\ \ r^2\left(r^2+\frac{1}{2}\right)\Big/n\right)$$

と書ける．したがって

$$v_\alpha \simeq r + z_\alpha \sqrt{r^2\left(r^2+\frac{1}{2}\right)\Big/ n} \tag{3.3}$$

とできる．

この論文ではさらに次の2つの近似式を提案する．いずれも表現が簡便であり，$r \ll 1$ の部分では上の3式とほとんどかわらない精度を得ることができる．精度についての詳細は次節で述べる．

近似式 4. 正規型

近似式2の場合と同じように

$$S/\sigma \sim N\,(1,\ 1/2\,(n-1)),\quad |\bar{X}|/\sigma \sim N\,(1/r,\ 1/n)$$

とし，さらに Geary [2] の近似，すなわち X_1，X_2 がそれぞれ $N\,(\mu_1,\ \sigma_1{}^2)$，$N\,(\mu_2,\ \sigma_2{}^2)$ に従うとき $Y = X_1/X_2$ とおくと相関係数 $\rho = 0$ (Geary [2] では一般に $\rho \neq 0$) ならば

$$z = \frac{\mu_2 Y - \mu_1}{\sqrt{\sigma_2{}^2 Y^2 + \sigma_1{}^2}} \sim N\,(0,\ 1)$$

ここで $\sigma_2 = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ll \mu_2 = \dfrac{1}{r}$ なので

$$Y = V \sim N\,(r,\ r^2/2\,(n-1))$$

である．したがって

$$v_\alpha \simeq r + z_\alpha \sqrt{r^2/2\,(n-1)} \tag{3.4}$$

を得る．

近似式 5. カイ2乗型

McKay 近似の部分で扱ったように $\chi_1{}^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2/\sigma^2$，$\chi_2{}'^2 = n\bar{X}^2/\sigma^2$ としたとき

$$\mathrm{E}(\chi_1{}^2) = n-1,\quad \mathrm{V}(\chi_1{}^2) = 2\,(n-1)$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\chi_2{}'^2\right) = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{n},\quad \mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\chi_2{}'^2\right) = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{r^2}\right)$$

であり，$\bar{X}^2/\sigma^2$ の変動係数は $r/\sqrt{n}$ の次数である．したがって $r \ll 1$ の部分では

$$(n-1)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{n}\right)V^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/\left[\frac{\bar{X}^2}{\sigma^2}\Big/\mathrm{E}\left(\frac{\bar{X}^2}{\sigma^2}\right)\right] \sim \chi_{n-1}{}^2$$

と書ける．このとき

$$v_\alpha \simeq \sqrt{\chi_{\alpha,n-1}{}^2\Big/(n-1)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{n}\right)}$$

となり，さらに $r \ll 1$ を考えているので

$$v_\alpha \simeq r\sqrt{\chi_{\alpha,n-1}{}^2\Big/(n-1)} \tag{3.5}$$

4. 近似式の精度の評価

2節の (2.1) から計算した変動係数のパーセント点の真の値と3節で得られた近似式による値を表 4-1〜3 に示してある．Iglewicz と Myers [3] が与えている表にある $0.1 \leq r \leq 0.4$ の範囲では，定義が異なるにもかかわらず完全に一致している．このことは r の小さい部分では $\bar{X}/\sigma$ と $|\bar{X}|/\sigma$ の違いを無視できることを示しているから，3節で扱った近似式の導入はこの意味でも自然である．

この表から各々の近似式について次のようなことがわかる．

1° McKay の近似は $r \leq 0.1$ では4桁の精度があり，0.5 より小さい部分についても n が 30 程度になると 2〜3 桁の精度を得ることができる．

2° Jennett と Welch の近似は，$|\bar{X}|/\sigma$ がほぼ正規であることから，χ^2 分布の正規近似だけが問題となるが，この表をみるかぎり，r の大きさによらず自由度が 30 以上になると一様に2桁の精度を得ることができる．(竹内 [7]，p. 24 参照)

3° Iglewicz と Myers の正規型の近似は，$n<30$ の部分では，精度のよい近似値を得られないが，それより大きい部分では，例えば $r=0.5$ でも2桁の精度は得られる．

ここで新たに与えた正規型，カイ2乗型の近似については，とくにカイ2乗型では $r \leq 0.1$ において McKay のそれとかわらないほぼ4桁の精度があり，$0.1<r<0.3$ の部分でも2桁は信頼できる．また正規型の近似は Iglewicz と Myers, Jennett と Welch と同じく $n>10$, $r<0.2$ では 2〜3 桁の精度が保たれる．

増山 [5] 等の研究によれば，生化学的個体差を表わす σ_x (変動係数に相当する) は大多数が 0.1〜0.2 の範囲にはいる．さらに身長，体重や歯の長さなどのように 0.1 以下という例も自然界には数多い．これらのことを考えると上記の正規型，カイ2乗型の近似の方法が，その簡便さにもかかわらず 2〜3 桁の有効精度を得ることができるという点で有用度の高いものであると考えられる．

謝　　辞

この研究をすすめるにあたり，いろいろと有意義なコメントをいただいた杉山高一博士，レフェリーの方々に深く感謝いたします．

参 考 文 献

[1] Erdélyi, A. (1953) *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGraw-Hill.
[2] Geary, R.C. (1930) The frequency distribution of the quotient of two normal distribution, *J. R. Statist. Soc.*, **93**, 442–446.
[3] Iglewicz, B. and Myers, R.H. (1970) Comparisons of approximations to the percentage points of the sample coefficient of variation, *Technometrics*, **12**, 166–169.
[4] Jennett, W.J. and Welch, B.L. (1939) The control of proportion defective as judged by a single quality characteristic varying on a continuous scale, *J. R. Statist. Soc.*, B, **6**, 80–88.
[5] 増山元三郎 (1976) 生化学的個体差の準恒常性とその確率模型，応用統計学，**5**, 95-114.
[6] McKay, A.T. (1932) Distribution of the coefficient of variation and the extended t distribution, *J. R. Statist. Soc.*, **95**, 695–698.
[7] 竹内 啓 (1975) 確率分布と統計解析，日本規格協会．

表 4-1

$r=\sigma/\mu$			.04		.06		.10		.15		.20		.30		.50	
N			5%	95%	5%	95%	5%	95%	5%	95%	5%	95%	5%	95%	5%	95%
10	Exact		.0243	.0549	.0364	.0824	.0606	.1377	.0907	.2077	.1205	.2792	.1787	.4282	.2886	.7664
	approxi.	1	.0243	.0549	.0364	.0824	.0606	.1377	.0905	.2073	.1200	.2781	.1771	.4248	.2813	.7538
		2	.0245	.0556	.0367	.0834	.0611	.1394	.0914	.2104	.1214	.2829	.1803	.4346	.2918	.7807
		3	.0253	.0547	.0379	.0822	.0628	.1372	.0936	.2064	.1236	.2764	.1801	.4199	.2747	.7252
		4	.0244	.0555	.0367	.0833	.0612	.1388	.0918	.2082	.1225	.2775	.1837	.4163	.3062	.6939
		5	.0243	.0548	.0365	.0823	.0608	.1371	.0912	.2057	.1216	.2742	.1824	.4113	.3039	.6855
30	Exact		.0312	.0487	.0469	.0727	.0780	.1214	.1168	.1827	.1552	.2446	.2310	.3713	.3762	.6414
	approxi.	1	.0313	.0487	.0469	.0727	.0780	.1214	.1167	.1826	.1550	.2443	.2302	.3705	.3721	.6401
		2	.0314	.0487	.0470	.0730	.0783	.1219	.1172	.1834	.1558	.2456	.2319	.3730	.3780	.6451
		3	.0315	.0485	.0472	.0728	.0786	.1214	.1174	.1826	.1559	.2441	.2308	.3692	.3700	.6300
		4	.0314	.0486	.0470	.0730	.0784	.1216	.1176	.1824	.1568	.2432	.2352	.3648	.3920	.6080
		5	.0313	.0485	.0469	.0727	.0781	.1211	.1172	.1817	.1563	.2423	.2344	.3634	.3907	.6057
50	Exact		.0333	.0466	.0499	.0699	.0830	.1166	.1244	.1753	.1655	.2344	.2467	.3547	.4034	.6072
	approxi.	1	.0333	.0466	.0499	.0699	.0831	.1165	.1244	.1752	.1654	.2342	.2461	.3543	.4003	.6071
		2	.0333	.0467	.0500	.0700	.0833	.1168	.1247	.1756	.1659	.2350	.2473	.3557	.4045	.6092
		3	.0334	.0466	.0501	.0699	.0834	.1166	.1247	.1752	.1658	.2342	.2464	.3536	.3993	.6007
		4	.0334	.0466	.0500	.0700	.0834	.1166	.1251	.1749	.1668	.2332	.2502	.3499	.4169	.5831
		5	.0333	.0465	.0499	.0698	.0832	.1164	.1248	.1745	.1664	.2327	.2496	.3491	.4161	.5818
70	Exact		.0343	.0455	.0515	.0683	.0858	.1140	.1285	.1713	.1709	.2290	.2549	.3461	.4179	.5896
	approxi.	1	.0343	.0455	.0515	.0683	.0858	.1140	.1284	.1713	.1708	.2289	.2545	.3458	.4154	.5899
		2	.0344	.0456	.0516	.0684	.0859	.1142	.1287	.1716	.1712	.2294	.2554	.3467	.4188	.5910
		3	.0344	.0456	.0516	.0684	.0860	.1140	.1286	.1713	.1711	.2289	.2547	.3453	.4148	.5851
		4	.0344	.0456	.0516	.0684	.0860	.1140	.1290	.1710	.1720	.2280	.2580	.3420	.4300	.5700
		5	.0343	.0455	.0515	.0683	.0859	.1138	.1288	.1707	.1717	.2276	.2576	.3415	.4294	.5691

Approximation

1. McKay

$$\sqrt{\frac{n}{n-1}\cdot\frac{\chi_{\alpha,n-1}^2}{n(1+1/r^2)-\chi_{\alpha,n-1}^2}}$$

2. Jennett and Welch

$$\frac{1}{1/r^2-z_\alpha^2/n}\left\{\frac{1}{r}+\frac{z_\alpha}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{n-1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{z_\alpha^2}{n}\right)}\right\}$$

3. Iglewicz and Myers

$$r+z^x\sqrt{r^2\left(r^2+\frac{1}{2}\right)\Big/n}$$

4. Normal-type

$$r+z_x\sqrt{r^2/2(n-1)}$$

5. χ^2-type

$$r\sqrt{\chi_{\alpha,n-1}^2/n-1}$$

z_α : N (0, 1) の100αパーセント点

$\chi_{\alpha,\nu}^2$: 自由度νのχ^2分布の100αパーセント点

表 4-2

$r=\sigma/\mu$			.04		.06		.10		.15		.20		.30		.50	
N			1%	99%	1%	99%	1%	99%	1%	99%	1%	99%	1%	99%	1%	99%
10	Exact		.0193	.0621	.0289	.0933	.0480	.1562	.0718	.2364	.0952	.3190	.1409	.4957	.2258	.9304
	approxi.	1	.0193	.0621	.0289	.0933	.0480	.1561	.0716	.2359	.0948	.3178	.1396	.4920	.2200	.9218
		2	.0181	.0620	.0271	.0932	.0451	.1560	.0674	.2363	.0896	.3193	.1329	.4978	.2147	.9418
		3	.0192	.0608	.0288	.0913	.0475	.1525	.0702	.2298	.0919	.3081	.1305	.4695	.1815	.8186
		4	.0181	.0619	.0271	.0929	.0452	.1548	.0678	.2323	.0903	.3097	.1355	.4645	.2258	.7742
		5	.0193	.0621	.0289	.0931	.0482	.1552	.0723	.2327	.0963	.3103	.1445	.4655	.2408	.7758
30	Exact		.0280	.0523	.0420	.0786	.0700	.1312	.1046	.1977	.1390	.2653	.2063	.4051	.3335	.7135
	approxi.	1	.0280	.0523	.0420	.0786	.0699	.1312	.1046	.1976	.1388	.2650	.2056	.4044	.3296	.7148
		2	.0278	.0523	.0416	.0784	.0693	.1310	.1037	.1975	.1378	.2651	.2047	.4052	.3318	.7154
		3	.0280	.0520	.0419	.0781	.0697	.1303	.1040	.1961	.1376	.2624	.2021	.3979	.3161	.6839
		4	.0278	.0522	.0417	.0783	.0695	.1306	.1042	.1958	.1389	.2611	.2084	.3916	.3473	.6527
		5	.0281	.0523	.0421	.0785	.0701	.1308	.1052	.1962	.1402	.2615	.2103	.3923	.3506	.6538
50	Exact		.0307	.0495	.0461	.0743	.0767	.1240	.1148	.1866	.1526	.2500	.2268	.3799	.3686	.6591
	approxi.	1	.0307	.0495	.0461	.0743	.0767	.1240	.1147	.1865	.1524	.2498	.2262	.3796	.3655	.6608
		2	.0306	.0494	.0459	.0742	.0764	.1238	.1143	.1864	.1520	.2498	.2261	.3798	.3678	.6600
		3	.0307	.0493	.0460	.0740	.0765	.1235	.1143	.1857	.1516	.2484	.2242	.3758	.3575	.6425
		4	.0306	.0494	.0459	.0741	.0765	.1235	.1148	.1853	.1530	.2470	.2295	.3705	.3825	.6175
		5	.0307	.0495	.0461	.0742	.0769	.1237	.1153	.1855	.1537	.2473	.2306	.3710	.3843	.6183
70	Exact		.0322	.0480	.0482	.0720	.0803	.1202	.1202	.1808	.1598	.2420	.2379	.3669	.3877	.6319
	approxi.	1	.0322	.0480	.0482	.0720	.0803	.1202	.1202	.1807	.1597	.2419	.2375	.3667	.3851	.6336
		2	.0321	.0479	.0481	.0719	.0801	.1201	.1199	.1807	.1594	.2418	.2374	.3668	.3873	.6324
		3	.0321	.0479	.0482	.0718	.0801	.1199	.1199	.1802	.1591	.2409	.2359	.3641	.3796	.6204
		4	.0321	.0479	.0481	.0719	.0802	.1198	.1203	.1797	.1604	.2396	.2406	.3594	.4010	.5990
		5	.0322	.0480	.0483	.0720	.0804	.1199	.1207	.1799	.1609	.2398	.2413	.3598	.4022	.5996

表 4-3

$r=\sigma/\mu$			.04		.06		.10		.15		.20		.30		.50	
N			25%	75%	25%	75%	25%	75%	25%	75%	25%	75%	25%	75%	25%	75%
10	Exact		.0324	.0450	.0486	.0675	.0809	.1127	.1212	.1694	.1612	.2265	.2407	.3425	.3951	.5850
	approxi.	1	.0324	.0450	.0485	.0675	.0808	.1126	.1209	.1690	.1690	.2256	.2385	.3396	.3855	.5725
		2	.0336	.0464	.0504	.0696	.0840	.1161	.1258	.1745	.1745	.2333	.2497	.3528	.4093	.6022
		3	.0340	.0460	.0509	.0691	.0848	.1152	.1269	.1731	.1731	.2314	.2509	.3492	.4076	.5924
		4	.0336	.0463	.0505	.0695	.0841	.1159	.1262	.1739	.1739	.2318	.2523	.3477	.4205	.5795
		5	.0324	.0450	.0486	.0675	.0810	.1125	.1214	.1687	.1687	.2250	.2429	.3375	.4048	.5625
30	Exact		.0361	.0431	.0541	.0647	.0901	.1079	.1350	.1621	.1798	.2164	.2687	.3261	.4432	.5509
	approxi.	1	.0361	.0431	.0541	.0647	.0901	.1079	.1349	.1620	.1795	.2162	.2679	.3253	.4391	.5476
		2	.0365	.0436	.0547	.0653	.0911	.1090	.1365	.1636	.1817	.2185	.2716	.3292	.4478	.5560
		3	.0365	.0435	.0548	.0652	.0912	.1088	.1367	.1634	.1819	.2181	.2716	.3284	.4467	.5533
		4	.0365	.0435	.0547	.0653	.0911	.1089	.1367	.1633	.1823	.2177	.2734	.3266	.4557	.5442
		5	.0361	.0431	.0541	.0647	.0902	.1078	.1352	.1617	.1803	.2156	.2704	.3235	.4507	.5391
50	Exact		.0370	.0425	.0555	.0637	.0925	.1063	.1387	.1596	.1848	.2130	.2763	.3206	.4567	.5398
	approxi.	1	.0370	.0425	.0555	.0637	.0925	.1063	.1386	.1595	.1846	.2129	.2758	.3201	.4540	.5381
		2	.0373	.0427	.0559	.0641	.0931	.1069	.1396	.1605	.1859	.2142	.2780	.3224	.4595	.5428
		3	.0373	.0427	.0559	.0641	.0932	.1068	.1397	.1603	.1860	.2140	.2780	.3220	.4587	.5413
		4	.0373	.0427	.0559	.0641	.0932	.1068	.1398	.1602	.1864	.2136	.2796	.3204	.4659	.5341
		5	.0370	.0425	.0556	.0637	.0926	.1062	.1389	.1593	.1852	.2124	.2778	.3186	.4630	.5310
70	Exact		.0375	.0421	.0563	.0632	.0938	.1054	.1406	.1582	.1873	.2111	.2803	.3176	.4637	.5338
	approxi.	1	.0375	.0421	.0563	.0632	.0938	.1054	.1406	.1581	.1872	.2110	.2799	.3173	.4616	.5328
		2	.0377	.0423	.0565	.0635	.0942	.1058	.1412	.1588	.1881	.2120	.2815	.3189	.4657	.5359
		3	.0377	.0423	.0566	.0634	.0942	.1058	.1413	.1587	.1882	.2119	.2814	.3186	.4651	.5349
		4	.0377	.0423	.0566	.0634	.0943	.1057	.1414	.1586	.1885	.2115	.2828	.3172	.4713	.5287
		5	.0375	.0421	.0563	.0632	.0938	.1053	.1408	.1580	.1877	.2106	.2815	.3159	.4692	.5265