中心が推定された場合における Cramér-von Mises 型の対称性の検定統計量の漸近分布

統計数理研究所　安　芸　重　雄

(1979 年 11 月　受付)

Asymptotic Distribution of a Cramér-von Mises Type Statistic for Testing Symmetry when the Center is Estimated

Sigeo Aki
(The Institute of Statistical Mathematics)

In this paper the author investigates the effect of estimating the center of symmetry on a Cramér-von Mises type statistic for testing symmetry of a given distribution F. We assume that the estimator of the center is a consistent estimator with the order $n^{1/2}$ and with von Mises derivative. The asymptotic distribution of

$$nT[F_n] \overset{\text{def}}{=} n\int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x)+F_n(2S[F_n]-x)-1\}^2 dF(x)$$

is obtained under the null hypothesis. The asymptotic distribution depends on the distribution F and on the estimator of the center of F.

1. 序

分布の対称性についての検定統計量には，符号検定，重みつき符号検定を始め，Butler [1] の扱った Kolmogorov-Smirnov 型の統計量や Filippova [2]，Rothman and Woodroofe [4] の扱った Cramér-von Mises 型の統計量等がある．いずれも与えられた点に関する対称性を検定する統計量である．

ところで今，次のような仮説Hを検定したいとする．

H：観測値が従っている分布関数は，中心（未知）に関し対称である．

この検定問題は実際的には極めて自然なものであるが，上に挙げた統計量はすべて，分布の中心を既知としているので，そのままでは適用できない．そこで分布の中心を観測値によって推定し，その推定値に関して上の統計量を使って分布の対称性を検定する方法が考えられる．こうして得られる新しい統計量の分布を調べる事には実際的な観点から重要な意味がある．Gastwirth [3] は標本平均によって中心を推定してから符号検定を行なった場合の統計量の漸近分布を調べ，この分布が，中心が既知の場合の分布とは全く異なる事を示した．

本稿では検定統計量として Cramér-von Mises 型のものを考え，中心の推定量としては，Huber の M 推定量を含むような一般なものを考察する．この場合もやはり，中心が既知の場合の分布とは異なり，その漸近分布が，観測値の従う未知の分布と中心の推定量に依存する事が示される．

2. 結　　果

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は確率空間 $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ で定義された独立同分布確率変数であり，X_i の分布

関数を F とする．F の中央値を m と書くことにする．ここで分布 F と m の推定量 $\hat{m}$ に関する次の仮定を置く．

仮定 1. F は Lebesgue 測度0を除いて3回微分可能である．

仮定 2. $\hat{m}$ は m の order $n^{1/2}$ の一致推定量で，F での order 3 の Mises 汎関数である．従って $\hat{m}=S[F_n]$ と書ける．ここで F_n は $X_1, \cdots, X_n$ から得られた経験分布関数である．但し Mises 汎関数の定義は Filippova [2] による．

次の仮説を考える．

H: Fは中央値（未知）に関し対称である．

そこで次の定理が成り立つ．

定理 仮定 1，仮定 2 が成り立つ時，仮説 H の下で，

$$nT[F_n] \fallingdotseq n\int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x)+F_n(2S[F_n]-x)-1\}^2\, dF(x) \tag{1}$$

の漸近分布は次の二重確率積分の分布に等しい．

$$\int_0^1\int_0^1 \varphi[F; F^{-1}(u),\, F^{-1}(v)]\, d\beta(u)\, d\beta(v) \tag{2}$$

ここで

$$\begin{aligned}\varphi[F; y, z] &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(-\infty,x]}(y)\, \chi_{(-\infty,x]}(z)\, dF(x)\\ &\quad + 2\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(-\infty,2m-x]}(y)\, \chi_{(-\infty,x]}(z)\, dF(x)\\ &\quad + 2S^{(1)}[F; y]\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \{\chi_{(-\infty,2m-x]}(z)+\chi_{(-\infty,x]}(z)\}\, dF(x)\\ &\quad + 2S^{(1)}[F; z]\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \{\chi_{(-\infty,2m-x]}(y)+\chi_{(-\infty,x]}(y)\}\, dF(x)\\ &\quad + 4\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(2m-x)\, dF(x)\right\} S^{(1)}[F; y]\cdot S^{(1)}[F; z]\end{aligned} \tag{3}$$

f は F の密度関数を表わし，$\chi_A(\cdot)$ は A 上の定義関数を表わす．

$\{\beta(t)\,;\, 0\leq t\leq 1\}$ は Brownian bridge 即ち

$$\mathrm{E}\beta(t)=0 \quad (0\leq t\leq 1),\quad \mathrm{E}\beta(s)\beta(t)=\min(s,t)-st \quad (0\leq s, t\leq 1)$$

を満たす正規過程である．

Brownian bridge による多重確率積分の定義については Filippova [2] を参照されたい．また Brownian bridge による二重確率積分の分布の特性関数は既に求められている (Filippova [2] 参照)．(3) 式中に現われる $S^{(1)}[F; \cdot]$ は

$$\frac{d}{dt} S[F+t(F_n-F)]\big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S^{(1)}[F; x]\, d[F_n(x)-F(x)]$$

を満たすような関数であり，仮定 2 により，存在する事が保証される．

注意 1. 定理で求めた分布は (1) 式の漸近分布であり，(1) 式は我々の最も調べたい統計量，

$$nT_0[F_n] = n\int_{-\infty}^{\infty} \{F_n(x)+F_n(2S[F_n]-x)-1\}^2\, dF_n(x) \tag{4}$$

とは異なるものである．もちろん (1) と (4) の漸近的同等性，即ち，

$$n(T[F_n]-T_0[F_n]) \xrightarrow{P} 0 \qquad (\text{as } n\to\infty) \tag{5}$$

が示されるならば (2) は (4) の漸近分布としての意味を持つ．しかし今のところ (5) は証明できていない．従って現段階では (2) を (4) の漸近分布と解釈する事はできない．そこで次の統計量 T_1 を考える．$X_1, \cdots, X_{2n}$ を分布関数 F に従う独立同分布確率変数列とする．$X_1, \cdots, X_n$ から得られる経験分布関数を $F_n^{(1)}$, $X_{n+1}, \cdots, X_{2n}$ から得られる経験分布関数を $F_n^{(2)}$ と書くとき，

$$T_1[F_n^{(1)}, F_n^{(2)}]=\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n^{(1)}(x)+F_n^{(1)}(2S[F_n^{(1)}]-x)-1\}^2\,dF_n^{(2)}(x) \tag{6}$$

とする．このように T_1 を定義すれば，Filippova [2] lemma 1 により

$$n(T_1[F_n^{(1)}, F_n^{(2)}]-T[F_n^{(1)}]) \xrightarrow{P} 0$$

が示されるので，(2) は (6) の漸近分布として意味を持つ．

注意 2. (3) 式の右辺の第一項と第二項において，$y=F^{-1}(u)$, $z=F^{-1}(v)$ と変換すれば，

$$2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(-\infty,x]}(y)\chi_{(-\infty,x]}(z)dF(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(-\infty,2m-x]}(y)\chi_{(-\infty,x]}(z)dF(x)\right\}$$
$$=\begin{cases}2\{1-\max(u,v)\} & \text{if } u+v>1\\ 2\{2-\max(u,v)-u-v\} & \text{if } u+v\leq 1\end{cases}$$

となり，中心が既知の時の分布を表わす．(Filippova [2]) 従って (3) 式の右辺の残りの部分が，中心を推定したために加わった部分であり，式を見れば，この部分が推定量 S と分布 F に依存している事がわかる．

3. 定理の証明

定理は次に述べる命題 1 と命題 2 から直ちに証明される．

$\bar{T}[F_n]$ を次のように定義する．

$$\bar{T}[F_n]=\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(x)-F(x)+F_n(2m-x)-F(2m-x)$$
$$+2f(2m-x)\int_{-\infty}^{\infty}S^{(1)}[F;u]\,d[F_n(u)-F(u)]\}^2\,dF(x)$$

命題 1. $nT[F_n]$ と $n\bar{T}[F_n]$ は漸近的に同じ分布である．即ち，

$$n(T[F_n]-\bar{T}[F_n]) \xrightarrow{P} 0 \qquad (\text{as } n\to\infty).$$

命題 2. $$\bar{T}[F_n]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi[F;y,z]\,d[F_n(y)-F(y)]\,d[F_n(x)-F(x)]$$

が成り立つ．ここで $\varphi[F;y,z]$ は (3) 式で定義されたものである．

命題 1 の証明

$t\in[0,1]$ に対して，$F_n^{(t)}=(1-t)F+tF_n$ と置く．Mises 汎関数の 漸近分布を求める時は，$F_n^{(t)}$ における汎関数の値を t で微分する事により，汎関数の微分を見つける方法が使われるが，今，

$$T[F_n^{(t)}]=\int_{-\infty}^{\infty}\{(1-t)F(x)+tF_n(x)+(1-t)F(2S[F_n^{(t)}]-x)$$
$$+tF_n(2S[F_n^{(t)}]-x)-1\}^2\,dF(x)$$

を考えると，これは t に関して微分可能ではないかも知れない．そこで t に関して微分可能な $\tilde{T}[F_n^{(t)}]$ を次のように定義する．

$$\tilde{T}[F_n^{(t)}]=\int_{-\infty}^{\infty}\{(1-t)F(x)+tF_n(x)+(1-t)F(2S[F_n^{(t)}]-x)$$
$$+t\,h_n(2S[F_n^{(t)}]-x)-1\}^2\,dF(x)$$

ここで $h_n(x)$ は各 $\omega\in\Omega$ に対して次のように定義した random function である．

$$h_n(x)=\begin{cases}\dfrac{i+1}{n}+\dfrac{\displaystyle\int_{X_{(i)}-1/n^3}^{x}\exp[1/\{(u-X_{(i)}+1/n^3)(u-X_{(i)})\}]\,du}{\displaystyle n\int_{X_{(i)}-1/n^3}^{X_{(i)}}\exp[1/\{(u-X_{(i)}+1/n^3)(u-X_{(i)})\}]\,du} \\ \qquad\qquad (\text{if}\quad X_{(i)}-1/n^3\leq x<X_{(i)},\ i=1,\cdots,n) \\ F_n(x)\qquad (\text{otherwise})\end{cases}$$

但し，$X_{(1)}\leq\cdots\leq X_{(n)}$ は $X_1,\cdots,X_n$ から得られる順序統計量である．さらに $A_n(x,t)$ を

$$A_n(x,t)=(1-t)F(x)+tF_n(x)+(1-t)F(2S[F_n^{(t)}]-x)-1$$

と定義すれば，任意の実数 x，任意の $t\in[0,1]$，任意の n に対して

$$|A_n(x,t)|\leqq 2 \tag{7}$$

が成り立つ．

また，$\tilde{T}[F_n^{(t)}]$ の定義と Schwarz の不等式と(7)から

$$|T[F_n^{(t)}]-\tilde{T}[F_n^{(t)}]|\leqq\int_{-\infty}^{\infty}|\{F_n(2S[F_n^{(t)}]-x)\}^2-\{h_n(2S[F_n^{(t)}]-x)\}^2|\,dF(x)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}2|A_n(x,t)|\cdot|F_n(2S[F_n^{(t)}]-x)-h_n(2S[F_n^{(t)}]-x)|\,dF(x)$$
$$\leqq\left[\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(F_n(2S[F_n^{(t)}]-x)+h_n(2S[F_n^{(t)}]-x))^2\,dF(x)\right\}^{1/2}\right.$$
$$\left.+2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|A_n(x,t)|^2\,dF(x)\right\}^{1/2}\right]$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(2S[F_n^{(t)}]-x)-h_n(2S[F_n^{(t)}]-x)\}^2dF(x)\right]^{1/2}$$
$$\leqq(2+4)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(2S[F_n^{(t)}]-x)-h_n(2S[F_n^{(t)}]-x)\}^2\,dF(x)\right]^{1/2}$$

が成り立つ．

h_n の定義から $\sup_u|F_n(u)-h_n(u)|\leqq\dfrac{1}{n}$ と Lebesgue measure of $\{x;h_n(x)\neq F_n(x)\}=\dfrac{1}{n^2}$ が得られる．

ここで $\mu=\sup_x f(x)$ と書けば

$$F\text{—measure of } \{x; h_n(x) \neq F_n(x)\} \leqq \mu \cdot \frac{1}{n^2}$$

であるから，すべての $t\in[0,1]$ に対して

$$|T[F_n^{(t)}]-\tilde{T}[F_n^{(t)}]| \leqq 6\sqrt{\mu} \cdot \frac{1}{n^2}$$

が成り立つ．従って任意の $\omega\in\Omega$，任意の $t\in[0,1]$ に対して

$$n(T[F_n^{(t)}]-\tilde{T}[F_n^{(t)}]) \longrightarrow 0 \qquad (\text{as } n\to\infty)$$

を得る．この事から，$nT[F_n^{(t)}]$ の漸近分布は $n\tilde{T}[F_n^{(t)}]$ の漸近分布と等しい事がわかるから以後，$n\tilde{T}[F_n^{(t)}]$ について調べる．

そこで $\tilde{T}[F_n^{(t)}]$ を t について微分する事により，次の (8), (9), (10), (11), (12) を得る．

$$\text{(8)} \qquad \frac{d\tilde{T}[F_n^{(t)}]}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} 2\{(1-t)F(x)+tF_n(x)+(1-t)F(2S[F_n^{(t)}]-x) + th_n(2S[F_n^{(t)}]-x)-1\}\cdot g(t,x)\,dF(x)$$

ここで

$$g(t,x)=F_n(x)-F(x)-F(2S[F_n^{(t)}]-x)+2(1-t)f(2S[F_n^{(t)}]-x)\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt} + h_n(2S[F_n^{(t)}]-x)+2th_n'(2S[F_n^{(t)}]-x)\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt}.$$

$$\text{(9)} \qquad \left.\frac{d\tilde{T}[F_n^{(t)}]}{dt}\right|_{t=0}=0$$

$$\text{(10)} \qquad \frac{d^2\tilde{T}[F_n^{(t)}]}{dt^2} = \int_{-\infty}^{\infty} 2\left[\{g(t,x)\}^2+\{(1-t)F(x)+tF_n(x)+(1-t)F(2S[F_n^{(t)}]-x) + t\,h_n(2S[F_n^{(t)}]-x)-1\}\cdot\frac{d}{dt}g(t,x)\right]dF(x)$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{dg(t,x)}{dt} &= -4f(2S[F_n^{(t)}]-x)\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt} \\ &+4(1-t)f'(2S[F_n^{(t)}]-x)\cdot\left(\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt}\right)^2+2(1-t)f(2S[F_n^{(t)}]-x)\frac{d^2S[F_n^{(t)}]}{dt^2} \\ &+4h_n'(2S[F_n^{(t)}]-x)\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt}+4th_n''(2S[F_n^{(t)}]-x)\left(\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt}\right)^2 \\ &+2h_n'(2S[F_n^{(t)}]-x)\frac{d^2S[F_n^{(t)}]}{dt^2}.\end{aligned}$$

$$\text{(11)} \qquad \left.\frac{d^2\tilde{T}[F_n^{(t)}]}{dt^2}\right|_{t=0}=2\int_{-\infty}^{\infty}\{g(0,x)\}^2\,dF(x)$$

$$\text{(12)} \qquad \frac{d^3\tilde{T}[F_n^{(t)}]}{dt^3} = \int_{-\infty}^{\infty}\Big[6g(t,x)\frac{d}{dt}g(t,x)+2\{(1-t)F(x)+tF_n(x)$$

$$+(1-t)F(2S[F_n^{(t)}]-x)+t\,h_n(2S[F_n^{(t)}]-x)-1\}\frac{d^2}{dt^2}g(t,x)\Big]\,dF(x)$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{d^2g(t,x)}{dt^2}&=-12f'(2S[F_n^{(t)}]-x)\left(\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt}\right)^2\\&-6f(2S[F_n^{(t)}]-x)\frac{d^2S[F_n^{(t)}]}{dt^2}+8(1-t)f''(2S[F_n^{(t)}]-x)\left(\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt}\right)^3\\&+12(1-t)f'(2S[F_n^{(t)}]-x)\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt}\cdot\frac{d^2S[F_n^{(t)}]}{dt^2}\\&+2(1-t)f(2S[F_n^{(t)}]-x)\cdot\frac{d^3S[F_n^{(t)}]}{dt^3}+12h_n''(2S[F_n^{(t)}]-x)\left(\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt}\right)^2\\&+6h_n'(2S[F_n^{(t)}]-x)\frac{d^2S[F_n^{(t)}]}{dt^2}+8t\,h_n'''(2S[F_n^{(t)}]-x)\left(\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt}\right)^3\\&+12t\,h_n''(2S[F_n^{(t)}]-x)\cdot\frac{dS[F_n^{(t)}]}{dt}\cdot\frac{d^2S[F_n^{(t)}]}{dt^2}\\&+2t\,h_n'(2S[F_n^{(t)}]-x)\cdot\frac{d^3S[F_n^{(t)}]}{dt^3}\end{aligned}$$

仮定2と(8), (10), (12)により，任意の $\delta>0$，任意の $p=1,2,3$ に対して

(13) $$n^{p/2-\delta}\sup_t\left|\frac{d^p\tilde{T}[F_n^{(t)}]}{dt^p}\right|\xrightarrow{P}0\qquad(\text{as } n\to\infty)$$

が成り立つ．

次に $B_n(x)$ を以下のように定義する．

$$B_n(x)=F_n(x)-F(x)-F(2m-x)+2f(2m-x)\int_{-\infty}^{\infty}S^{(1)}[F;u]\,d[F_n(u)-F(u)]$$

この定義から，十分大きい n に対しては，すべての x に対して

(14) $$|B_n(x)|\leq 4$$

がわかる．

(14)と $\tilde{T}[F_n]$ の定義と Schwarz の不等式によって，十分大きい n に対して以下の不等式を得る．

$$\begin{aligned}&\left|\frac{d^2\tilde{T}[F_n]}{dt^2}\Big|_{t=0}-2\tilde{T}[F_n]\right|\\&\leqq\int_{-\infty}^{\infty}2|\{h_n(2m-x)\}^2-\{F_n(2m-x)\}^2|\,dF(x)\\&+4\int_{-\infty}^{\infty}|B_n(x)|\cdot|h_n(2m-x)-F_n(2m-x)|\,dF(x)\\&\leqq(4+16)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(h_n(2m-x)-F_n(2m-x))^2\,dF(x)\right\}^{1/2}\\&\leqq 20\sqrt{\mu}\cdot\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

従って，任意の $\omega\in\Omega$ に対して

$$n\left(\frac{d^2\tilde{T}[F_n^{(t)}]}{dt^2}\Big|_{t=0}-2\,T[F_n]\right)\longrightarrow 0\qquad(\text{as } n\to\infty)\tag{15}$$

が成り立つ．

ところで一般に或る汎関数 $R[F_n^{(t)}]$ が t に関して $(m+1)$ 回連続的微分可能であるとし，

$$\frac{d^p R[F_n^{(t)}]}{dt^p}\Big|_{t=0}=0,\qquad p=1,\cdots,m-1\tag{16}$$

が成り立つとする．ここで更に，任意の $\delta>0$ に対して，

$$n^{q/2-\delta}\sup_t\left|\frac{d^q R[F_n^{(t)}]}{dt^q}\right|\xrightarrow{P}0,\qquad q=1,\cdots,m+1\tag{17}$$

が成り立つとすれば，$R[F_n^{(t)}]$ の $t=0$ の回りの Taylor 展開，即ち

$$R[F_n^{(t)}]=R[F]+\frac{t}{1!}\frac{dR[F_n^{(t)}]}{dt}\Big|_{t=0}+\cdots+\frac{t^m}{m!}\frac{d^m R[F_n^{(t)}]}{dt^m}\Big|_{t=0}+\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}R[F_n^{(t)}]}{dt^{m+1}}\Big|_{t=\theta}$$

において $t=1$ と置けば，(16)により，

$$R[F_n]-R[F]-\frac{1}{m!}\frac{d^m R[F_n^{(t)}]}{dt^m}\Big|_{t=0}=\frac{1}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}R[F_n^{(t)}]}{dt^{m+1}}\Big|_{t=\theta'}\tag{18}$$

従って(17)により

$$n^{m/2}(R[F_n]-R[F])-\frac{n^{m/2}}{m!}\frac{d^m R[F_n^{(t)}]}{dt^m}\Big|_{t=0}\xrightarrow{P}0\tag{19}$$

が成り立つ．

ところで今，(8)，(9)，(10)，(11)，(12)，(13) が成り立つから，$\tilde{T}[F_n^{(t)}]$ は (16)，(17) において $m=2$ の場合を満たす．故に上に述べた事から次式が示される．

$$n\,\tilde{T}[F_n]-\frac{n}{2!}\frac{d^2\tilde{T}[F_n^{(t)}]}{dt^2}\Big|_{t=0}\xrightarrow{P}0\tag{20}$$

(15)と(20)により命題1は成り立つ．

命題2の証明

$T[F_n]$ の定義から

$$\begin{aligned}T[F_n]=&\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(x)-F(x)\}^2dF(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(2m-x)-F(2m-x)\}^2dF(x)\\&+4\left\{\int_{-\infty}^{\infty}S^{(1)}[F;u]\,d[F_n(u)-F(u)]\right\}^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f^2(2m-x)\,dF(x)\\&+2\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(x)-F(x)\}\{F_n(2m-x)-F(2m-x)\}\,dF(x)\\&+4\int_{-\infty}^{\infty}S^{(1)}[F;u]\,d[F_n(u)-F(u)]\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(x)-F(x)\}\,f(2m-x)\,dF(x)\end{aligned}$$

$$+4\int_{-\infty}^{\infty} S^{(1)}[F;u]\,d[F_n(u)-F(u)]\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(2m-x)-F(2m-x)\}f(2m-x)\,dF(x)$$

であるから，次の(21)，(22)，(23)，(24)，(25)によって示される．

(21) $$\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(x)-F(x)\}^2\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(F_n(x)-F(x))\,\chi_{(-\infty,x]}(x)dF(x)\right\}d[F_n(z)-F(z)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(-\infty,x]}(y)\chi_{(-\infty,x]}(z)dF(x)\right\}d[F_n(y)-F(y)]\,d[F_n(z)-F(z)]$$

(22) $$\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(2m-x)-F(2m-x)\}^2\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(y)-F(y)\}^2\,dF(y)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(-\infty,x]}(y)\chi_{(-\infty,x]}(z)dF(x)\right\}d[F_n(y)-F(y)]\,d[F_n(z)-F(z)]$$

(23) $$\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(2m-x)-F(2m-x)\}\,\{F_n(x)-F(x)\}\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(-\infty,2m-x]}(z)\chi_{(-\infty,x]}(y)dF(x)\right\}$$
$$\times d[F_n(y)-F(y)]\,d[F_n(z)-F(z)]$$

(24) $$\int_{-\infty}^{\infty}S^{(1)}[F;u]\,d[F_n(u)-F(u)]\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(x)-F(x)\}\,f(2m-x)\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S^{(1)}[F;u]\,d[F_n(u)-F(u)]$$
$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(2m-x)\,\chi_{(-\infty,x]}(z)\,dF(x)\right)d[F_n(z)-F(z)]\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(-\infty,x]}(z)\,f(2m-x)\,dF(x)\right\}\right.$$
$$\left.\times S^{(1)}[F;y]\right]d[F_n(y)-F(y)]\,d[F_n(z)-F(z)]$$

(25) $$\int_{-\infty}^{\infty}S^{(1)}[F;u]\,d[F_n(u)-F(u)]\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(2m-x)-F(2m-x)\}\,f(2m-x)\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S^{(1)}[F;u]\,d[F_n(u)-F(u)]\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(x)-F(x)\}\,f(x)\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\chi_{(-\infty,x]}(z)dF(x)\right\}\right.$$
$$\left.\times S^{(1)}[F;y]\right]d[F_n(y)-F(y)]\,d[F_n(z)-F(z)]$$

参　考　文　献

[1] Butler, C.C. (1969) A test for symmetry using the sample distribution function, *Ann. Math. Statist.*, **40**, 2209–2210.

[2] Filippova, A.A. (1962) Mises' theorem of the asymptotic behavior of functionals of empirical distribution functions and its statistical applications, *Theory Prob. Appl.*, **7**, 24–57.

[3] Gastwirth, J.L. (1971) On the sign test for symmetry, *J. Amer. Statist. Ass.*, **66**, 821–823.

[4] Rothman, E.D. and Woodroofe, M. (1972) A Cramér von-Mises type statistic for testing symmetry, *Ann. Math. Statist.*, **43**, 2035–2038.