検定推定量の有意水準

―2標本に基づく分散の推定―

統計数理研究所　平　野　勝　臣

(1979年6月　受付)

The Significance Points in Preliminary Test in Estimating Variance Based on Two Samples

Katuomi Hirano
(The Institute of Statistical Mathematics)

The problem of whether to pool two samples in estimating variance of a normal distribution is often decided via a preliminary F-test. In general, since the preliminary test estimation always depends on the significance level of the preliminary test, one can not uniquely decide the estimator. The methods toseek the optimal level of significance for the preliminary test were given by Toyoda-Wallace [13], Ohtani-Toyoda[11] and Hirano [8]. In the paper we discuss three methods in detail, and our method is justified by the discussions.

1. 問題の背景

正規分布 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ (μ_x, σ_x^2 は共に未知) の母数 σ_x^2 を推定するとき，この分布から大きさ n の標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqq 2)$ に対し，推定量として $w \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ を用いるのが普通である．但し，w は $1/(n+1)$, $1/n$, $1/(n-1)$ などである（これらの選択についてはここでは触れないが Hirano [5] を参照されたい）．今，$N(\mu_y, \sigma_y^2)$ (μ_y, σ_y^2 は共に未知) からの大きさ m の標本 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m (m \geqq 2)$ もあり，この標本が利用可能か否かを σ_x^2 と σ_y^2 の違いにより判断し，利用可能と判断されれば2つの標本で σ_x^2 を推定するわけである．この種の問題は Bancroft [2] によって初めて論議され，以後多くの研究がなされた．歴史的な経過は Asano [1] や Bancroft and Han [3] に詳しい．σ_x^2 と σ_y^2 の違いを検定により判断し，その結果に従って σ_x^2 を推定するので，この推定量を検定推定量 (testimator) と云う．

一般に検定推定量は常に検定の有意水準に依存している．即ち，有意水準が異なれば推定量も異なり，推定量を一意的に指定せねばならない．使う立場で考えると，例えば1%と5%のどちらの有意水準を用いるのかという疑問を常にひき起す．この様に検定推定量を直接有意水準の函数とみて最適な値を決めることに注目したのは1970年代に入ってからである．

分散の推定問題に限ってこの問題を取扱ったのは Toyoda-Wallace [13], Ohtani-Toyoda [11], Hirano [8] である．分散推定の問題はこの種の理論の出発点であるので詳しく述べることも意味があろう．(平均についての有意水準指定問題は Hirano [7] で取扱っている．) 筆者が Toyoda-Wallace の結果に疑問を持ち，[8] を投稿したが，Ohtani-Toyoda [11] はそれ以前に投稿しており，彼等の結果について [8] で論議，検討はできなかった．

検定推定量を構成する検定はそのほとんどが片側で与えられている．片側で取扱ってよい客観的理由が稀薄の場合もあろう．述べ方の例として“データの性質から $\sigma_x^2 \geqq \sigma_y^2$ が仮定できる”というものだが，実験者なりデータを扱う人の判断は片側のみでよいと云い切れるものではな

かろう．両側も含めての論議が望まれる．

この報告では以上の諸点が問題とされ，[8] で述べ切れなかった補遺を中心に３つの方法について詳述し，問題点などを指摘したい．

2. 有意水準の決め方——３つの方法——

この章では３つの有意水準の決め方について述べよう．$\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i/n$, $\bar{Y}=\sum_{i=1}^{m}Y_i/m$, $S_x^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n$, $S_y^2=\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2/m$ とし，σ_x^2 の推定量を夫々の情況の下で以下の様に与える．

i) $\sigma_y^2\leqq\sigma_x^2$ が既知のとき（片側検定をもつ）

$$T_1=\begin{cases} S_x^2 & : S_x^2/S_y^2\geqq\lambda \\ \dfrac{nS_x^2+mS_y^2}{n+m} & : S_x^2/S_y^2<\lambda \end{cases}$$

$\varphi=\sigma_y^2/\sigma_x^2$ $(0<\varphi\leqq1)$，Bancroft の情況

ii) $\sigma_x^2\leqq\sigma_x^2$ が既知のとき（片側検定をもつ）

$$T_2=\begin{cases} S_x^2 & : S_x^2/S_y^2<\lambda \\ \dfrac{nS_x^2+mS_y^2}{n+m} & : S_x^2/S_y^2\geqq\lambda \end{cases}$$

$\theta=\sigma_x^2/\sigma_y^2$ $(0<\theta\leqq1)$，Toyoda-Wallace, Ohtani-Toyoda の情況

iii) σ_x^2 と σ_y^2 の大小について情報がないとき（両側検定をもつ）

$$T=\begin{cases} S_x^2 & : S_x^2/S_y^2<\tau,\ \lambda<S_x^2/S_y^2 \\ \dfrac{nS_x^2+mS_y^2}{n+m} & : \tau<S_x^2/S_y^2<\lambda \end{cases}$$

以上の３つの夫々の場合における λ と τ の決定，すなわち $\sigma_x^2=\sigma_y^2$ を検定する場合の有意水準の決定方法が問題である．これを検定問題として考えると決定できないが，σ_x^2 の推定問題ととらえ考察することにより決定可能ということが大切である．σ_x^2 と σ_y^2 が等しいかどうかを決定するだけでなく，σ_x^2 も推定するということが目的である．

尚，Hirano は i) ii) iii) のすべての情況について考察している．また Hirano 以外は S_x^2, S_y^2 の定義を σ_x^2 と σ_y^2 の夫々の不偏推定量として与えてある．正確に書けば２組の標本 $X_1,\cdots,X_n;Y_1,\cdots,Y_m$ に対し，$n=n_1+1$, $m=n_2+1$ で $S_x^{*2}=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/n_1$, $S_y^{*2}=\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2/n_2$ とし自由度を夫々 n_1, n_2 とした．この時，T_1, T_2 に対応する推定量を夫々 T_1^*, T_2^* と書く．

[2] の結果と有意水準を決める３つの方法 [13], [11], [8] について述べよう．

0) Bancroft [2] の結果

上の i) で与えられた T_1 に対応する T_1^* の偏り Bias (T_1^*) と平均平方誤差 MSE (T_1^*) を求めている．Bias (T_1^*) と MSE (T_1^*) の正しい結果（多分ミスプリント）を与えておく．

$$\mathrm{Bias}(T_1^*)=\frac{n_2}{n_1+n_2}\left\{I_{x_0}\left(\frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2}+1\right)\sigma_y^2-I_{x_0}\left(\frac{n_1}{2}+1,\ \frac{n_2}{2}\right)\sigma_x^2\right\},$$

$$\mathrm{MSE}(T_1^*)=\frac{1}{(n_1+n_2)^2}\left\{n_1(n_1+2)I_{x_0}\left(\frac{n_1}{2}+2,\ \frac{n_2}{2}\right)\sigma_x^4\right.$$

$$+2n_1n_2I_{x_0}\left(\frac{n_1}{2}+1,\ \frac{n_2}{2}+1\right)\sigma_x^2\sigma_y^2+n_2(n_2+2)I_{x_0}\left(\frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2}+2\right)\sigma_y^4\Big\}$$

$$+\frac{n_1+2}{n_1}\left\{1-I_{x_0}\left(\frac{n_1}{2}+2,\ \frac{n_2}{2}\right)\right\}\sigma_x^4$$

$$-\left[1+\frac{2n_2}{n_1+n_2}\left\{I_{x_0}\left(\frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2}+1\right)\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}-I_{x_0}\left(\frac{n_1}{2}+1,\ \frac{n_2}{2}\right)\right]\sigma_x^4\right.$$

但し，$I_x(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha+\beta)/\{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\}\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$, $x_0=n_1\varphi\lambda/(n_2+n_1\varphi\lambda)$, $\varphi=\sigma_y^2/\sigma_x^2$.

[2] では最適な λ, 即ち有意水準 α の決め方は与えていない．しかし決めたいと考えたと思われる．なぜなら彼は $\{\mathrm{MSE}(T_1^*)+\mathrm{Bias}^2(T_1^*)\}/\sigma_x^4$ の値を各 n_1, n_2 と各 λ, φ に対して求めている．思うにこの規準を導入することによってこの値の最も小さくなる λ を捜そうとしたと思われる．勿論，$\mathrm{MSE}(T_1^*)$ を最小にする方法でもうまくいかないことがわかる．これらのことをみるために我々は彼の考えを進めて各 φ に対し $\{\mathrm{MSE}(T_1^*)+\mathrm{Bias}^2(T_1^*)\}/\sigma_x^4$(上段の破線）と $\mathrm{MSE}(T_1^*)/\sigma_x^4$（実線），$\mathrm{Bias}(T_1^*)/\sigma_x^2$（最下段の破線）のグラフを図 3-1 から図 3-10 で書いてみた．但し $n_1=12, n_2=10$ で α の函数とみる．

1) Toyoda-Wallace [13] の方法

$S^2=\{n_1S_x^{*2}+n_2S_y^{*2}\}/(n_1+n_2)$ とし，最良の λ を求める規準として

$$\max_{\lambda}\int_0^1[\min\{\mathrm{MSE}(S_x^{*2}), \mathrm{MSE}(S^2)\}-\mathrm{MSE}(T_2^*)]\,d\theta$$

を導入した．但し，$\theta=\sigma_x^2/\sigma_y^2\,(0<\theta\leqq 1)$ である．この規準は θ の事前分布として一様なものを仮定している．この規準の下で得られた最適な有意水準は 1/2 前後 (0.45～0.63) である．$n_1=n_2$ ならば $\alpha=1/2$, 即ち $\lambda=1$ を得る．

我々は仮説 $\sigma_x^2=\sigma_y^2$, 対立仮説 $\sigma_x^2<\sigma_y^2$ を検定するとき有意水準 1/2 で仮説が採択されたとき（標本数が比較的大きいとき）ほんとうに $\sigma_x^2=\sigma_y^2$ として行動するであろうか？　別な云い方をすれば，有意水準 1/2 で仮説が棄却されたとき，小さい標本数のとき，ほんとうに $\sigma_x^2<\sigma_y^2$ と決定するであろうか？　ここに我々の疑問の出発点があった．では何故この様な結果が得られるのか．規準が不自然なのではないか．被積分函数は T_2^* に対する一種の相対効率を現わしている．そこで θ に一様な事前情報を仮定して，それを最大にする λ を選んでいる．$\theta=\sigma_x^2/\sigma_y^2$ $(0<\theta\leqq 1)$ であるから，これに一様な事前分布を仮定することは不自然に思える．即ち，固定された σ_x^2 に対し，θ は σ_y^2 の減少函数となるので，θ に一様な分布を与えることは不合理と云わねばならない．θ が 1 に近いときと，θ が 0 に近いときとで同じウエイトを仮定することは不自然と云わざるを得ない．一様な事前分布を仮定することは，相対的に対立仮説を採ることに重きを置き，従って有意水準は大きくなり過ぎる．その意味では彼等の結果は当然の帰結となっている．結論として，θ に一様な事前分布を仮定することが不合理であると云わねばならない．

当然ながら彼等の方法を用いた辻谷ら [14] の結果も不自然であろうと思われる．

2) Ohtani-Toyoda [11] の方法

彼等は Toyoda-Wallace の結果に疑問を持って新しい方法をみつけたものと思われる．Sawa-Hiromatsu [12] の用いた方法に倣い，regret を定義し，minimax regret という規準より最良の

λを捜した（この方法については Brook [4] も参照）．$R(\lambda,\theta)=\mathrm{MSE}(T_2^*)/\sigma_y^4$ と定義し，$\lambda=1$ で局所的に最小，ある θ では $\lambda=\infty$ も最小となり得る．そこで“残念さ”(regret) を

$$\mathrm{REG}(\lambda,\theta)=R(\lambda,\theta)-\min_{\theta}\{R(1,\theta),R(\infty,\theta)\}$$

で定義し，θ についての最大値 $\max\limits_{\theta}\mathrm{REG}(\lambda,\theta)$ を λ について最小にする，所謂 minimax regret 規準で λ の最適なものをみつけた．minimax regret 規準は興味のある方法であり，それを用いた結果は自然な結論を得るものと思われる．例えば，$n_1=12$, $n_2=8$ で最適有意水準 0.148 を得ている．この様な水準は図 3-1～3-10 からも自然であろうと思われる．しかしながら我々は彼等の方法について若干のコメントをしたい．

彼等の論文に従う．$R(1,\theta)=R(\infty,\theta)$ となる θ を $\bar{\theta}$ とする．そのとき

$$\min\{R(1,\theta),R(\infty,\theta)\}=\begin{cases}R(1,\theta) & \text{if } 0\leqq\theta\leqq\bar{\theta}\\ R(\infty,\theta) & \text{if } \bar{\theta}\leqq\theta\leqq 1\end{cases}$$

を得ている．しかしこの $\bar{\theta}$ は1つで一意的なものか？ 肯定的と思われるが，もしそうでなければ結果ははなはだおかしいものになろう．次に，$0\leqq\theta\leqq\bar{\theta}$ と $\bar{\theta}\leqq\theta\leqq 1$ に対する maximum regret を夫々 δ_L,δ_U とする．minimax regret procedure より得られる λ^* は $\delta_L=\delta_U$ 即ち $\mathrm{REG}(\lambda^*,\theta_L)=\mathrm{REG}(\lambda^*,\theta_U)$ であるような λ^* をみつけること．この方法より λ^* を得るためには如何にするのか？ 計算機で求めることはかまわないが，それに対する解析的な考察はなされ得ないのではないか．このことにともない n_1 や n_2 がだんだん大きくなると数値計算は安定しないのではないか．

3) Hirano [8] の方法

[8] で与えた方法で，補足の意味も含めてここで述べる．仮説 $H_0:\sigma_x^2=\sigma_y^2$, $H_1:\sigma_x^2\neq\sigma_y^2$, $H_1':\sigma_x^2<\sigma_y^2$, $H_1'':\sigma_x^2>\sigma_y^2$ の下での σ_x^2 の推定モデルの情報量 AIC を夫々 $A(H_0)$, $A(H_1)$, $A(H_1')$, $A(H_1'')$ と書く．H_0 の H_1 に対する優先条件を求めると，

$A(H_0)-A(H_1)<0\Leftrightarrow H_0$ の下で，

$$\left\{1+\frac{m-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F(n-1,m-1)}\right\}^n\left\{1+\frac{n-1}{m-1}F(n-1,m-1)\right\}^m<\left(\frac{n+m}{n}\right)^n\left(\frac{n+m}{m}\right)^m e^2$$

但し，$F(n-1,m-1)=n(m-1)\sigma_y^2S_x^2/\{m(n-1)\sigma_x^2S_y^2\}$ で，これは自由度 $n-1,m-1$ の F-分布に従う．そこで有意水準 α を $\alpha=1-\Pr\{A(H_0)-A(H_1)<0|H_0\}$ と与える方法であった．$n=m$ のときを考える．ここで

$$A_n=2e^{2/n}-1,\qquad B_n=2e^{1/n}\sqrt{e^{2/n}-1}$$

とおくと，$\alpha=1-\Pr\{A_n-B_n<F(n-1,n-1)<A_n+B_n\}$．各 n に対しこの値を表で与えておく．更に対応する λ の値も与える．一方，ある条件で尤度比統計量は $n\to\infty$ のとき H_0 の下でカイ2乗分布に従うという定理から，上の値は $n\to\infty$ のとき 0.15730 に近づくことがわかる（[6] を参照）．

次に片側の場合を考える．$n=m$ ならば両側の場合と同様にして

$$\alpha=1-\Pr\{A(H_0)-A(H_1')<0\}=\Pr\{A_n-B_n<F(n-1,n-1)<1\}+\frac{1}{2},$$

$$\alpha=1-\Pr\{A(H_0)-A(H_1'')<0\}=\Pr\{1<F(n-1,n-1)<A_n+B_n\}+\frac{1}{2}$$

を得る．ここで $A_n^2-B_n^2=1$ であるから

$$\begin{aligned}\Pr\{F(n-1,n-1)<A_n-B_n\}&=\Pr\{1/F(n-1,n-1)>1/(A_n-B_n)\}\\&=\Pr\{F(n-1,n-1)>1/(A_n-B_n)\}=\Pr\{F(n-1,n-1)>A_n+B_n\}.\end{aligned}$$

更に $\Pr\{F(n-1,n-1)>1\}=\Pr\{F(n-1,n-1)<1\}=\dfrac{1}{2}$ に注意する．次に示したいことは $\lim\limits_{n\to\infty}\Pr\{A_n-B_n<F(n-1,n-1)<A_n+B_n\}=c$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\{A_n-B_n<F(n-1,n-1)<1\}=c/2$$

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\{1<F(n-1,n-1)<A_n+B_n\}=c/2$$

である．そこで

$$\begin{aligned}1-c&=\lim_{n\to\infty}\Pr\{F(n-1,n-1)<A_n-B_n\}+\lim_{n\to\infty}\Pr\{A_n+B_n<F(n-1,n-1)\}\\&=2\lim_{n\to\infty}\Pr\{A_n+B_n<F(n-1,n-1)\}\\&=2\lim_{n\to\infty}\Pr\{F(n-1,n-1)<A_n-B_n\}\end{aligned}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\Pr\{A_n-B_n<F(n-1,n-1)<1\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\Pr\{F(n-1,n-1)<A_n-B_n\}\right]\\&=\frac{1}{2}-\frac{1-c}{2}=\frac{c}{2}.\end{aligned}$$

第2式も同様である．

このことから我々は $n=m$ ならば2つの片側検定推定量の有意水準は共に等しく，且つ両側のそれの半分であることがわかった．この結果がわかってはじめて，この種の検定推定量の有意水準指定問題は，$n=m$ のときではあるが片側だけ論議すればよいと客観的に裏付けされる．以上の結果が不自然でないことを次の章で考察しよう．

表　両側の場合（推定量 T を用いるとき）の有意水準 α とその限界点 τ と λ

n	α	τ	λ	n	α	τ	λ	n	α	τ	λ
2	0.41488	0.11417	8.75896	12	0.18548	0.43697	2.28847	22	0.17210	0.54466	1.83602
3	0.30245	0.17817	5.61277	13	0.18315	0.45178	2.21347	23	0.17143	0.55209	1.81131
4	0.25734	0.22905	4.36583	14	0.18117	0.46535	2.14891	24	0.17082	0.55913	1.78848
5	0.23338	0.27050	3.69679	15	0.17947	0.47786	2.09266	25	0.17026	0.56583	1.76732
6	0.21860	0.30513	3.27732	16	0.17800	0.48944	2.04315	26	0.16974	0.57220	1.74763
7	0.20859	0.33465	2.98820	17	0.17671	0.50020	1.99918	27	0.16926	0.57828	1.72927
8	0.20138	0.36025	2.77585	18	0.17557	0.51025	1.95983	28	0.16882	0.58408	1.71208
9	0.19594	0.38275	2.61264	19	0.17456	0.51965	1.92436	29	0.16841	0.58964	1.69596
10	0.19169	0.40276	2.48285	20	0.17366	0.52849	1.89220	30	0.16802	0.59495	1.68080
11	0.18828	0.42072	2.37686	21	0.17284	0.53680	1.86288	∞	0.15730	1.0	1.0

注意　片側の場合の見方　有意水準は両側の半分だから表の値の半分である．また限界点は T_1 に対しては表の λ の値，T_2 に対しては表の τ の値とする．

3. モーメントと討論

2章で $n=m$ であれば有意水準の指定は片側検定推定量で考えればよいと述べた．そこで我

々は T_1 の平均と平均平方誤差を与える．[2] と全く同様にして求めればよい．

$$\frac{\mathrm{E}(T_1)}{\sigma_x^2}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+m)}\left\{n(m-1)\varphi I_{\lambda'}\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{m-1}{2}+1\right)\right.$$
$$\left.-m(n-1)I_{\lambda'}\left(\frac{n-1}{2}+1,\ \frac{m-1}{2}\right)\right\},$$

$$\frac{\mathrm{MSE}(T_1)}{\sigma_x^4}=\frac{2n-1}{n^2}-\frac{m(2n+m)(n^2-1)}{n^2(n+m)^2}I_{\lambda'}\left(\frac{n-1}{2}+2,\ \frac{m-1}{2}\right)$$
$$+\frac{2m(n-1)}{n(n+m)}I_{\lambda'}\left(\frac{n-1}{2}+1,\ \frac{m-1}{2}\right)+\frac{2(n-1)(m-1)}{(n+m)^2}\varphi I_{\lambda'}\left(\frac{n-1}{2}+1,\ \frac{m-1}{2}+1\right)$$
$$-\frac{2(m-1)}{n+m}\varphi I_{\lambda'}\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{m-1}{2}+1\right)+\frac{m^2-1}{(n+m)^2}\varphi^2 I_{\lambda'}\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{m-1}{2}+2\right)$$

但し，$\lambda'=n\varphi\lambda/(n\varphi\lambda+m)$．$W_{T_1}(\lambda,\varphi)$ を λ の函数と考え，その動きについて調べる．凡そのことは図1でわかる．具体的には $n=13, m=11$ のとき $\varphi=0.1$ と 0.9 のときグラフを図2-1, 2-2 で与えた．上段と下段の破線は夫々 $\{\mathrm{MSE}(T_1)+\mathrm{Bias}^2(T_1)\}/\sigma_x^4$ と $\mathrm{Bias}(T_1)/\sigma_x^2$ のグラフ，実線が $W_{T_1}(\lambda,\varphi)$ のグラフである．

$(=W_{T_1}(\lambda,\varphi)$ とおく)，

λ	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$(2/\varphi)-1$	$\cdots$	∞
$\dfrac{\partial W_{T_1}(\lambda,\varphi)}{\partial\lambda}$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$W_{T_1}(\lambda,\varphi)$	$W_{T_1}(0,\varphi)$	↘	$W_{T_1}(1,\varphi)$	↗		↘	$W_{T_1}(\infty,\varphi)$

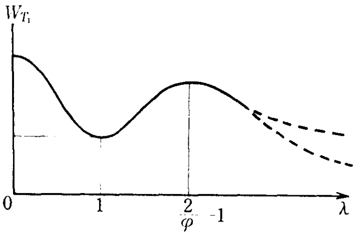

図 1

$0<\varphi\leqq 1$

$$W_{T_1}(0,\varphi)=\frac{2n-1}{n^2}$$

$$W_{T_1}(\infty,\varphi)=\frac{m^2-1}{(n+m)^2}\left\{\varphi^2-2\varphi+1+\frac{2(n+m)}{m^2-1}\right\}$$

[11] と同じように $\lambda=1$ で $W_{T_1}(\lambda,\varphi)$ は局所的に最小になる．[13] の結果のように一見して $\lambda=1$ がよさそうにみえる．しかし φ が大きいとき，即ち σ_x^2 と σ_y^2 が近いとき，局所的最小値 $W_{T_1}(1,\varphi)$ と局所的最大値 $W_{T_1}((2/\varphi)-1,\varphi)$ が近い値となる．このとき，最小値は $(2/\varphi)-1$ より大きい λ ($\lambda=\infty$ も含める) でとる．Hirano の方法で指定した有意水準に対応する λ は2前後の値であるが，これは大きい φ に対して小さいリスク W_{T_1} を与えるように指定されている．当然ではあるが，φ が0に近いとき検定による決定の誤りは確率的にほとんど起こらない．反対に，φ が1に近いとき決定の誤りは起こりやすいわけであるが，この起りやすい情況でリスク W_{T_1} を小さくするように λ (即ち α) は決められていると考えられる．この結果は自然なものと云えよう．

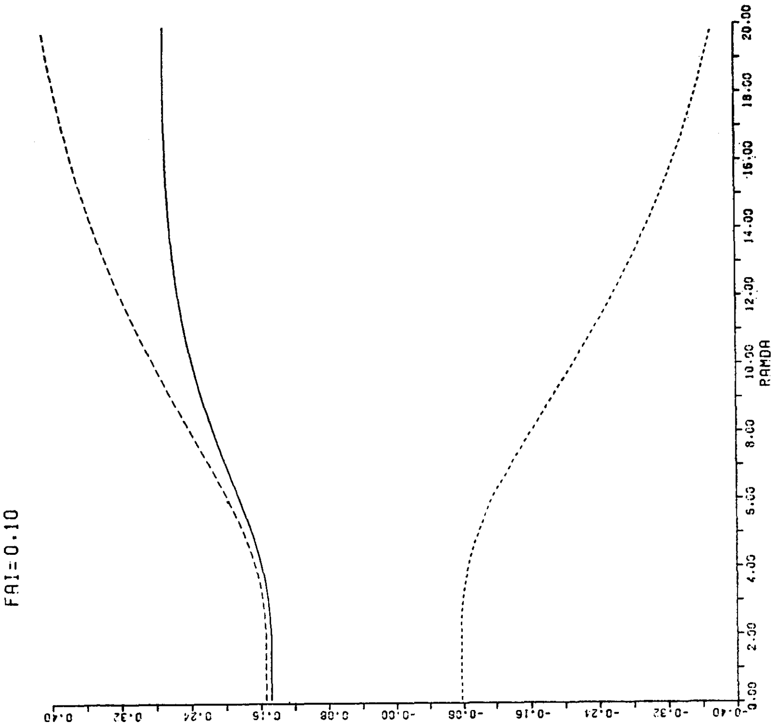
FAI=0.10
RAMDA
0.00 2.00 4.00 6.00 8.00 10.00 12.00 14.00 16.00 18.00 20.00
-0.40 -0.32 -0.24 -0.16 -0.08 -0.00 0.08 0.16 0.24 0.32 0.40

図 2-1

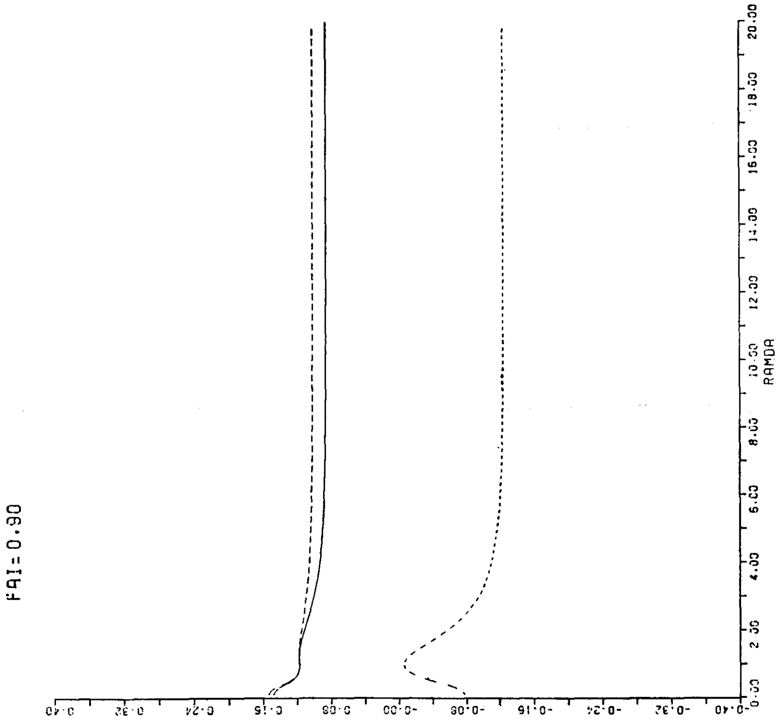
FAI=0.90
RAMDA
0.00 2.00 4.00 6.00 8.00 10.00 12.00 14.00 16.00 18.00 20.00
-0.40 -0.32 -0.24 -0.16 -0.08 -0.00 0.08 0.16 0.24 0.32 0.40

図 2-2

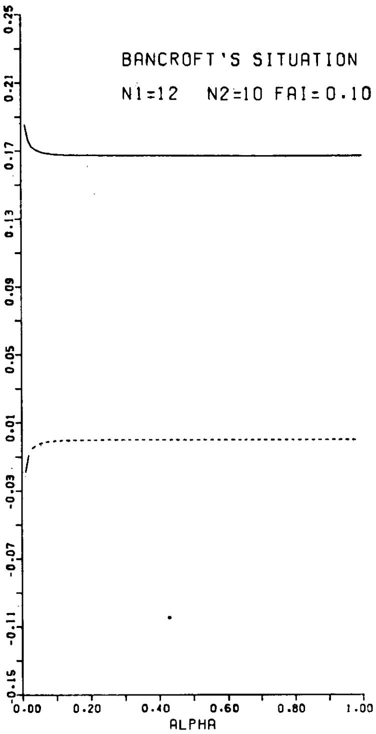

図 3-1

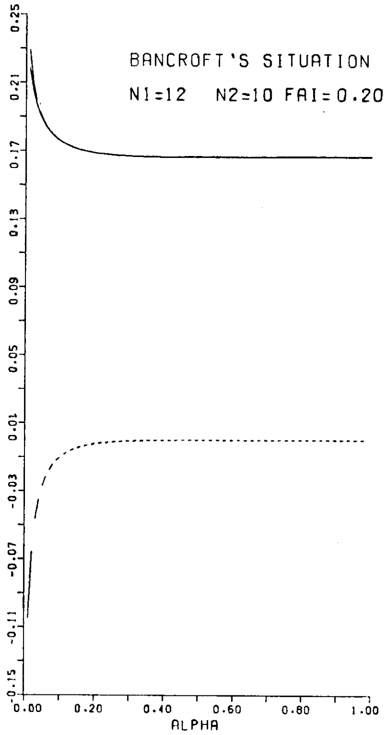

図 3-2

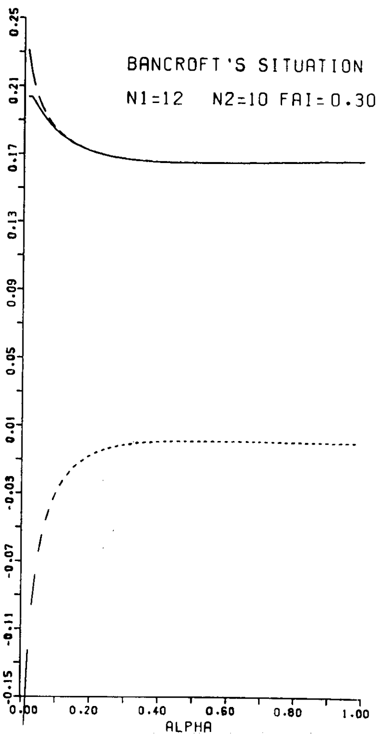

図 3-3

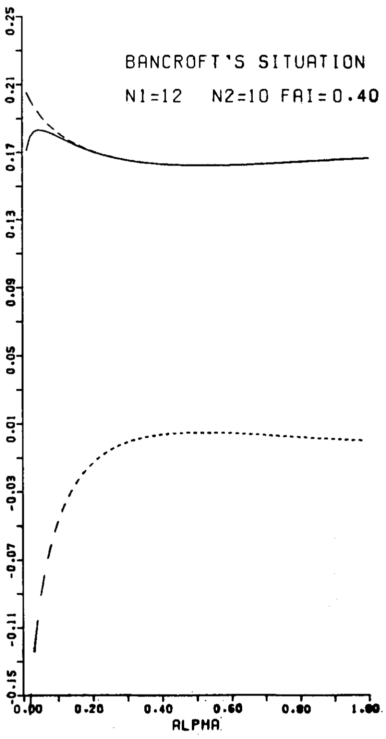

図 3-4

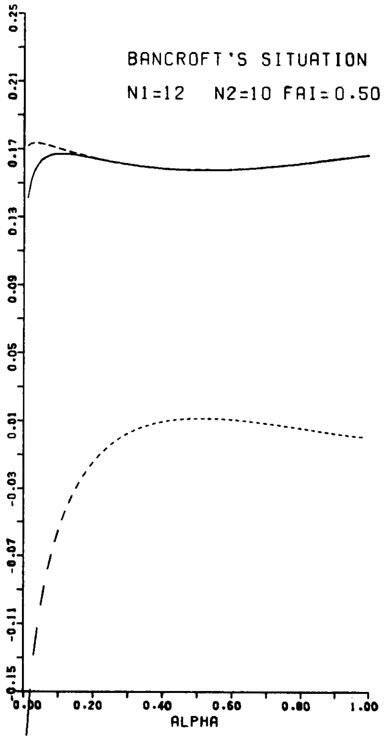

図 3-5

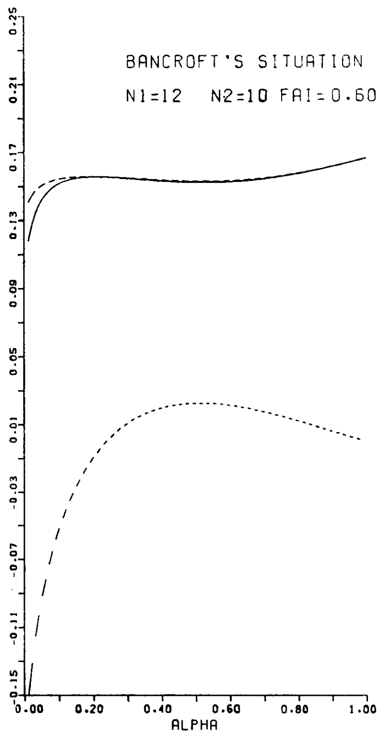

図 3-6

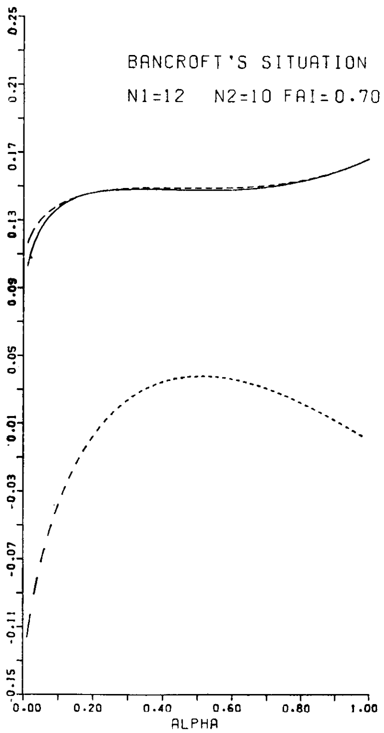

図 3-7

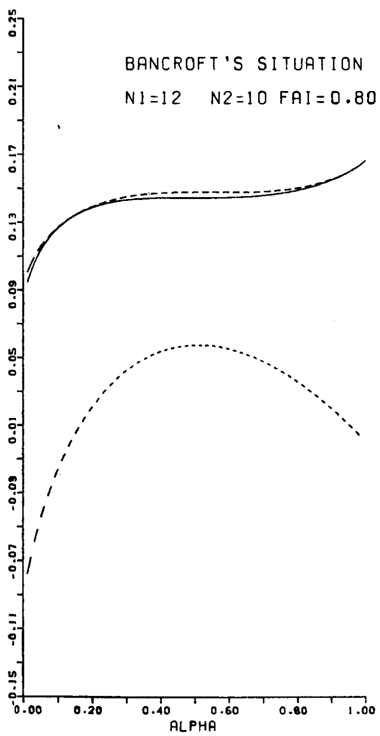

図 3-8

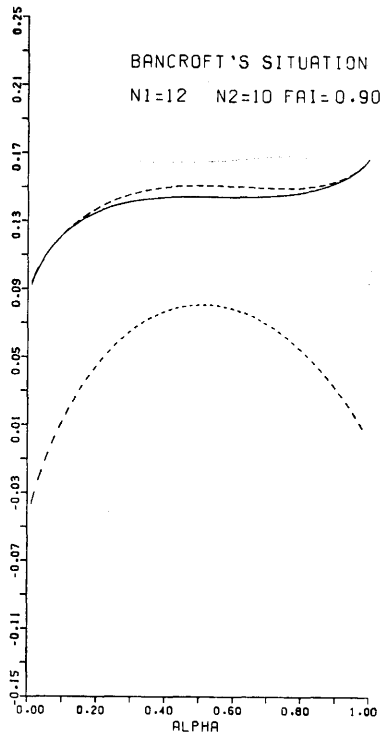

図 3-9

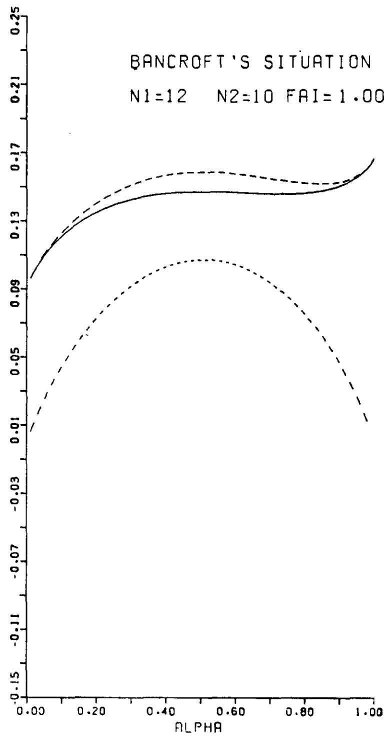

図 3-10

有意水準で考えてみる．$n_1=12, n_2=10$ で，我々の結果では約 0.09，情況が違うので正しくは云えないが，Toyoda-Wallace と Ohtani-Toyoda の結果では夫々約 0.5 と約 0.1 とみて，グラフ（図 3-1 から 3-10）をみると上で述べたことがはっきり理解されよう．即ち我々と Ohtani-Toyoda の結果は，大きい φ に対して良く，小さい φ に対して然程悪くはなっていない．一方 Toyoda-Wallace の結果は，大きい φ に対して悪くなり（$\varphi=1.0$ 図 3-10 と $\varphi=0.9$ 図 3-9 で上段の破線），小さい φ に対して良い．以上の大きな相違点がある．一般的にはどちらを選ぶかは，夫々の規準の下で最も良いものを選択しているわけだから一概に云い切れない場合もあろう．しかしながら我々は考察している規準が不自然であるとか，得られた結果が実際の行動にあわないということなどで決めるだろう．そして少なくも断言できることは，起りやすい場合に危険が大きくなる決定を日常我々はとっていないということである．

最後に規準として Bancroft の論文で述べられている規準，即ち平均平方誤差と偏りの2乗を加えたもので考えても，グラフからみて我々の結果は妥当な結果をひき出していると云えるであろう．

4. 展　　望

推測過程（北川 [10] を参照されたい）と呼ばれる手法のうち，予備的な検定ののちの推定（ここで扱ったものを我々は2標本の検定推定量といった）について考察してきた．実用性に富む手法ゆえに最近残された問題点，即ち最適な有意水準の指定が論議されている．検定推定量が一意的に決定されないことは，日常よく用いられる有意水準のうちどのようなものを使用したらよいのかという疑問を常にひき起す．それは勿論片側と両側の場合も含めてであり，更

に検定推定量の良さという視点から両者の有意水準の関係は如何に，という疑問もでてこよう．これらの素朴な疑問は実際にこの手法を使うならば自然に起こる．我々が 2, 3 章で考察した方法を用いるならば，この種の検定推定量の有意点問題は，仮定する推定モデルの持つ情報量の比較で見通し良くすべて解決されよう．

例えば平均の推定（この場合 $\sigma_x^2=\sigma_y^2$）を考えれば，我々の方法を用いた結果は笠置・柳川 [9] の単峰性の基準からの結果に一致している．彼等の基準の解釈の妥当性を考えれば，得られた結果も自然と云えよう（Hirano [7] を参照）．加えるに，我々の方法は等標本数 $n=m$ の仮定の制限をとっても論じることが可能であった．更に，ここでは述べなかったが分散の推定についても必要のない仮定であることもわかる．

これらの例から考えても理解される様に，検定推定量の有意点の指定問題はほゞ全般的に見通しよく解決され得ると思われる．別の見方をすれば，検定して分布の母数構造を調べ且つその母数を推定する問題は，考え得るすべての仮説の下での推定モデルを考えれば検定を結果的には行なわないで済むことになる．この様に考えると（この種の）検定推定量の有意水準問題は上記の観点にすべて含まれてしまう．汎用性の理由をここにみるだろう．

[13] の問題も解けると思われるが具体的に解き示すという問題点は常に残っている．こゝではこの種の問題点以外の今後の課題を述べよう．予想ではあるが，我々の与えた有意水準が多少違っても平均平方誤差はほとんど変化しないのではないか．根拠は [11] と [8] の夫々の表をみて得られた結果が多少異っていることである．頑健性についての論議が必要である．[9] から [7] の結果をみれば，どの方向に正規性をずらすかは問題としても有意点は余り変わらないのではないか．有意点は変わらないというより効率は落ちないと云うべきかもしれない．最後に指摘したい問題点は，$n \neq m$ の場合や，両側でもはっきり制限のついた検定推定量の問題である．この課題については別の機会に考察したい．

謝　辞

数値計算および図の作成は菊地由美子氏の助力によった．厚く御礼申し上げる．

参考文献

[1] Asano, C. (1978) 学術文献情報「推測過程論」 Kyushu University, Research Institute of Fundamental Information Science.

[2] Bancroft, T.A. (1944) On biases in estimation due to the use of preliminary test of significance, *Ann. Math. Statist.*, **15**, 190–204.

[3] Bancroft, T.A. and Han, C. (1977) Inference based on conditional specification: a note and a bibliography, *International Statistical Review*, **45**, 117–127.

[4] Brook, R.J. (1976) On the use of a regret function to set significance points in prior test of estimation, *J. Amer. Statist. Ass.*, **71**, 126–131.

[5] Hirano, K. (1973) Some properties of an estimator for the variance of a normal distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **25**, 479–492.

[6] Hirano, K. (1977) Estimation procedures based on preliminary test, shrinkage technique and information criterion, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **29**, A, 21–34.

[7] Hirano, K. (1978a) On level of significance of the preliminary test in pooling means, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **30**, A, 1–8.

[8] Hirano, K. (1978b) A note on level of significance of the preliminary test in pooling variances, *J. Japan Statist. Soc.*, **8–2**, 71–75.

[9] 笠置文善，柳川　堯 (1978) 分布の単峰性を基準とした標本の合併，第46回日本統計学会講演予稿集．

[10] 北川敏男 (1958) 推測過程論，岩波講座現代応用数学．

[11] Ohtani, K. and Toyoda, T. (1978) Minimax regret critical values for a preliminary test

in pooling variances, *J. Japan Statist. Soc.*, **8**–1, 15–20.

[12] Sawa, T. and Hiromatsu, T. (1973) Minimax regret significance points for a preliminary test in regression analysis, *Econometrica*, **41**, 1093–1101.

[13] Toyoda, T. and Wallace, T.D. (1975) Estimation of variance after a preliminary test of homogeneity and optimal levels of significance for the pre-test, *J. Econometrics*, **3**, 395–404.

[14] 辻谷将明，太田 宏，加瀬滋男 (1978) 寿命試験における試料併合 —極値分布の分散推定について—，品質 **8**-1，28-32.