非対称一般化誤差分布について

統計数理研究所　田　口　時　夫

(1979年9月　受付)

On an Asymmetric General Error Distribution

Tokio Taguchi
(The Institute of Statistical Mathematics)

筆者は1979度に Subbotin の一般化誤差分布を norm 概念を導入することにより解析した．又，その結果に基づき対数変換により一般化所得分布を定義する一方，二次の対称同時分布の基準形式を

$$(1)\quad \varphi^{(p)}(x, y; \rho_p)=\frac{|\rho_p xy|^{(p-1)/2}\exp\left\{-\frac{|x|^p+|y|^p}{p(1-|\rho_p|^p)}\right\}}{4(1-|\rho_p|^p)\,p^{1/p-1}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\left[I_{1/p-1}\left(\frac{2|\rho_p xy|^{p/2}}{p(1-|\rho_p|^p)}\right)\right.$$

$$\left.+|\rho_p|^{2-p}\{\mathrm{sgn}(\rho_p xy)\}I_{1-1/p}\left(\frac{2|\rho_p xy|^{p/2}}{p(1-|\rho_p|^p)}\right)\right];\qquad \begin{array}{r}-\infty\leqq x,\ y\leqq\infty\\ -1\leqq\rho_p\leqq 1,\ p\geqq 1\end{array}$$

によって示すことができた．ここで ρ_p は，p-norm の線形相関係数を表わす．以上の結果は，'On a generalization of Gaussian distribution', (1978) *Ann. Inst. Statist. Math.*, Vol. 30, No. 2, A に報告されている．

(1) 式は，周辺分布が，共に同一の分布形式

$$(2)\quad f_1(x)=\frac{1}{2p^{1/p-1}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\exp\left(-\frac{1}{p}|x|^p\right),\quad f_2(y)=\frac{1}{2p^{1/p-1}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\exp\left(-\frac{1}{p}|y|^p\right)$$

となる対称の場合であるが，実際的には，

$$(3)\quad f_1(x)=\frac{1}{2p^{1/p-1}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\exp\left(-\frac{1}{p}|x|^p\right),\quad f_2(y)=\frac{1}{2q^{1/q-1}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}\exp\left(-\frac{1}{q}|y|^q\right)$$

のような非対称同時分布の考察が必要と思われる．その基準形式は $(p,\ q)$ -norm の非線形相関係数 ρ_{pq} を用いて

$$(4)\quad \varphi^{(p,q)}(x, y; \rho_{pq})=\frac{\exp\left(-\frac{|x|^p}{p}-\frac{|y|^q}{q}\right)}{4\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}}\left\{\frac{1}{p^{(1/p-1)}q^{(1/q-1)}}\right.$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\sqrt{\Gamma\left(n+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{q}\right)}}L_n^{(1/p-1)}\left(\frac{|x|^p}{p}\right)L_n^{(1/q-1)}\left(\frac{|y|^q}{q}\right)$$

$$+\ \rho_{pq}\{\mathrm{sgn}\ (x,\ y)\}|x|^{p-1}|y|^{q-1}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{\Gamma\left(n+2-\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(n+2-\frac{1}{q}\right)}} L_n{}^{(1-1/p)}\left(\frac{|x|^p}{p}\right) L_n{}^{(1-1/q)}\left(\frac{|y|^q}{q}\right) |\rho_{pq}| \Big\} ;$$

$$-\infty \leqq x,\ y \leqq \infty,\ p \geqq 0,\ -1 < \rho_{pq} < 1$$

と表わすことが出来る．これによって Laplace 分布から Gauß 分布への推移，或いは Pareto 分布から Gibrat 分布への推移等の過程の表現も可能となり，これ等により非線形分布構造・確率過程（x, y を同時点又は異時点の変量と考える）の研究を進めることが出来よう．

（此の稿未完）

本研究員は1979年9月20日より長期海外出張のため本報告は昭和53年度研究発表会要旨（昭和54年3月20日（火），統計数理研究所・講堂）を用いた．