部分母集団の選別に関するベイズ決定関数

統計数理研究所　野　田　一　雄

(1979 年 12 月　受付)

Bayes Decision Functions For Selecting Subpopulations

Kazuo Noda
(The Institute of Statistical Mathematics)

Cochran's criterion [2] for the problem of selecting subpopulations is to select a subpopulation of members of a population on the basis of measuring values of a variable X in such a manner that the mean of the subpopulation with respect to a variable Y whose values are realized in the future becomes as large as possible under the constraint that the size of the subpopulation is equal to a given fraction α $(0<\alpha<1)$. However the optimum selections $\phi_\theta{}^*$ for this criterion depend on the unknown parameter θ.

In this paper it is presented to consider Bayes decision functions $\hat{\phi}_\xi$ which take the place of $\phi_\theta{}^*$ by using a subsample S under a given prior probability density ξ. A necessary and sufficient condition for a decision function satisfying the criterion to be a Bayes decision function is given (in Theorem 2.2). Further an example of finding the explicit expressions of Bayes decision functions $\hat{\phi}_\xi$ is given by specializing ξ and the family of the probability densities $f(x, y, \theta)$ of (X, Y), where the result in Theorem 2.2 is applicated (in Example 3.2).

1.　は　じ　め　に

1.1.　部分母集団の最適選別

部分母集団（もしくはグループ）の選別とは，入学試験における選抜や農畜産の品種改良における良質部分の選別などにみられるように，ある母集団の成員の部分集団を一定の基準のもとでどのように選びだすかという問題である．その場合，成員の特徴を量的に規定する変量 Y の実現値（例えば，入学試験の選抜においては，学生の入学後の学業成績など）は，選別の現在時点においては観測されず将来において始めてみいだされる．したがって，次位にはなるが成員の特徴をやはり規定する別の変量 X の実現値（例えば，入学試験の選抜においては，学生の入学試験の成績など）がある一定の領域 R（とりあえず，これを選別領域とよぶことにする）に属することを観測することによって，対応する成員を選別する集団の一員とするということが考えられる．つまり，選別領域 R に属する x に対応する成員の集合が，選別される部分集団となるわけである．その場合，集団の選別は将来の目的のために変量 Y に関係する一定の基準のもとでなされる．かくして，Y に関係してある一定の制約条件のもとである目的関数の最大値もしくは最小値を実現する集団の選別は最適選別 optimum selection とよばれる[1]．いろいろな基準が考えられるが，ここではその典型である Cochran [2] によって与えられた基準について最適選別を考える(*)．

いま，X, Y の同時確率密度関数を $f(x, y, \theta)$ によってあらわす．ここで θ は未知パラメーターをあらわす．θ の空間 Θ は p-次元実数空間 $\mathscr{R}^p$，もしくはその内部の（超）長方形（一般には Borel-可測集合）としておく．

(*)　より一般的な基準のとりあつかいについては [9] を見よ．ただし，ここでは Cochran の基準の特徴をいかして内容を展開する．(1.8) 式に関する註を見よ．

X は，その確率密度 g があらかじめ既知であるようにとられている．X が与えられたときの Y の回帰関数を $\eta\ (x,\ \theta)$ によってあらわす(*)．$\mathscr{R}$，$\mathscr{R}^q$ をそれぞれ実数空間，q 次元の実数空間をあらわすことにする．X，Y は，それぞれ $\mathscr{R}^q$ および $\mathscr{R}$ において実現値をとるものとする．

このとき，選別される集団を $(x,\ y)$-平面上に表示すれば，R を選別領域として，直積集合 $R\times\mathscr{R}=\{(x,\ y):x\in R,\ y\in\mathscr{R}\}$ となる．いま選別される部分母集団の大きさを $\alpha\ (0<\alpha<1)$ とすれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{R} f\ (x,\ y,\ \theta)\ dxdy=\int_{R} g\ (x)\ dx=\alpha$$

となる．そこで，R の定義関数

$$\phi_R\ (x)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad x\in R,\\ 0 & \text{if}\quad x\notin R\end{cases}$$

によって，選別後の部分母集団の確率密度は $\phi_R f/\alpha$ としてあらわされる．かくして，選別領域R に対応する定義関数 ϕ_R が一般化されて，$\mathscr{R}^q$ の各 x について $0\leqq\phi(x)\leqq1$ なる x の実数値関数(**)は選別 selection とよばれる（[1] を見よ）．

さて，Cochran が与えた基準は次のように述べられる：

$$\tau_1\ (\phi)\rightleftarrows\int_{\mathscr{R}^q}\phi\ (x)\ g\ (x)=\alpha \tag{1.1}$$

なる制約条件 C のもとで，ϕ の良さは各 θ について目的関数

$$\tau_0\ (\theta,\ \phi)\rightleftarrows\int_{\mathscr{R}^q}\int_{-\infty}^{\infty} y\,[\phi\ (x)\ f\ (x,\ y,\ \theta)/\alpha]\ dy\ dx \tag{1.2}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_{\mathscr{R}^q}\eta\ (x,\ \theta)\ \phi\ (x)\ g\ (x)\ dx$$

によって測られること．すなわち，容量を一定値 α に制限するなかで，選別後の部分母集団（その確率密度は $\phi f/\alpha$）の Y に関する平均値を最大にするような最適選別を求めることが要求されるということである．

さて，すべての選別 ϕ の族を Φ，そのうち (1.1) を満足する ϕ の部分族を $\Phi(C)$ によってあらわす．このとき $\Phi(C)$ に属しかつ $\tau_0(\theta,\ \phi)\ (\phi\in\Phi(C))$ の最大値を実現する最適選別は存在する．さらに，$\Phi(C)$ に属す選別 ϕ_θ が最適であるための必要十分条件は，ある θ の関数 k があって ϕ_θ が

$$\phi_\theta\ (x)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad \eta\ (x,\ \theta)>k\ (\theta),\\ 0 & \text{if}\quad \eta\ (x,\ \theta)<k\ (\theta)\end{cases} \tag{1.3}$$

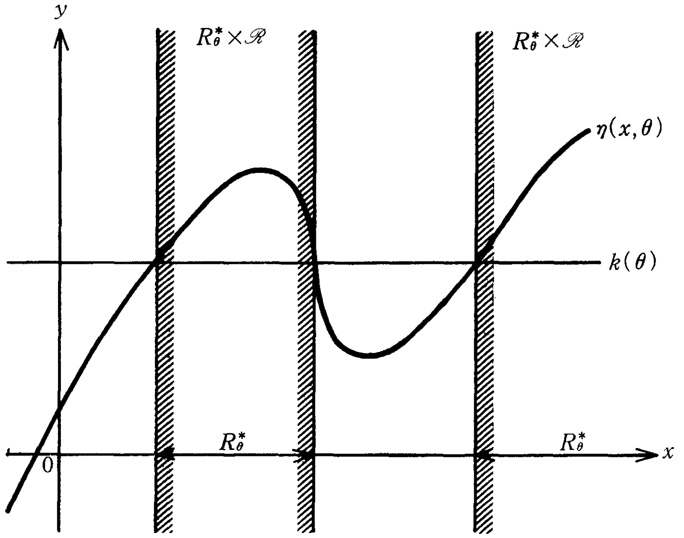
を各 θ およびほとんどすべての(***)
x について満足することである（[2] もしくは [10] を見よ）．つまり，最適選別は未知パラメーター θ に依存する．とくに

$$\int_{\eta(x,\theta)=k(\theta)} g\ (x)\ dx=0$$

(*)　各 θ について Y の平均の存在，したがってその $g(x)dx$ に関する積分可能性を仮定しておく．

(**)　詳しくは，Borel-可測関数．今後，とりあつかう各関数の可測性については，言及することを省略する．

(***)　$g(x)dx$ によって定義される測度について，今後も同様．



であるときは，

$$\phi_\theta^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \eta(x, \theta) \geqq k(\theta), \\ 0 & \text{if} \quad \eta(x, \theta) < k(\theta) \end{cases} \tag{1.4}$$

は最適選別であり，$\eta(x, \theta) \geqq k(\theta)$ を満たす x の集合 R_θ^* は最適な選別領域である．また，(1.3) あるいは (1.4) における k は

$$\int_{\eta(x, \theta) \geqq k(\theta)} g(x)\, dx = \alpha \tag{1.5}$$

を満たすものとして与えられる．われわれは，最適選別のうちからその一つを固定し，これを ϕ_θ^* によってあらわすことにする(*)．

1.2. ϕ_θ^* に代りえるベイズ決定関数を求めること

最適選別 ϕ_θ^* が未知パラメーター θ に依存するために，(X, Y) とは独立にとられた補助サンプル $S=((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n))$ を基にして，ϕ_θ^* に代りえる選別の構成，つまり S の観測値から情報をえることによって選別をきめる決定関数を求めることが問題となる．ただし (X_i, Y_i) は互いに独立で同じ確率密度 f に従って分布するものとする．S の標本空間を $\mathscr{S}$ によってあらわすことにしよう．このとき S は確率密度

$$f_\theta(s) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, \theta) \tag{1.6}$$

に従う．さて，われわれには，Θ の上に事前確率密度 ξ が与えられているものと仮定する．そこで，次のような $\mathscr{S}$ から Φ への決定関数の族を考える．

いま，各 (x, s) について $0 \leqq \hat{\phi}(x, s) \leqq 1$ なるような (x, s) の関数 $\hat{\phi}$ の全体を $\hat{\Phi}$ によってあらわし，決定関数の空間とよぶ．すなわち $\hat{\Phi}$ の各元 $\hat{\phi}$ は，標本空間 $\mathscr{S}$ から Φ への決定関数を意味し，S の実測値 s が与えられると一つの選別 $\hat{\phi}(\cdot, s)$ をきめる．この場合，Φ は決定の空間を意味するわけである．そこで，

(*) 通常の場合，ϕ_θ^* は (x, θ) について Borel-可測である．したがって，ここでは，ϕ_θ^* は (x, θ) について Borel-可測であると仮定する．

(1.7) $$\bar{f}(s)=\int_{\Theta} f_{\theta}(s)\,\xi(\theta)\,d\theta$$

とおき，ほとんどすべての(*) s について制約条件 $\hat{c}$,

(1.8) $$\tau_1(\hat{\phi})=\int_{\mathscr{R}^q}\hat{\phi}(x,\ s)\,g(x)\,dx=\alpha$$

を満たすすべての $\hat{\phi}$ の部分族を $\hat{\Phi}(\hat{c})$ によってあらわす(**). $\hat{\Phi}(\hat{c})$ が空でないことは，例えば Θ において値をとる S からつくられた θ の推定量を $\hat{\theta}(S)$ とすると，$\phi_{\theta}{}^*$ において θ の代りに $\hat{\theta}$ を置きかえた $\phi_{\hat{\theta}}{}^*$ を考えればよい．すなわち $\phi_{\hat{\theta}}{}^*$ は $\Phi(\hat{c})$ に属す．いま，Φ の中から ϕ をとったときの損失を，各 θ について

(1.9) $$L(\theta,\ \phi)=\tau_0(\theta,\ \phi_{\theta}{}^*)-\tau_0(\theta,\ \phi)$$

とおき，決定関数 $\hat{\phi}$ の危険を

(1.10) $$r(\theta,\ \hat{\phi})=\mathrm{E}_{\theta}L(\theta,\ \hat{\phi})$$

によって定める(***). ただし，$\mathrm{E}_{\theta}(\cdot)$ は f_{θ} による期待値を示す．かくして，$\hat{\phi}$ のベイズ危険は

(1.11) $$\bar{r}(\xi,\ \hat{\phi})=\int_{\Theta} r(\theta,\ \hat{\phi})\,\xi(\theta)\,d\theta$$

によってあらわされる．

本稿の目標は，$\hat{\Phi}(\hat{c})$ のすべての $\hat{\phi}$ について

(1.12) $$\bar{r}(\xi,\ \hat{\phi}_{\xi})\leqq\bar{r}(\xi,\ \hat{\phi})$$

を満足する $\hat{\Phi}$ の元 $\hat{\phi}_{\xi}$, つまりベイズ決定関数を求めることである．本論文全体の構成は次のとおりである．

第2節において，まずベイズ決定関数 $\hat{\phi}_{\xi}$ の存在を示す（定理 2.1）．次に $\hat{\Phi}(\hat{c})$ に属するある決定関数がこのようなベイズ決定関数であるための必要十分条件をあたえる（定理 2.2）．すなわち，$\hat{\Phi}(\hat{c})$ に属するある決定関数がベイズ決定関数であるかということは，この定理 2.2 によって判別される．第3節の例 3.2 において示されるように，通常の場合では，この定理を応用することによって比較的簡単にベイズ決定関数を求めることができる．第3節においては，実際に最適選別とそれに代るベイズ決定関数を求める方法を示す．まず，例 3.1 において，$(X,\ Y)$ の確率密度関数の族 $\{f(x,\ y,\ \theta)\,;\ \theta\in\Theta\}$ を具体化することによって，この場合のすべての最適選別を求める（(3.6) 式を見よ）．例 3.2 においては，すでに述べたように，例 3.1 の設定のもとで事前確率密度 ξ を具体化することによって，この場合のすべてのベイズ決定関数を求める（(3.14) を見よ）．

2. ベイズ決定関数であるための必要十分条件

定理 2.1

(1.12) において定義されたベイズ決定関数 $\hat{\phi}_{\xi}$ は存在する．

証明

$(x,\ s)$ の有界関数全体からつくられる実数係数の線型空間を $B(\mathscr{R}^q\times\mathscr{S})$ によってあらわす．同じく，s の有界関数全体からつくられる実数係数の線型空間を $B(\mathscr{S})$ によってあらわす．B

(*) $\bar{f}(s)ds$ によって定義される測度について，今後も同様．

(**) この制約条件のおき方は，[9] および [11] におけるそれ，つまり $\mathrm{E}_{\theta}\tau_1(\hat{\phi})=\alpha$ とは異なる．Cochran の基準 [2] においては，(1.8) のようにより強い制約がなされえる．

(***) 損失 L が Φ の ϕ について線型であることから，ここでは，定義されている $\hat{\phi}$ のような非確率化決定方式のみを考えれば十分である [6].

$(\mathscr{R}^q \times \mathscr{S})$ に属する関数のある列 $\{\psi_m\,;\ m=1,\ 2,\ \cdots\}$ が $B\,(\mathscr{R}^q \times \mathscr{S})$ に属するある関数 ψ_0 に弱収束するということは，$g(x)\,\bar{f}\,(s)\,dx\,ds$ に関し可積分である $(x,\ s)$ の任意の関数 $h\,(x,\ s)$ に対し $m\to\infty$ なるとき

$$(2.1)\qquad \int_{\mathscr{R}^q\times\mathscr{S}} h\,(x,\ s)\,\psi_m\,(x,\ s)\,g\,(x)\,\bar{f}\,(s)\,dx\,ds \to \int_{\mathscr{R}^q\times\mathscr{S}} h\,(x,\ s)\,\psi_0\,(x,\ s)\,g\,(x)\,\bar{f}\,(s)\,dx\,ds$$

が成立することをいう（この概念については，例えば [4] の Appendix を見よ）．記号で $\psi_m \Rightarrow \psi_0 (m\to\infty)$ と書くことにする．同じく，$B\,(\mathscr{S})$ に属する関数のある列 $\{\omega_m\}$ が $B\,(\mathscr{S})$ に属するある関数 ω_0 に弱収束するということは，$\bar{f}\,(s)\,ds$ に関し可積分である任意の関数 $l\,(s)$ に対し

$$(2.2)\qquad \int_{\mathscr{S}} l\,(s)\,\omega_m\,(s)\,\bar{f}\,(s)\,ds \to \int_{\mathscr{S}} l\,(s)\,\omega_0\,(s)\,\bar{f}\,(s)\,ds\ (m\to\infty)$$

が成立することをいう．記号で $\omega_m \Rightarrow \omega_0\ (m\to\infty)$ と書く．$B(\mathscr{R}^q\times\mathscr{S})$，$B(\mathscr{S})$ にこのような弱収束列の全体によって位相を導入する．すなわち $B\,(\mathscr{R}^q\times\mathscr{S})$ についていえば，$B\,(\mathscr{R}^q\times\mathscr{S})$ のある部分集合 A の閉包 $\overline{A}$ とは，A に含まれる弱収束列 $\{\psi_m\}$ が存在してその極限であるような $\psi(s)$ の全体のことであるとし，この対応 $A\to\overline{A}$ によって定められる位相を弱位相といい，$\mathscr{T}\,(B\,(\mathscr{R}^q\times\mathscr{S}))$ によってあらわす(*)．同様に，$B\,(\mathscr{S})$ の弱位相を $\mathscr{T}\,(B\,(\mathscr{S}))$ によってあらわす．

さて，$\hat{\Phi}$ は $\mathscr{T}\,(B(\mathscr{R}^q\times\mathscr{S}))$ に関してコンパクト部分集合である（例えば，Theorem 3 in Appendix [4] を見よ）．また，$\tau_1(\cdot)$ は $\hat{\Phi}$ から $B(\mathscr{S})$ への写像であるが，上述の二つの空間の弱位相に関して連続になっている．何となれば，$\hat{\phi}_0$ を $\hat{\Phi}$ 中の任意の（決定）関数，ε を任意の正数とせよ．このとき，$\hat{\Phi}$ に含まれて $\hat{\phi}_m \Rightarrow \hat{\phi}_0\,(m\to\infty)$ なる（したがって $\mathscr{T}\,(B\,(\mathscr{R}^q\times\mathscr{S}))$ に関して $\hat{\phi}_m\to\hat{\phi}_0(m\to\infty)$ なる）任意の弱収束列の $\{\hat{\phi}_m;\ m=1,\ 2,\ \cdots\}$ および $\bar{f}\,(s)\,ds$ に関し可積分である任意の関数 $l\,(s)$ をとると，Fubini の定理より

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{S}} l\,(s)\,\tau_1\,(\hat{\phi}_m)\,\bar{f}\,(s)\,ds-\int_{\mathscr{S}} l\,(s)\,\tau_1\,(\hat{\phi}_0)\,\bar{f}\,(s)\,ds\\
&=\int_{\mathscr{R}^q\times\mathscr{S}} l\,(s)\,\hat{\phi}_m\,(x,\ s)\,g\,(x)\,\bar{f}\,(s)\,dx\,ds\\
&\quad-\int_{\mathscr{R}^q\times\mathscr{S}} l\,(s)\,\hat{\phi}_0\,(x,\ s)\,g\,(x)\,\bar{f}\,(s)\,dx\,ds.
\end{aligned}$$

したがって $B(\mathscr{R}^q\times\mathscr{S})$ における弱収束列の定義から，自然数のうちある m_ε が存在して $m\geqq m_\varepsilon$ ならば

$$\left|\int_{\mathscr{S}} l\,(s)\,\tau_1\,(\hat{\phi}_m)\,\bar{f}\,(s)\,ds-\int_{\mathscr{S}} l\,(s)\,\tau_1\,(\hat{\phi}_0)\,\bar{f}\,(s)\,ds\right|<\varepsilon$$

となる．つまり，$\mathscr{T}\,(B(\mathscr{S}))$ に関して $\tau_1(\hat{\phi}_m)\to\tau_1\,(\hat{\phi}_0)\,(m\to\infty)$ が成立しているから，$\tau_1(\cdot)$ は $\hat{\phi}\in\hat{\Phi}$ について連続である．次に，一点集合 $\{\alpha\}$ は $B\,(\mathscr{S})$ において閉集合である（弱収束列 $\{\alpha\}$ を考えよ）から，τ_1 によるその逆像 $\hat{\Phi}(\hat{c})$ は $\hat{\Phi}$ に含まれる閉集合，つまりコンパクトである．$\bar{r}(\xi,\ \cdot)$ もまた，$\hat{\Phi}$ から実数空間（普通の位相）への連続写像になっていることが示されるから，コンパクト集合の上の連続関数の最大・最小値の存在定理から $\Phi(\hat{c})$ の中に $\bar{r}(\xi,\hat{\phi})$ $(\hat{\phi}\in\hat{\Phi}(\hat{c}))$ の最小値を実現する $\hat{\phi}_\xi$ の存在が従う（証明終り）．

次に，S が与えられたときの事後確率密度を $\bar{\xi}(\theta|s)$ によってあらわすことにする．そして，各 $(x,\ s)$ について

$$(2.3)\qquad \bar{\eta}\,(x,\ s)=\int_{\Theta}\eta\,(x,\ \theta)\,\bar{\xi}\,(\theta|s)\,d\theta$$

(*) このような位相の存在については，Theorem 9, Section 2 [3] を見よ．

とおく．

定理 2.2

$\hat{\Phi}(\hat{c})$ に属する決定関数 $\hat{\phi}_\xi$ が (1.12) において定義されたベイズ決定関数であるための必要十分条件は，$\bar{f}(s)ds$ について可積分である s のある関数 $\bar{k}(s)$ が存在して，$\hat{\phi}_\xi$ がほとんどすべて(*)の (x, s) について

$$\hat{\phi}_\xi(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \bar{\eta}(x, s) > \bar{k}(s), \\ 0 & \text{if} \quad \bar{\eta}(x, s) < \bar{k}(s) \end{cases} \tag{2.4}$$

を満たすことである．

注意 2.1

(2.4) における $\bar{k}$ は，ほとんどすべての s について

$$\int_{\bar{\eta}(x, s) \geqq \bar{k}(s)} g(x)\, dx = \alpha \tag{2.5}$$

を満たすものとして与えられる．

証明

定理 2.1 の証明の中の定義にもとづいて，$\tau_1(\cdot)$ は線型（位相）空間 $B(\mathscr{R}^q \times \mathscr{S})$ の凸な部分集合 $\hat{\Phi}$ から線型位相空間 $B(\mathscr{S})$ への線型写像である．$\bar{r}(\xi, \cdot)$ は，同じく $\hat{\Phi}$ から実数空間への線型写像である．したがって，定理 1.1 およびその系 [5] がこの場合に適用されえる．その場合，$\bar{r}(\xi, \cdot)$ は $\hat{\phi}$ について有界であるから，一点 α が $B(\mathscr{S})$ の部分集合 $\{\tau_1(\hat{\phi})\,;\,\hat{\phi} \in \hat{\Phi}\}$ の内点になっていることを示せばよい．実際，各 s について $0 < \omega(s) < 1$ を満たす s の関数 ω の全体 Ω は $B(\mathscr{S})$ の中で開集合であり，α はその内点になっている．つまり，Ω は α の一つの近傍である．しかるに，Ω に属す関数 ω は，集合の点としては同時に $\hat{\Phi}$ に属す．そして，$\tau_1(\omega) = \omega$ であるから，Ω は集合 $\{\tau_1(\hat{\phi})\,;\,\hat{\phi} \in \hat{\Phi}\}$ の部分集合である．つまり，$\alpha \in \Omega \subset \{\tau_1(\hat{\phi})\,;\,\hat{\phi} \in \hat{\Phi}\}$．すなわち，$\alpha$ が $\{\tau_1(\hat{\phi})\,;\,\hat{\phi} \in \hat{\Phi}\}$ の内点であることが示された．

かくして，定理 1.1 の系 [5] をこの場合に適用すると，

$$\begin{aligned} \inf\{\bar{r}(\xi, \hat{\phi})\,;\,\hat{\phi} \in \hat{\Phi}(\hat{c})\} &= -\sup\{-\bar{r}(\xi, \hat{\phi})\,;\,\hat{\phi} \in \hat{\Phi}(\hat{c})\} \\ &= -\inf_T \sup\{-\bar{r}(\xi, \hat{\phi}) + T(\alpha) - T(\tau_1(\hat{\phi}))\,;\,\hat{\phi} \in \Phi\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

ただし，T は $\mathscr{T}(B(\mathscr{S}))$ に関し $B(\mathscr{S})$ の共役空間(**)の各元をあらわす．ところが，Lemma 3.2 [9] によって，このような T は，$\bar{f}(s)ds$ に関し可積分である s のある関数 t によって，$B(\mathscr{S})$ の各元 ω について

$$T(\omega) = \int_{\mathscr{S}} t(s)\, \omega(s)\, \bar{f}(s)\, ds \tag{2.7}$$

としてあらわれる．さらに，Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \bar{r}(\xi, \hat{\phi}) &= \int_{\Theta} \tau_0(\theta, \phi_\theta^*)\, \xi(\theta)\, d\theta \\ &\quad - \int_{\Theta} \int_{\mathscr{R}^q \times \mathscr{S}} \eta(x, \theta)\, \hat{\phi}(x, s)\, g(x)\, f_\theta(s)\, \xi(\theta)\, dx\, ds\, d\theta \\ &= \int_{\Theta} \tau_0(\theta, \phi_\theta^*)\, \xi(\theta)\, d\theta \\ &\quad - \int_{\mathscr{R}^q \times \mathscr{S}} \bar{\eta}(x, s)\, \hat{\phi}(x, s)\, g(x)\, \bar{f}(s)\, dx\, ds. \end{aligned} \tag{2.8}$$

(*)　$g(x)\bar{f}(s)dxds$ によって定義される測度について．今後も同様．

(**)　位相 $\mathscr{T}(B(\mathscr{S}))$ に関して，$B(\mathscr{S})$ から実数空間 $\mathscr{R}$ への連続な線型関数の全体からつくられる実数係数の線型空間．

したがって，(2.7)，(2.8) を (2.6) に代入すると

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} &\sup\{-\bar{r}(\xi, \hat{\phi});\ \hat{\phi}\in\hat{\Phi}(\hat{c})\}\\ &=\inf_t\left\{\int_{\mathscr{X}^q\times\mathscr{S}}[\bar{\eta}(x, s)-t(s)]^+ g(x)\bar{f}(s)\,dx\,ds\right.\\ &\left.+\int_{\mathscr{S}}\alpha t(s)\bar{f}(s)\,ds\right\}-\int_{\Theta}\tau_0(\theta, \phi_\theta{}^*)\,\xi(\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

がえられる．ただし，$[a]^+$ は $\max(a, 0)$ をあらわすものとする．

したがって，定理 1.1 [5] によって，$\hat{\phi}_\xi$ が $\inf\{\bar{r}(\xi, \hat{\phi});\ \hat{\phi}\in\hat{\Phi}(\hat{c})\}$ を実現するためには，(関数 t のある特別なものとして) $\bar{k}$ があって $\hat{\phi}_\xi$ が (2.4) の形にあらわされることが必要十分であるということが従う（証明終り）.

3. 最適選別 $\phi_\theta{}^*$ とベイズ決定関数 $\hat{\phi}_\xi$ とを実際に求める例

例 3.1

いま $p=q+1$ として，Θ を $q+1$ 次元実数空間とし $\theta=(\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_q)$ として，X が与えられたときの Y の条件付確率密度関数 f° を $x=(x_1, \cdots, x_q)$ として

$$(3.1)\qquad f^\circ(x, y, \theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(y-\theta_0-\theta_1x_1-\cdots-\theta_qx_q)^2\right]$$

とする．ただし，θ_i $(i=1, \cdots, q)$ のうち少くとも一つは 0 とはならないものとする．X の密度関数 g は，退化していない正規分布 $N(0, \Sigma)$；$\Sigma=(\sigma_{ij})$ のそれとする．X が与えられたときの Y の回帰関数は

$$(3.2)\qquad \eta(x, \theta)=\theta_0+\theta_1x_1+\cdots+\theta_qx_q$$

である．したがって，(1.3) より $\Phi(c)$ に属するある ϕ_θ が最適選別であるための必要十分条件は，ϕ_θ がほとんどすべての x について

$$(3.3)\qquad \phi_\theta(x)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad \theta_0+\sum_{i=1}^q\theta_ix_i>k(\theta),\\ 0 & \text{if}\quad \theta_0+\sum_{i=1}^q\theta_{i}x_i<k(\theta)\end{cases}$$

とあらわされることである．関数 k の形を求めておく．

正規分布に従う変量の一次変換に関する定理から，一次結合 $\sum_{i=1}^q\theta_ix_i$ が正規分布 $N(0, \sigma^2(\theta))$ に従うことが容易に導かれる．ただし，各 θ について

$$(3.4)\qquad \sigma^2(\theta)=\sum_{i,j=1}^q\sigma_{ij}\theta_i\theta_j.$$

したがって，(1.5) はこの場合

$$\begin{aligned}\alpha&=\int_{\theta_0+\sum_{i=1}^q\theta_ix_i\geqq k(\theta)}g(x)\,dx\\ &=\int_{k(\theta)-\theta_0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(\theta)}\exp\left[-\frac{u^2}{2\sigma^2(\theta)}\right]du=1-\Psi\left(\frac{k(\theta)-\theta_0}{\sigma(\theta)}\right)\end{aligned}$$

となる．ただし，Ψ は標準正規分布関数をあらわすものとする．かくして，Ψ^{-1} を Ψ の逆関数をあらわすものとすれば，k は各 θ について

$$(3.5)\qquad k(\theta)=\sigma(\theta)\Psi^{-1}(1-\alpha)+\theta_0$$

として，一意にあらわされる．

さて

$$\int_{\theta_0+\sum_{i=1}^{q}\theta_i x_i=k(\theta)} g(x)\,dx=0$$

であるから，各 θ および各 x について

$$\phi_\theta{}^\circ(x)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad \theta_0+\sum_{i=1}^{q}\theta_i x_i>k(\theta),\\ 0\text{と}1\text{との間の任意の値} & \text{if}\quad \theta_0+\sum_{i=1}^{q}\theta_i x_i=k(\theta),\\ 0 & \text{if}\quad \theta_0+\sum_{i=1}^{q}\theta_i x_i<k(\theta)\end{cases}\tag{3.6}$$

とおく．明らかに，このような $\phi_\theta{}^\circ$ は最適選別であり，また最適選別はこのような $\phi_\theta{}^\circ$ 以外にありえない．最適選別の代表としては，

$$\phi_\theta{}^*(x)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad \sum_{i=1}^{q}\theta_i x_i\geqq\sigma(\theta)\,\Psi^{-1}(1-\alpha),\\ 0 & \text{if}\quad \sum_{i=1}^{q}\theta_i x_i<\sigma(\theta)\,\Psi^{-1}(1-\alpha)\end{cases}\tag{3.7}$$

なる関数 $\phi_\theta{}^*$ を考えればよい．

例 3.2

例 3.1 において，Θ 上の事前確率密度 ξ が $q+1$ 次元の退化していない正規分布 $N(\mu,\ V)$ の密度関数として与えられたとする．このとき，事後確率密度 $\bar{\xi}(\theta|s)$ は，また正規分布 $N(\bar{\theta},\ \bar{V})$ のそれであって，$\bar{\theta}$, $\bar{V}$ はそれぞれ行列記法によって次のようにあらわされる（例えば [8] を見よ）．

$$\begin{cases}\bar{\theta}=\bar{V}\,(V_1\mu+\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}),\\ \bar{V}=(V_1+V_2)^{-1}.\end{cases}\tag{3.8}$$

ただし，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, V_1 および V_2 のそれぞれは

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\begin{bmatrix}1 & x_{11}\cdots x_{q1} & y_1\\ \vdots & \vdots\quad\ \ \vdots & \vdots\\ 1 & x_{1n}\cdots x_{qn} & y_n\end{bmatrix},\\ V_1=V^{-1},\\ V_2=(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})\end{cases}\tag{3.9}$$

とおく，$\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{x}$ の転置行列を示す．

さて，(2.3) は，この場合，(3.2) によって

$$\bar{\eta}(x,\ s)=\bar{\theta}_0+\bar{\theta}_1x_1+\cdots+\bar{\theta}_qx_q\tag{3.10}$$

としてあらわされる．したがって，$\hat{\Phi}(\hat{c})$ に属するある決定関数 $\hat{\phi}_0$ がベイズ決定関数であるための必要十分条件は，$\hat{\phi}_0$ がほとんどすべての $(x,\ s)$ について

$$\hat{\phi}_0(x,\ s)=\begin{cases}1 & \text{if}\quad \bar{\theta}_0+\sum_{i=1}^{q}\bar{\theta}_i x_i>\bar{k}(s),\\ 0 & \text{if}\quad \bar{\theta}_0+\sum_{i=1}^{q}\bar{\theta}_i x_i<\bar{k}(s)\end{cases}\tag{3.11}$$

とあらわされることである．関数 $\bar{k}$ の形は次のように求められる．$\bar{k}$ は (2.5) を満たさなけれ

ばならないから，(3.5) をえたときと同様な計算によって，$\bar{k}$ はほとんどすべての s について

$$\bar{k}(s) = \bar{\sigma}(s)\,\Psi^{-1}(1-\alpha) + \bar{\theta}_0 \tag{3.12}$$

としてあらわされる．ただし，$\bar{\sigma}$ はほとんどすべての s について

$$\bar{\sigma}^2(s) = \sum_{i,j=1}^{q} \sigma_{ij}\,\bar{\theta}_i\bar{\theta}_j \tag{3.13}$$

としてあたえられる．

さて，ほとんどすべての s について

$$\int_{\bar{\theta}_0+\sum_{i=1}^{q}\bar{\theta}_i x_i=\bar{k}(s)} g(x)\,dx = 0$$

であるから，ほとんどすべての s およびすべての x について

$$\hat{\phi}_\xi(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \bar{\theta}_0 + \sum_{i=1}^{q} \bar{\theta}_i x_i > \bar{k}(s), \\ 0\text{ と }1\text{ との間の任意の値} & \text{if} \quad \bar{\theta}_0 + \sum_{i=1}^{q} \bar{\theta}_i x_i = \bar{k}(s), \\ 0 & \text{if} \quad \bar{\theta}_0 + \sum_{i=1}^{q} \bar{\theta}_i x_i < \bar{k}(s), \end{cases} \tag{3.14}$$

とおく（上式では，$\hat{\phi}_\xi$ の定義域には $\int_N \bar{f}(s)\,ds = 0$ となるような s の集合 N について $\mathscr{R}^q \times N$ が残るが，この上では $\hat{\phi}_\xi$ は 0 と 1 との間の任意の値をとるものとする）．$\hat{\phi}_\xi$ はベイズ決定関数でありま，たベイズ決定関数はこのような $\hat{\phi}_\xi$ の形であらわされる以外にありえない．ベイズ決定関数の代表として，すべての (x, s) について

$$\hat{\phi}_\xi^\circ(x, s) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \sum_{i=1}^{q} \bar{\theta}_i x_i \geqq \bar{\sigma}\,\Psi^{-1}(1-\alpha), \\ 0 & \text{if} \quad \sum_{i=1}^{q} \bar{\theta}_i x_i < \bar{\sigma}\,\Psi^{-1}(1-\alpha) \end{cases} \tag{3.15}$$

なる決定関数 $\hat{\phi}_\xi^\circ$ を与えておく．

注意 3.1

(3.15) においてあらわされているベイズ決定関数 $\hat{\phi}_\xi^\circ$ は，(3.7) においてパラメーター θ の代りに $\bar{\xi}(\bar{\theta}|s)$ の平均 $\bar{\theta}$ を代入してえられる $\phi_{\bar{\theta}}^*$ に一致する．つまり，$\phi_{\bar{\theta}}^*$ は，この場合，ベイズ決定関数になっている．$\phi_{\bar{\theta}}^*$ がベイズ決定関数にならない例については，[11] を参照されたい．

注意 3.2

例 3.2 においては，関数 $\bar{k}$ は，(3.12) においてあらわされているように，ほとんどすべての s について一意に定まる．したがってまた，ベイズ決定関数は，ほとんどすべての (x, s) について一意に定まることになる．したがって，この例においては，ベイズ決定関数は許容的である（例えば，[7] を見よ）．

謝　　　辞

部分母集団の選別およびその決定関数の研究は，多賀保志氏のすすめに応じて始められた．特に Cochran の論文 [2] の検討については，氏のすすめによるところが大きい．また，拡張された Lagrange 乗数法 [5] の適用（定理 2.2 の証明の基本的部分）については，石井恵一氏

との討論に負うところが大きかった．結果の発表がずいぶん遅れたけれども，著者よりあらためて両氏にあつく感謝の意を表したい．

文　　献

[1] Birnbaum, Z.W. and Chapman, D.G. (1950) On optimum selection from multinormal populations, *Ann. Math. Statist.*, **21**, 443–447.

[2] Cochran, W.G. (1951) Improvement by means of selection, *Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, 449–470.

[3] Kelley, J.L. (1955) *General Topology*, D. Van Nostrand, Toronto.

[4] Lehman, E.L. (1959) *Testing Statistical Hypotheses*, John Wiley, New York.

[5] 石川恵一 (1966) 数理計画と統計的推測理論，数学 第18巻第2号，21-31.

[6] Ferguson, T.S. (1967) *Mathematical Statistics*, Academic Press, New York.

[7] 工藤弘吉 (1967) 統計的決定関数の良さについて，統計的決定関数の Admissibility，数理解析研究所講究録 27，3-30.

[8] 宮沢光一 (1971) 情報・決定理論序説，岩波書店，東京.

[9] Noda, K. (1979) Optimal construction of a selection of a subpopulation, *Research Memo.* No. 165, Institute of Statistical Mathematics, submitted to *Ann. Inst. Statist. Math.*

[10] Noda, K. (1979) On a kernel-type decision function for selection of a subpopulation, *Research Memo.* No. 166, The Institute of Statistical Mathematics, accepted for publication to *J. Japan Statist. Soc.*, **10**, No. 1.

[11] 野田一雄 (1979) 部分集団の選別のベイズ決定方式について，統計数理研究所彙報 第26巻第2号，125-132.