

Amoroso 型 所得分布の解析*

—一般化ガンマ分布とローレンツ曲線の一般化—

統計数理研究所 田 口 時 夫

(1979年4月 受付)

Analysis of Amoroso's Income Distribution

—Generalized Gamma Distributions and Generalization of Lorenz Curves—

Tokio Taguchi

(The Institute of Statistical Mathematics)

In this paper the author analyzes Amoroso's income distribution (the generalized gamma distribution by Stacy [8]) expressed by (2.5).

Main results are as follows:

- (1) The shape parameters α and h in (2.5) can be regarded as the parameters of skewness (asymmetry) and sharpness, respectively.
- (2) Some models which generate the generalized gamma distributions are discussed under the Kapteyn's system of process with gamma distributed random variates.
- (3) The effects of α and h to Gini's concentration coefficient are exhibited.
- (4) A generalization of Lorenz curve is proposed and discussed. And by this a new method of estimation of α and h is given.

1. 序 論

一般化ガンマ分布は、イタリアの数学者 Amoroso [2] に依り所得分布として提案された分布であるが、この分布は正規分布や指数分布は勿論、データ解析上しばしば有用な Weibull 分布, Rayleigh 分布, Gamma 分布, 一般化誤差分布 (Subbotin [10], Johnson-Kotz [4], Taguchi [11] 参照) を包括する分布族として重要であり、又広汎な適用領域を持つことが期待される。更に、この分布を規定する二種の異なる形態母数は以下の各節で詳論される様に典型的な歪み、尖りの構造を示すもので、極めて興味深いものがある。

そもそも、形態母数 (shape parameter) の概念は、K. Pearson や R. A. Fisher に於ては認められないもので、その統計的意味は勿論、その種類についても何等具体的な規定を与え得ないのが現状といえよう。

従って、一般化ガンマ分布の究明はこれまでの統計的記述概念を一層正確にするものと期待出来る。但し、この分布の解析の為には、本稿にみられるようにしばしば新たな概念、方法の導入を必要とするのである。

扱、副題に示した一般化ローレンツ曲線の提案は直接的には一般化ガンマ分布のパラメータのより正確な推定を目的としたものであるが、その結果は或種の経済分析の方法と符合するものであり、その適用の如何によって今後の一層の成果が期待出来よう。

* 本稿は、53年度科研費総合 (A) 代表者 竹内 啓 「統計的モデルとその推定に関する研究」集会に於て「Shape parameter をもつ分布族とその選択について」と題して報告した内容を整理し、発展させたものである。

2. 一般化ガンマ分布の表現と母数の性格

一般化ガンマ分布の標準形式は例えば Stacy [8] によると、二つの形態母数 α, p により次のようにその密度関数が定義される。

$$(2.1) \quad f(x; \alpha, p) = \frac{px^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha/p)} \exp(-x^p); x \geq 0, p, \alpha > 0$$

然し乍ら、この表現形式は場合により微妙な差が認められる。例えば Johnson 及び Kotz [4] に於ては、Pearson III 型との関連を重視する故に一般化ガンマ分布の密度は、標準形式のガンマ分布

$$(2.2) \quad f(y; \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-y}; y \geq 0, \beta > 0$$

において変換 $Y=X^p$ を施すことにより得られるものとして密度

$$(2.3) \quad f(x; \beta, p) = \frac{px^{\beta p-1}}{\Gamma(\beta)} \exp(-x^p); x \geq 0, p, \beta > 0$$

によって表現される。

これらの諸表現に対して、筆者は分布構造と母数特性をより鮮明に示すものとして敢て第三の表現を提案したい。すなわちその場合の一般化ガンマ分布は、一般化誤差分布との関連を重視する目的でその一類 (Taguchi [11] p. 212 参照)

$$(2.4) \quad 2h^{1/h} \varphi^{(h)}(h^{1/h}z) = \frac{h}{\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)} \exp(-z^h); z \geq 0, h > 0$$

に変換 $Z=X^h$ を施すことにより得られるものとし、密度

$$(2.5) \quad f(x; \alpha, h) = 2\alpha h^{1/h} x^{\alpha-1} \varphi^{(h)}(h^{1/h}x^\alpha) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{h} + 1\right)} \exp(-x^{\alpha h});$$

$$x \geq 0, \alpha, h > 0$$

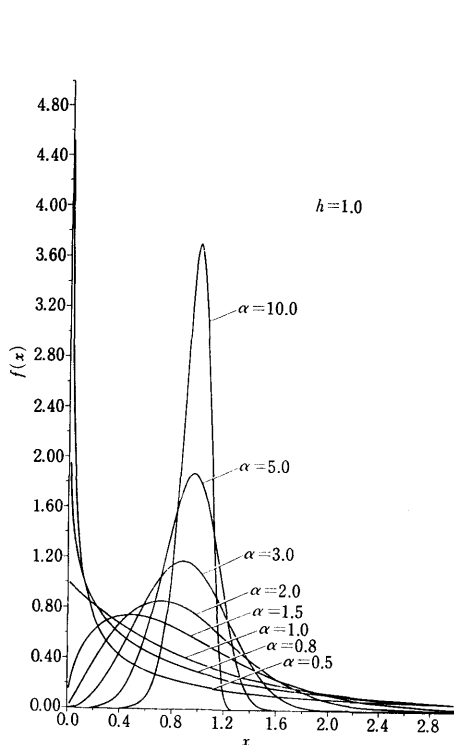
によって表現される。

この表現に直観的な妥当性を与える意味で、先づ第 2.1~5 図について解説を加えることにしよう。

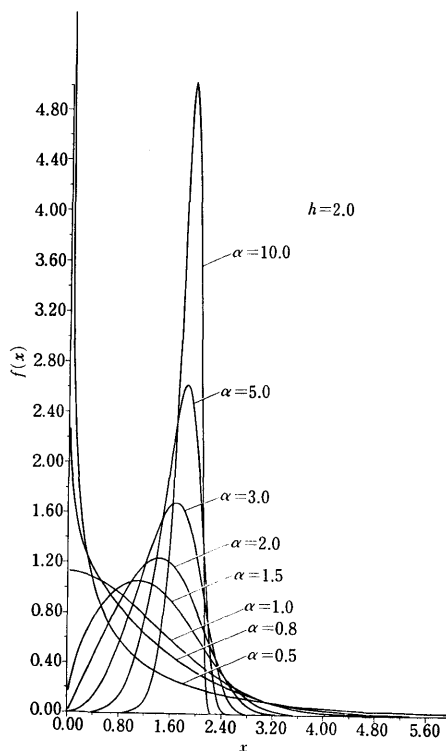
第 2.1 図は、(2.5) 式に於て h を 1 に固定した場合、即ち Weibull 分布の母数 α による変動を示すものであるが、その特徴は母数 α が 3 の前後の値に於て著しい対称性を示す反面、 α がその値を境にして増大又は減少するに応じて次第に対称性を失ない、右又は左に次第に増大する歪みを生ずることにあるといえよう。同様の傾向は h を 2 に固定した場合、即ち Rayleigh 分布 (Johnson-Kotz 前掲書参照) を示す第 2.2 図にも明らかに認められる。以上から推察すると、母数 α は対称性の尺度を与えるものでその意味で歪み母数 (skewness parameter) と規定されて然るべき母数といえよう。

逆に α を固定した場合、母数 h は分布にどのような影響を与えるであろうか。第 2.3 図は α を $\alpha=1$ と固定した場合、即ち Subbotin 型 [10] の一般化誤差分布について、母数 h による変動を示すものであるが、その特徴は明らかに h が増大するに従って山が低くなり、且つ緩い傾斜を示すことにある。この傾向は、 α を 2 に固定した第 2.4 図に於ても認められる。従って、母数 h は α と対照的に中心集積の尺度を与えるものであり、その意味で尖りの母数 (sharpness parameter) と規定出来るであろう。

更に、今 $\alpha=1/h$ とした場合、周知のようにガンマ分布が得られるがこの場合の分布の母



第 2.1 図 $f(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha h}}}{\Gamma\left(\frac{1}{h} + 1\right)}$; $h, \alpha > 0, 0 \leq x$
 における α の効果 ($h=1$)



第 2.2 図 $f(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha h}}}{\Gamma\left(\frac{1}{h} + 1\right)}$; $h, \alpha > 0, 0 \leq x$
 における α の効果 ($h=2$)

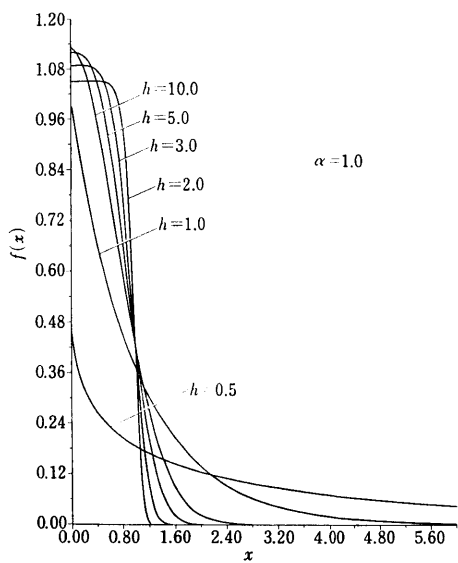
数による変動は、第 2.5 図のように歪みと尖りの混合した複雑形態をとることになる。この面からすると、ガンマ分布は対照的に典型的な変動を示す Weibull 分布と一般化誤差分布の中間的存在といえるものであり、ここに (2.5) 式の表現の一つの妥当的根拠を見出し得るのである。

反面、(2.1) 又は (2.3) の表現に従う時、母数 α 、又は β 及び p はどのような特徴を示し得るであろうか。例えば、 p を 1 に固定した場合何れの場合もガンマ分布を示すことになるが、その際母数 α 又は β は形態母数としてどのような統計的特徴を示し得るであろうか。逆に又、 $\alpha=1$ 又は $\beta=1$ 等と固定した場合、 p は或程度尖り又は歪みとしての性格を示すが、 α 、又は β を他の例えば 2 に固定した場合、 p の統計的性格は何れの場合も著しく鮮明度を失うのである。

以上の直観的な観察は、そのみで決定的とはいえないが、(2.5) 式による表現に対する一つの有力な理由となることは否めない。

勿論、例えば、Lienhard 及び Meyer [6] によれば、(2.1) 式に於ける母数 α 、 p は物理的な意味をもつものとされているが、その論文に見る限りではその意味は極めて抽象的であり、又統計的特性としては、理解し難いことに気付くであろう。

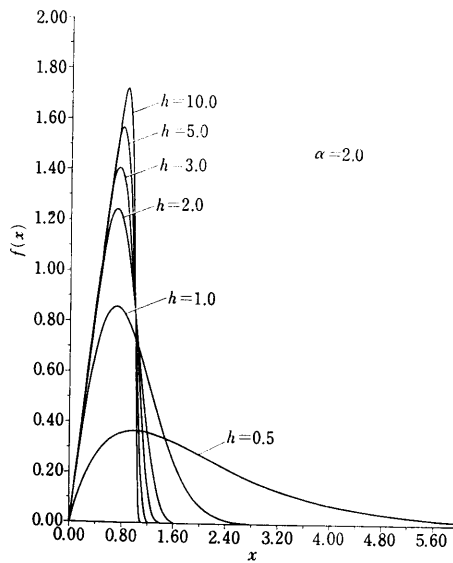
さて、以上の直観的考察によって得られた見通しに従って、我々は以下専ら (2.5) 式を中心として一般化ガンマ分布を多面的に解析し、更なるその理論的構成を通じてその表現の妥当性を



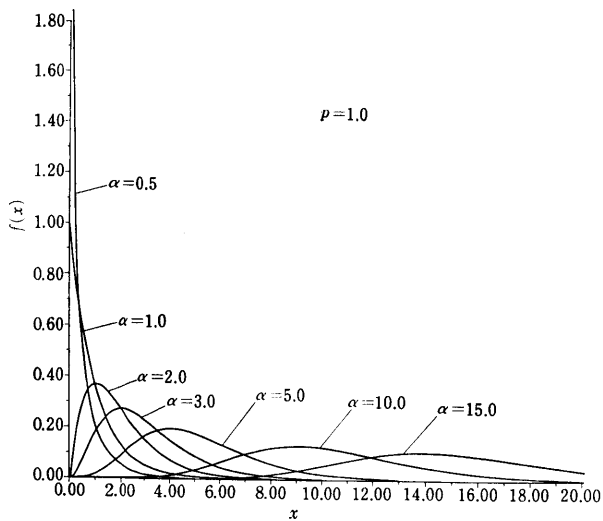
第 2.3 図 一般化誤差分布

$$f(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha h}}}{\Gamma\left(\frac{1}{h} + 1\right)} ; h, \alpha > 0, 0 \leq x$$

における h の効果 ($\alpha=1$)



第 2.4 図 $f(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1} e^{-x^{\alpha h}}}{\Gamma\left(\frac{1}{h} + 1\right)} ; h, \alpha > 0, 0 \leq x$ における h の効果 ($\alpha=2$)



第 2.5 図 Gamma 分布 $\Gamma(x; \alpha, p) = p x^{\alpha-1} e^{-x^p} / \Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)$

問うことにしよう。

3. 一般化ガンマ分布の一般的性格

(2.5) 式で示された一般化ガンマ分布の原点の周りの ν 次のモーメント μ_ν は容易に次式で与え

られる。

$$(3.1) \quad \mu_\nu = \Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{\nu}{\alpha h}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{h}\right)$$

従って一般に正の実数値をとるこの分布の母数 α , h の性格は ν を正整数とする従来のモメントによって十分に解明することは出来ない. ところで ν を正の実数とする一般化モメント等について, 次の定理が成立する.

定理 3.1 一般化ガンマ分布 (2.5) の一般化モメント μ_ν は, n を 0, 又は, 正の整数とすれば, 次の諸関係を満足する.

$$(3.2) \quad \mu_{n\alpha} = \frac{(n+1)^{(n+1)/h}}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{n+1}} \Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{n+1}\right) \Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{2}{n+1}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{n}{n+1}\right)$$

(附録 (iii) 式参照)

$$(3.3) \quad \mu_{n\alpha h} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{h} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{h} + n - 1\right)$$

従って特に $n=1$ とすれば

$$(3.4) \quad \mu_\alpha = \frac{2^{2/h}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right)$$

及び

$$(3.5) \quad \mu_{\alpha h} = \frac{1}{h}$$

が成立する. 更に, 又

$$(3.6) \quad \mu_{\alpha(h-1)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)} \quad (h > 1)$$

$$(3.7) \quad \mu_{\alpha(h-2)} = \frac{\pi}{\Gamma^2\left(\frac{1}{h}\right) \sin \frac{\pi}{h}} \quad (h > 2)$$

等が成立する.

他方, 一般化ガンマ分布に関して, Shannon のエントロピー $H(x)$ は次式で与えられる.

$$(3.8) \quad H(x) = \frac{1}{h} - \frac{\alpha-1}{\alpha h} \psi\left(\frac{1}{h}\right) - \log \frac{\alpha h}{\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)}$$

ここで $\psi(z)$ はディ・ガンマ関数 $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ を表わす.

定理 3.1 に於て特に, (3.4), (3.5), (3.6) の諸式は, 二つの形態母数 α , h 間の関係を簡潔に示している. 定理 3.1 の各式は, 又 (2.1) 式の母数表示によることも出来るが, その場合, 母数間の比 α/h 又は h/α に一定の役割が認められる.

ところで, 一般化ガンマ分布については, 一般化モメントよりも対数モメントがよくその性格を規定することが, Stacy 及び Mihram [9] (Johnson-Kotz [4] 参照) によって示されたが, それは, ピアソン系の分布のもつ性格と比較する場合極めて興味深いものといえる. その方法は (2.3) 式の分布に対してまず対数キュムラントを算出し, モメントとキュムラントの間に成立する関係を通じて対数モメントを得る方法であるが, 全く同様な思考過程によって (2.5) 式

に対し次の結果が得られる。

定理 3.2 (2.5) 式の数平均及び分散を μ' 及び σ'^2 とし, μ' の周りの三次の対数モメントを μ_3' で表わすと次式が成立する。即ち,

$$(3.9) \quad \begin{cases} \mu' = \frac{1}{\alpha h} \psi\left(\frac{1}{h}\right) \\ \sigma'^2 = \frac{1}{\alpha^2 h^2} \psi'\left(\frac{1}{h}\right) \\ \mu_3' = \frac{1}{\alpha^3 h^3} \psi''\left(\frac{1}{h}\right) \end{cases}$$

従って又,

$$(3.10) \quad \frac{\sigma'^2}{\mu'^2} = \frac{\psi'\left(\frac{1}{h}\right)}{\psi^2\left(\frac{1}{h}\right)}, \quad \alpha = \frac{1}{\mu' h} \psi\left(\frac{1}{h}\right) \quad (\text{第 3.1 図参照})$$

又, (2.5) 式が更に未知の尺度母数を含むときは, 対数平均の原点が尺度母数の対数だけ移動するので, μ_1' は変るが σ' , μ_3' 等は変らない。よって (3.10) の代りに, 一般に

$$(3.11) \quad \begin{cases} \mu_3' / \sigma'^3 = \psi''\left(\frac{1}{h}\right) / \psi'\left(\frac{1}{h}\right)^{3/2} \\ \alpha = \frac{1}{h} \sigma'^2 \psi''\left(\frac{1}{h}\right) / \mu_3' \psi'\left(\frac{1}{h}\right) \end{cases}$$

が成立する。

この結果は又, 一般化ガンマ分布のもつ非線形構造を予想させるものといえよう。

一般化ガンマ分布の積率母関数 $M(\theta)$ は Stacy [8] により与えられてはいるが, (2.5) 式に関して (3.1) を適用することにより,

$$(3.12) \quad M(\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\theta^\nu}{\nu!} \Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{\nu}{\alpha h}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{h}\right)$$

が得られる。

他方, 一般化ガンマ分布の特性関数については, Mathai-Saxena* によって考察されているが, その興味ある表題に拘らず, その結果は明らかに誤謬を含んでいる。

さて, (2.5) 式の一般化ガンマ分布に従がう確率変数を X とした時, $X^{\alpha h}$ は, ガンマ分布に従がう。この場合, ガンマ分布の再生性を適用すると容易に次の定理が得られる。

定理 3.3 $X_i; i=1, 2, \dots, n$ を n 箇の独立な確率変数とし, 各 X_i は母数 α_i, h_i をもつ (2.5) 式の分布に従がうものとする。

この時 X_i の巾和を用いて確率変数 X を

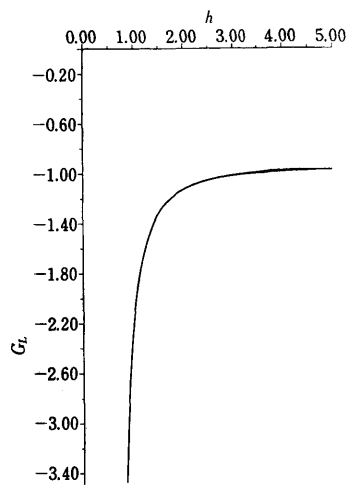
$$(3.13) \quad X^{\alpha h} = \sum_{i=1}^n X_i^{\alpha_i h_i}; \quad \frac{1}{h} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i}, \quad \alpha > 0$$

によって定義すると, X は又, 母数 α, h をもつ, (2.5) 式の一般化ガンマ分布に従う。

* Mathai, A.M. and Saxena, R.K. (1966) On a generalized hypergeometric distribution, *Metrika*, II, 127-132 参照。

第 3.1 表 対数変動係数 $\left(\frac{\sigma'}{\mu'} = \frac{\sqrt{\psi'(\frac{1}{h})}}{\psi(\frac{1}{h})} \right)$ の h による変動

h	$\frac{\sigma'}{\mu'}$	h	$\frac{\sigma'}{\mu'}$
0.50	1.89975	2.50	-1.05302
0.55	2.85997	2.60	-1.04318
0.60	4.96496	2.70	-1.03458
0.65	13.24559	2.80	-1.02702
0.70	-30.68578	2.90	-1.02035
0.75	-7.92339	3.00	-1.01444
0.80	-4.80925	3.10	-1.00919
0.85	-3.57452	3.20	-1.00452
0.90	-2.91323	3.30	-1.00035
0.95	-2.50184	3.40	-0.99662
1.00	-2.22166	3.50	-0.99327
		3.60	-0.99027
1.10	-1.86558	3.70	-0.98756
1.20	-1.64980	3.80	-0.98512
1.30	-1.50590	3.90	-0.98292
1.40	-1.40367	4.00	-0.98094
1.50	-1.32774	4.10	-0.97914
1.60	-1.26943	4.20	-0.97752
1.70	-1.22349	4.30	-0.97605
1.80	-1.18655	4.40	-0.97472
1.90	-1.15634	4.50	-0.97351
2.00	-1.13131	4.60	-0.97242
2.10	-1.11032	4.70	-0.97143
2.20	-1.09255	4.80	-0.97054
2.30	-1.07737	4.90	-0.96973
2.40	-1.06432	5.00	-0.96900



第 3.1 図 対数変動係数の h による変動

定理 3.3 は一般化ガンマ分布のもつ非線形巾和構造を示すものであるが、その場合 X_i の巾指数 αh は、

$$(3.14) \quad \log f(x) = 0 \quad (|x|^p) \quad |x| \rightarrow \infty$$

によって筆者の定義した固有次数 p (Taguchi [11] p. 273; 定義 2.2) に一致するから X_i の分布の裾の状況を表わす指標を与える。

Stacy [8] は上記の巾和構造と共に $\sum_{i=1}^n X_i$ の分布を考察しているが、その結果は必ずしも鮮明ではない。

4. 一般化ガンマ分布と Kapteyn process 下の成長モデル

前節に於て、既に一般化ガンマ分布を多様に特徴づける幾つかの基本的な性格を与えることが出来た。然し乍らその性格をより具体的に把握する為には、次に述べる様に積極的に分布を構成する立場をとることが必要である。そのような構成的観点に立つものとして、次に示す Kapteyn [5] の一般的な process が存在する (Aitchinson-Brown [1] p. 22 参照)。

それは今、初期変量を X_0 、過程に於ける第 j 段階の変量を X_j で表わすと第 j 段階に於ける変量の変化 $X_j - X_{j-1}$ が x の関数 $g(x)$ の $x = X_{j-1}$ のときの値に確率的に比例する過程を意味する。従って変量間の関係は関数 $g(x)$ を用いて、

$$(4.1) \quad X_j - X_{j-1} = \varepsilon_j g(X_{j-1})$$

と表わすことが出来る。但し、 $\{\varepsilon_j\}$ は差当り相互に独立であると共に $\{X_j\}$ に対しても独立である。従って、この過程は一般に非線形、非正常で自己相関をもつ成長モデルである。

特に、 $g(x) = x$ の場合は、比例効果の法則として対数正規分布を構成する著名な過程となる。従って、対数正規分布と共に当初所得分布として見出された Amoroso 分布を、Kapteyn system との関連に於て再検討することは有意義であろう。事実、次の諸結果は、対数正規分布の構成と同一思考過程によるもので、両者の関連を示唆するように思われる。

定理 4.1 (4.1) 式に於て

$$(4.2) \quad g(X_j) = \alpha a_j X_j^{1-\alpha}; \quad \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1$$

とする。又、初期変量 X_0 及び各 ε_j は共に正值であり、かつ、互いに独立であるとする。又、 X_0^α 及び各 ε_j は共に分散をもつものとする。この時、各 j 段階に於ける変動が充分小であると仮定すると、 X_n は漸近的に次の分布

$$(4.3) \quad f_n(x) = kx^{\alpha-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x^\alpha - m}{\sigma} \right)^2 \right\}; \quad x > 0$$

に従う。ここで

$$(4.4) \quad m = E(X_0^\alpha) + \sum_{j=1}^n a_j E(\varepsilon_j)$$

$$\sigma^2 = V(X_0^\alpha) + \sum_{j=1}^n a_j^2 V(\varepsilon_j)$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\sigma_0}{\alpha} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi \left(- \frac{\sqrt{2} m}{\sigma} \right) \right\}; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

である。

証明 この証明は対数正規分布の構成に関する Aitchinson-Brown [1] の方法そのものを適用できる。即ち、(4.1)、(4.2) 式により

$$(4.5) \quad \frac{X_j - X_{j-1}}{\alpha X_{j-1}^{1-\alpha}} = a_j \varepsilon_j$$

となるから、各 j 段階の変動が充分小ならば

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^n \frac{X_i - X_{i-1}}{\alpha X_{i-1}^{1-\alpha}} \sim \int_{X_0}^{X_n} \frac{dX}{dX^{1-\alpha}} = X_n^\alpha - X_0^\alpha$$

である。従って、結局

$$(4.7) \quad X_n^\alpha \sim X_0^\alpha + \sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_j$$

が得られる。右辺は中心極限定理により漸近的に $N(m, \sigma)$ に従って分布するから、 X_n は (4.3) 式の分布に従う。

(4.3) 式は一般化ガンマ分布そのものではないが、それに近い形式をもつ。

今 $g(x)$ に関する条件の他に、ランダム要因 ε_j に適当な条件を加えると、定理 3.3 を適用することにより次の関係が成立する。

定理 4.2 定理 4.1 の条件に対して、更に ε_j はガンマ分布

$$(4.8) \quad f_j(z) = \frac{z^{p_j-1}}{\beta^{p_j} \Gamma(p_j)} e^{-z/\beta}; z_j \geq 0$$

に従うものとする。又 X_0 は $X_0 = a$ の一点分布に従うものとする。この時、 j 段階に於ける変動が充分小であると仮定すると、 X_n の密度関数は近似的に

$$(4.9) \quad f_n(x) = \frac{\alpha}{\beta^p \Gamma(p)} (x-a)^{\alpha p-1} \exp\left\{-\frac{(x-a)^\alpha}{\beta}\right\}; x \geq a$$

である。但し、

$$(4.10) \quad p = \sum_{j=1}^n p_j$$

特に $\alpha=0, \beta=1$ ならば、(4.9) 式は

$$(4.11) \quad f_n(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(p)} x^{\alpha p-1} \exp(-x^\alpha); x \geq 0$$

となり、(2.3) 式の一般化ガンマ分布となる。又、特に ε_j が標準形式の指数分布に従うとき

$$(4.12) \quad f_n(x) = \alpha x^{\alpha n-1} \exp(-x^\alpha)$$

となる。

これによると、対数正規分布と一般化ガンマ分布の構成上の相異は、規模比例効果に対する規模乗比例効果の相違にも大きく依存しているといえよう。

定理 4.2 は規模効果に関して更に一般化することが出来る。

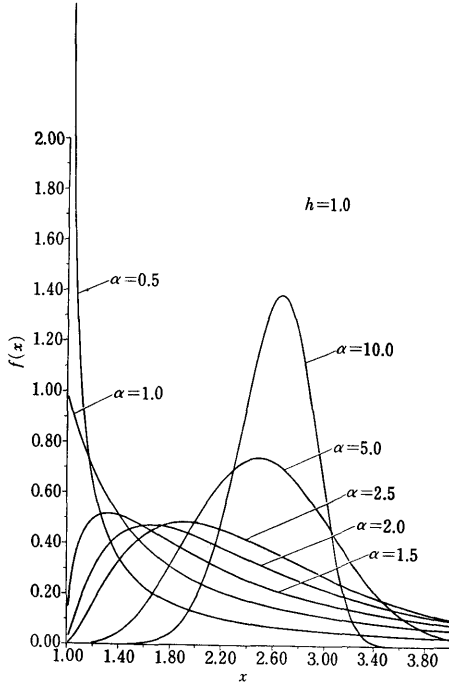
定理 4.3 X_0 及び ε_j に関しては、定理 4.2 の仮定が成立するものとし、更に $1/g(x)$ が積分可能関数であり、

$$(4.13) \quad k'(x) = 1/g(x) \geq 0,$$

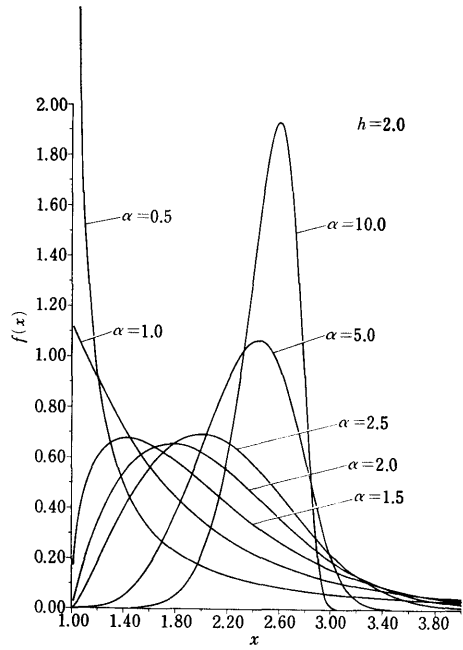
が成立するものとする。

この時、各 j 段階に於ける変動が充分小であると仮定すると、 X_n の密度関数は

$$(4.14) \quad f_n(x) = \frac{1}{\beta^p \Gamma(p)} \frac{\{k(x)\}^{p-1}}{g(x)} \exp\left\{-\frac{k(x)-a}{\beta}\right\}; x \geq 0, p, a > 0$$



第 4.1 図 $f(x) = \alpha h \cdot \frac{1}{x} (\log x)^{\alpha-1} e^{-(\log x)^{\alpha h}} / \Gamma\left(\frac{1}{h}\right); \alpha, h > 0, 1 \leq x$ における α の効果 ($h=1$)



第 4.2 図 $f(x) = \alpha h \cdot \frac{1}{x} (\log x)^{\alpha-1} e^{-(\log x)^{\alpha h}} / \Gamma\left(\frac{1}{h}\right); h, \alpha > 0, 1 \leq x$ における α の効果 ($h=2$)

となる。

これによると分布の歪みは基本的にランダム変動の累積効果によるが、尖り状況は基本的に規模効果 $g(x)$ により左右されると考えられる。この事は、第 4.1~2 図と第 2.1~2 図とを比較するとき更に明らかになる。

即ち今、(4.14) 式に於て $k(x) = (\log x)^{\alpha/p}; x > 1$, 従って $g(x) = \frac{px (\log x)^{1-\alpha/p}}{\alpha}$ とすれば、 $a=0, \beta=1$ のとき第 4.1~2 図に示すような裾の広がりや示す分布が得られるが、この分布の歪みに関しては (2.5) 式の分布の歪みと同じ傾向をもつとみなされるからである。因みに、この分布は、既に一般化所得分布 GID として、一般化誤差分布の対数変換により筆者が定義した分布族 (Taguchi [11], p. 215, Def. 24) のトランケーションを包含する一般的な形式を示している。以上は分布の歪みや尖りに関する試論的な一考察であるがその結果は、勿論分布の形態を充分解明しているとは思われない。

ところで一般的抽象的にいって、もし一般化ガンマ分布やその類似分布の所在が、ある現象に認められたとしても、それが直ちに上述したような Kaptelyn system がその現象を支配していることを意味するものでないことはいうまでもない。それは例えば、経済現象に関して Kalecki (1945) 等が行った経験的修正例 (Aitchinson-Brown [1] 参照) が示すところであり、又、breakage のモデルは、これと稍異質の system と考えられるからである。更に、具体的観点からすると自然現象はいざ知らず、社会・経済的諸分布を解明し、モデル化しようとするならば、その基礎は単なる規模変動や推移確率に置かれるべきではなく、社会的分配比率や占有

率の変動をもたらす個体間の相互作用に注目すべきであって、それによって、此の種の分布の性格が一層明確化されるものと期待される。然し乍ら、この問題は稿を改めて取り上げるのが適切であり、ここではこれ以上詳論しない。

5. 一般化ガンマ分布の集中効果

位置・尺度母数及び歪み・尖り等を示す形態母数の変動と共に、所得分布の解析に欠くことが出来ないのは、その集中効果である。Amoroso [2] は既にこの問題に着手し、有意義な結果を導いているが、我々は (2.5) 式の分布についてその概要を示すことにしよう。

一般に知られているローレンツ曲線 (u, v) は、正直連続分布 $f(x)$ に対しては、 x を助変数として

$$(5.1) \quad u = F(x), \quad v = \frac{1}{E(X)} \int_0^x \xi f(\xi) d\xi;$$

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad E(X) = \int_0^\infty \xi f(\xi) d\xi$$

によって定義される。特に (2.5) 式のローレンツ曲線は $y=x^{\alpha h}$ を助変数とすると、

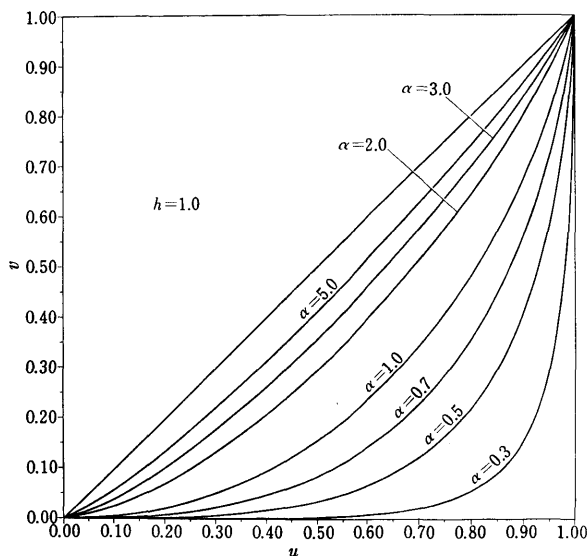
$$(5.2) \quad u = \frac{\gamma\left(\frac{1}{h}, y\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)}, \quad v = \frac{\gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha h}, y\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha h}\right)}$$

によって表現される。ここで $\gamma(z, p)$ は、不完全ガンマ関数

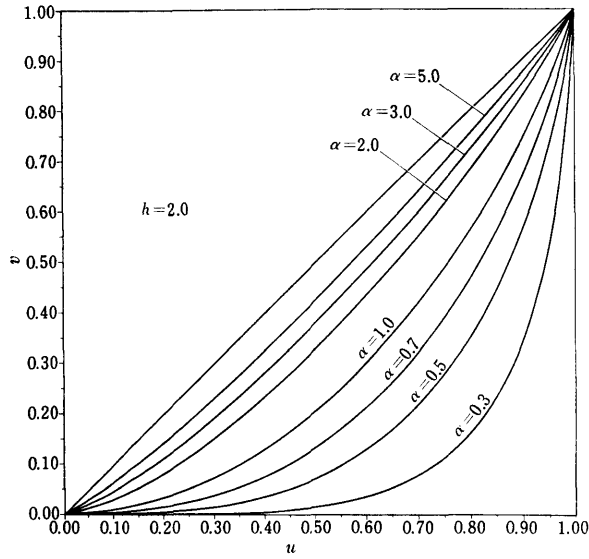
$$(5.3) \quad \gamma(z, p) = \int_0^p e^{-t} t^{z-1} dt$$

を表わす。

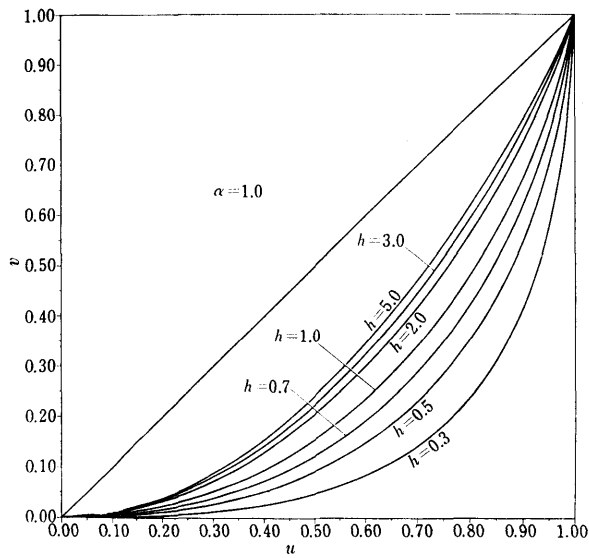
(2.5) 式のローレンツ曲線 (5.2) は、第 5.1~4 図に例示するように分布の母数に対する変



第 5.1 図 一般化ガンマ分布 (2.5) のローレンツ曲線 (5.2) の α による変動 ($h=1$)



第5.2図 一般化ガンマ分布 (2.5) のローレンツ曲線 (5.2) の α による変動 ($h=2$)

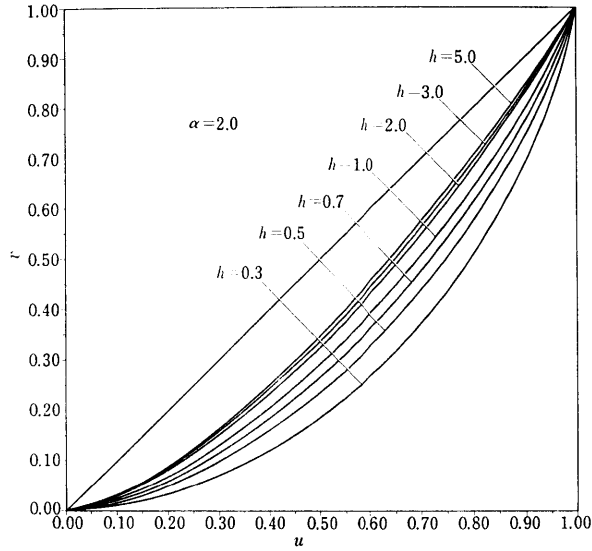


第5.3図 一般化ガンマ分布 (2.5) のローレンツ曲線 (5.2) の h による変動 ($\alpha=1$)

化が極めて単純明快である。即ち、一方の母数を固定した場合、他方の母数が増大するに従って、曲線は何れも均等線 $u=v$ の方向に減速的に変化する。然し乍ら、この変化を具体的に関数の変化として捉えると、極めて多彩であることが次の $\alpha=1$ の場合、即ち正值一般化誤差分布の例で示される。即ち、この場合

(i) $h \rightarrow 0$ のとき

$$v = \begin{cases} 0 & 0 \leq u < 1 \\ 1 & u = 1 \end{cases}$$



第 5.4 図 一般化ガンマ分布 (2,5) のローレンツ曲線 (5.2) の h による変動 ($\alpha=2$)

- (ii) $h = 1$ のとき
 $1 - v = (1 - u) \{1 - \log(1 - u)\}$
- (iii) $h = 2$ のとき
 $u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, -\log(1 - v)\right)$
- (iv) $h \rightarrow \infty$ のとき
 $v = u^2$

等のような変化を示すからである。

さて、Gini 係数 G は、ローレンツ曲線と均等線とで囲まれた面積の二倍と定義され、基本的な集中測度とされている。即ち (5.1) の曲線に対して G は、

$$(5.4) \quad G = 1 - \frac{2}{E(x)} \int_0^\infty \left\{ \int_0^x \xi f(\xi) d\xi \right\} f(x) dx$$

で定義される。特に (5.2) 式に対するこの係数 $G(\alpha, h)$ は、附録 (iv) の公式を用いると容易に

$$(5.5) \quad G(\alpha, h) = 1 - \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)\Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha h}\right)} \int_0^\infty \gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha h}, y\right) y^{1/h-1} e^{-y} dy$$

$$= 1 - \frac{\alpha h}{(\alpha + 1) 2^{2/h+1/\alpha h-1}} \cdot \frac{1}{B\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha h}, \frac{1}{h}\right)}$$

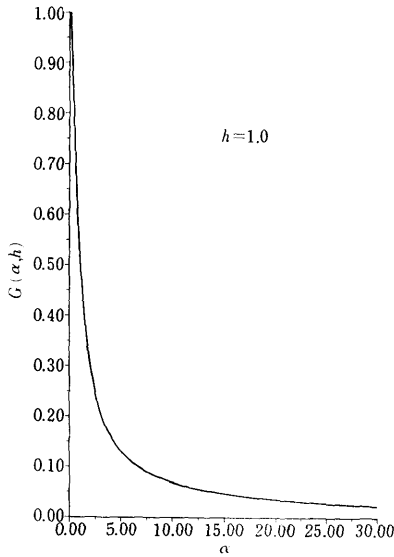
$$\times {}_2F_1\left(1, \frac{2}{h} + \frac{1}{\alpha h}; 1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha h}; \frac{1}{2}\right)$$

と表わすことが出来る。ここで $B(p, q)$ はベータ関数を、又 ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ は Gauss の超幾何関数を表わすものとする。

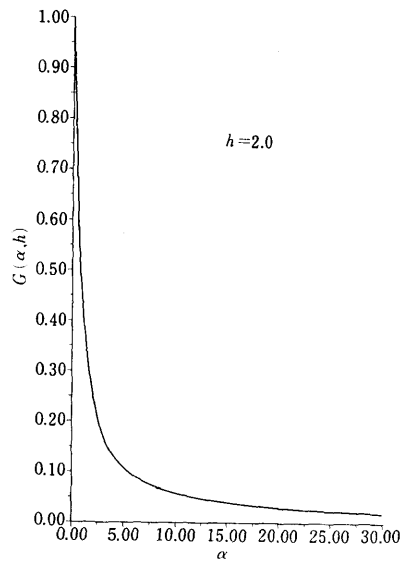
第5.5~8図は $G(\alpha, p)$ が、一方の母数を固定した場合、他方の母数の変動につれてどのように変化するかを示している。それらは何れも単調であるが、特に $G(\alpha, p)$ は一方の母数を固定した場合、他方の母数が比較的小の場合に敏感であることが理解される。この性質は経験資料によると、母数の推定上好ましいものと考えられる。

ところで(5.4)式によると、 G は又

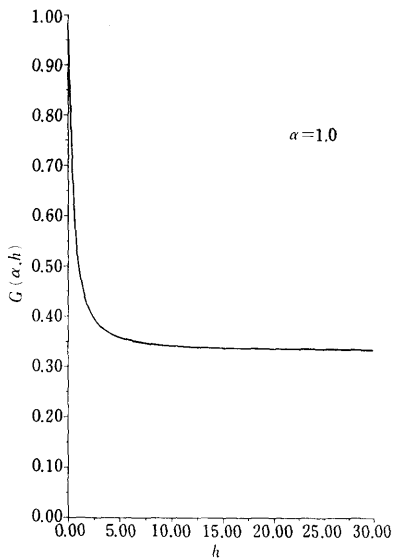
$$(5.6) \quad G = \frac{2}{E(X)} \int_0^{\infty} xF(x) f(x) dx - 1$$



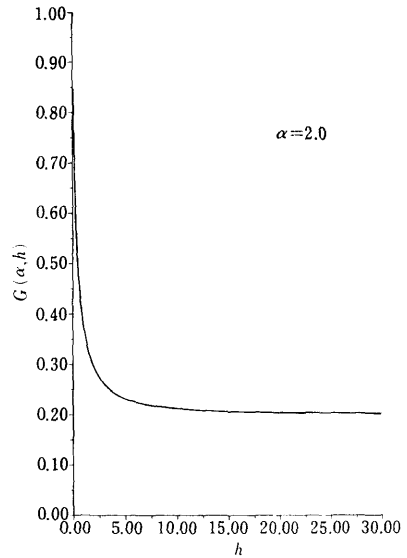
第5.5図 $G(\alpha, h)$ の α による変動 ($h=1$)



第5.6図 $G(\alpha, h)$ の α による変動 ($h=2$)



第5.7図 $G(\alpha, h)$ の h による変動 ($\alpha=1$)



第5.8図 $G(\alpha, h)$ の h による変動 ($\alpha=2$)

と表わされるから、これに対応して (5.5) 式の代りに

$$(5.7) \quad G(\alpha, h) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)\Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha h}\right)} \int_0^{\infty} \gamma\left(\frac{1}{h}, y\right) y^{1/h+1/\alpha h-1} e^{-y} dy - 1$$

$$= \frac{h}{2^{2/h+1/\alpha h-1} B\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha h}, \frac{1}{h}\right)} {}_2F_1\left(1, \frac{2}{h} + \frac{1}{\alpha h}; \frac{1}{h} + 1; \frac{1}{2}\right) - 1$$

が得られる.

さて、ローレンツ曲線の場合に準じて、今、 $\alpha=1$ として $G(\alpha, h)$ を算出すると

$$(i) \quad h \rightarrow 0 \text{ のとき} \quad G(1, h) \rightarrow 1$$

$$(ii) \quad h = 1 \text{ のとき} \quad G(1, 1) = \frac{1}{2}$$

$$(iii) \quad h = 2 \text{ のとき} \quad G(1, 2) = \sqrt{2} - 1$$

$$(iv) \quad h \rightarrow \infty \text{ のとき} \quad G(1, h) \rightarrow \frac{1}{3}$$

等となり、その変化に興味を持たれる.

一般に、 $\alpha \rightarrow \infty$ とすると、附録 (vi) 及び (ii) を逐次適用することにより

$$(5.8) \quad G(\alpha, h) \rightarrow 1 - \frac{h}{2^{2/h-1}} \cdot \frac{1}{B\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right)} {}_2F_1\left(1, \frac{2}{h}; 1 + \frac{1}{h}; \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{h}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{\frac{1}{h} + \frac{1}{2} + n}}$$

となり、 $G(\alpha, h)$ は 0 でない下限をもつことになる.

他方、(5.4) 及び (5.6) 式で定義される Gini 係数 G は周知のように、平均差 A を用いて、

$$(5.9) \quad G = \frac{A}{2E(X)}; \quad A = E(|X_i - X_j|)$$

と表わされる。ここで X_i, X_j は X と同一分布法則に従う独立な二つの変量である。

今、これによって (5.5) 式から一般化ガンマ分布についての平均差 $A(\alpha, h)$ を求めると、容易に

$$(5.10) \quad A(\alpha, h) = 2E(X)G(\alpha, h)$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha h}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)} - \frac{\alpha h}{(\alpha + 1) 2^{2/h+1/\alpha h-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{h} + \frac{1}{\alpha h}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{h}\right)}$$

$$\times {}_2F_1\left(1, \frac{2}{h} + \frac{1}{\alpha h}; 1 + \frac{1}{h} + \frac{1}{\alpha h}; \frac{1}{2}\right)$$

を得ることが出来る.

6. ローレンツ曲線の一般化と形態母数の特殊な推定法

ローレンツ曲線は、(5.1) 式で定義したように、通常 $F(x)$ とその不完全一次モメント関数

により決定され、 u 軸に対して常に凸である単調増加関数を意味するが、その主要な性質は、 x の単調増加正值連続関数 $\zeta(x)$ を用いて一般化ローレンツ曲線

$$(6.1) \quad u = F(x), \quad v_{\zeta} = \frac{1}{E(\zeta(X))} \int_0^x \zeta(\xi) f(\xi) d\xi$$

を構成することによって損われない。この性質は更に

$$(6.2) \quad \zeta''(x) \geq 0$$

の条件をつけることにより、 v は社会的厚生関数 W に比例するとして、不平等分析に積極的に利用しようとする立場に接近する (Atkinson [3] 参照)。然し乍ら勿論、本稿は不平等分析を直接の目的とするものではなく、此の種の一般化が一般化ガンマ分布の性格をより明確にさせるものであり、且つ、その形態母数の推定に対して有用な統計手法を与えることを期待しているのである。

今簡単の場合として、 $\zeta(x)$ を x の累乗

$$(6.3) \quad \zeta(x) = x^{\nu}; \quad \nu > 1$$

とすれば、勿論 $\zeta''(x) > 0$ となるから、(6.1) の曲線が均等線 $v_{\zeta} = u$ とで囲む面積の二倍によって定義される一般化 Gini 係数 G_{ζ} は G よりも大となることは明らかである。事実、(6.3) 式が成立する場合、一般化ガンマ分布 (2.5) に対する v_{ζ} 及び G_{ζ} を特に $v_{\nu}(\alpha, h)$ 及び $G_{\nu}(\alpha, h)$ で表わすと、(3.1) の関係から容易に、

$$(6.4) \quad v_{\nu}(\alpha, h) = \frac{\gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{\nu}{\alpha h}, y\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{\nu}{\alpha h}\right)} = v\left(\frac{\alpha}{\nu}, h\right)$$

及び

$$(6.5) \quad G_{\nu}(\alpha, h) = 1 - \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)\Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{\nu}{\alpha h}\right)} \int_0^{\infty} y\left(\frac{1}{h} + \frac{\nu}{\alpha h}; y\right) \times y^{1/h-1} e^{-y} dy = G\left(\frac{\alpha}{\nu}, h\right)$$

を得ることが出来る。

更に、同一分布に従う独立な変数 X_i, X_j を用いて一般化平均差 A_{ζ} を

$$(6.6) \quad A_{\zeta} = E\{|\zeta(X_i) - \zeta(X_j)|\}$$

と定義すると、 G_{ζ} との間に、

$$(6.7) \quad G_{\zeta} = \frac{A_{\zeta}}{2E(\zeta(X))}$$

が成立する。従って、(6.3) 式が成立する場合、一般化ガンマ分布の平均差 $A_{\nu}(\alpha, h)$ は、(3.1) (5.10) 及び (6.5) により容易に

$$(6.8) \quad A_{\nu}(\alpha, h) = A\left(\frac{\alpha}{\nu}, h\right)$$

である事が理解出来る。以上によって又、次の定理の成立は明かである。即ち、

定理 6.1 一般化ガンマ分布 $f(x; \alpha, h)$ の ν 次の累乗 (6.3) に関する一般化ローレンツ曲

線 (6.1) は、一般化ガンマ分布 $f(x; \alpha/\nu, h)$ のローレンツ曲線に一致する。又この場合、 $f(x; \alpha, h)$ の一般化 Gini 係数及び一般化平均差は、それぞれ $f(x; \alpha/\nu, h)$ の Gini 係数及び平均差に等しい。

定理 6.1 の成立は又、一般化ガンマ分布の (2.5) 式による表現が、他の表現に対してより有用である一つの根拠を与えるものといえる。

又、この定理によると既に第 5.1~8 図について分析したように、 G, G_ν 及び $G-G_\nu$ は α, h が小である程大となる。更に $G-G_\nu$ は一般に ν が大なる程大であるが、もし h 及び α が充分小 (例えば 5 以下) であるならば、 $\nu=2$ としても、その差は G 又は G_ν に対し無視し得ない程大であることは、第 5.1~2 図及び第 5.5~6 図に照して定理 6.1 から理解出来る。定理 6.1 は更に (3.10) に基づく Stacy-Mihram の推定方式に代るべき α, h の同時推定方式を与えるものであることに注目されねばならない。例えば $d(\alpha, h)$ 及び $d_\nu(\alpha, h)$ の標本推定量を、Lomnicki 方式 [7] (Kendall-Stuard, The Advanced Theory of Statistics, vol. 1, fourth edition, p.257 参照) に従って標本値 X_1, \dots, X_n を用いて

$$(6.9) \quad \tilde{d} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} |X_i - X_j|$$

及び

$$(6.10) \quad \tilde{d}_\nu = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} |X_i^\nu - X_j^\nu|$$

によって与えると、これらはそれぞれ $d(\alpha, h)$ 及び $d_\nu(\alpha, h)$ の不偏推定量であり、これらによって (5.5) 及び (6.8) の左辺を置換え、例えば $\nu=2$ と固定すれば α, h に関する一つの推定方式となるからである。勿論、この場合の推定方式は、(3.10) で与えられる Stacy-Mihram 推定法のように、 h, α の逐次的推定を許す程単純な形式をもたないが、反面、偏りのある推定量を含まない点で Stacy-Mihram 方式より優るといえる。

経験によると、例えば法人統計によって得られる経済諸量の分布等に於ては、Gini 係数の推定量として

$$(6.11) \quad \tilde{G} = \frac{\tilde{d}}{2\tilde{X}}; \quad \tilde{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

を用いると偏りが少なくかつ極めて有効であることが認められる。

従って (5.5) 式の右辺を \tilde{G} で置き換え、更に (6.5) の左辺を

$$(6.12) \quad \tilde{G}_\nu = \frac{\tilde{d}_\nu}{2\tilde{X}_\nu}; \quad \tilde{X}_\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^\nu$$

で与えられる \tilde{G}_ν によって置き換えた二つの等式を α, h の推定に用いることが考えられる。その場合、 $\alpha, h \leq 5$ の範囲では、 $\nu=2$ としても、又 \tilde{G} 及び \tilde{G}_ν の精度がやや低くても、第 5.5~8 図によって判断すると、 α, h についての可成精度の良い推定値を得ることが予想されるのである。更にローレンツ曲線及び (6.3) による一般化ローレンツ曲線は、一般に尺度母数に関して不変であるから、 \tilde{G}, \tilde{G}_ν を用いる推定法は母集団が未知の尺度母数を含んでいてもそれに関係しない。従ってそのような場合特に有効と思われるが、このことは (3.11) 式からもうかがい知ることが出来る。

上述の平均差又は Gini 係数を用いる α, h の推定方式は、Stacy-Mihram 方式による推定値を初期値とし、 G, G_ν と α, h との関係を示す第 5.5~8 図の諸図を参考に逐次補正する方向に於て実用化することが可能であろう。

特に, α, h の一方が既知である場合, 又は両者の関係が既知の場合については, 次の諸例に示すような単純な推定形式となるからこれらの適用可能性は明かである.

例 1. Weibull 分布 ($h=1$)

この場合 (3.1) の関係により, 標本平均 \bar{X} を用いて

$$(6.13) \quad \bar{X} - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = 0$$

の α に対する推定方式が得られる. 又, Stacy-Mihram によって標本対数平均 \bar{L} を用いて

$$(6.14) \quad \bar{L} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0; \quad \bar{L} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i$$

が得られる. ここで γ は Euler 定数

$$(6.15) \quad \gamma = -\psi(1) = 0.5772156649 \cdots$$

である. 他方 \bar{G} を用いる α の推定方式は, (5.5) の右辺の計算において附録公式 (v) を適用すると容易に

$$(6.16) \quad \bar{G} - 1 + \frac{\alpha}{2^{1/\alpha}} = 0$$

となる.

例 2. 一般化誤差分布 ($\alpha=1$)

この場合, 標本平均を用いると

$$(6.17) \quad \bar{X} - \frac{2^{2/h}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

となる. 又, Stacy-Mihram により標本対数平均を用いると

$$(6.18) \quad \bar{L} - \frac{1}{h} \psi\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

となる. 更に \bar{G} を用いると推定方式は

$$(6.19) \quad \bar{G} - 1 + \frac{h}{2^{3/h}} \frac{1}{B(2/h, 1/h)} {}_2F_1\left(1, \frac{3}{h}; 1 + \frac{2}{h}; \frac{1}{2}\right) = 0$$

である.

例 3. ガンマ分布 ($\alpha h=1$)

諸推定方式は

$$(6.20) \quad \bar{X} - \alpha = 0$$

$$(6.21) \quad \bar{L} - \psi(\alpha) = 0$$

$$(6.22) \quad \bar{G} - 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{(\alpha+1) 2^{3\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} {}_2F_1\left(1, 1+2\alpha; 2+\alpha; \frac{1}{2}\right) = 0$$

である.

上記の三例に於ては, \bar{X} 及び \bar{L} による簡単な形態母数の推定が可能であるが, 母分布が未知の尺度母数を含む場合は, 他の高次の統計量を含む複雑な形式となることに注意すべきである. (Johnson-Kotz [4] 参照.) それに対して \bar{G} を含む推定方式はやや複雑な形式を持つが, 未知の尺度母数の如何によって変化することはない点に1つのメリットがある. 更に, 未知の位

置母数を含む場合、モメント又は対数モメントによる推定法及び最尤推定法は、遙かに複雑化するから、予め何等かの推定方式により位置母数を推定する必要がある。(Johnson-Kotz [4], 17 及び 20 章参照。) 然し乍ら \bar{G} を用いる推定方式は、単に \bar{G}_v を G_v に関する等式 (6.5) に適用する推定方式と併用することにより、それらの母数を同時に推定することを可能にする。この場合の詳細は、他の機会に、改めて検討することにしよう。

7. 一般化ローレンツ曲線の拡張再定義と一般化ガンマ分布の母数の逐次推定法

さて、一般化ローレンツ曲線の構成は、既述のように必ずしも (6.3) の形式をとることを必要としない。例えば第 4.1~2 図に示される分布に対しては、

$$(7.1) \quad \zeta(x) = (\log x)^v, \quad v \geq 1$$

とすることにより、一般化ガンマ分布に対する前節の諸結果がそのまま適用されることになる。

又、定理 4.3 に述べた (4.14) 式の密度関数に対して、もし $k(x)$ が既知の単調関数のとき、

$$(7.2) \quad \zeta(x) = \{k(x)\}^v; \quad v \geq 1$$

によって一般化ローレンツ曲線を構成すれば、ガンマ分布についての集中解析と同様な結果が得られる。

一般に (6.1) の一般化ローレンツ曲線に関して $\zeta(x) > 0$ の条件を除いても

$$(7.3) \quad \frac{dv_\zeta}{du} = \frac{\zeta(x)}{E\{\zeta(X)\}}, \quad \frac{d^2v_\zeta}{du^2} = \frac{\zeta'(x)}{f(x)E\{\zeta(X)\}}$$

が成立するから、曲線 (u, v_ζ) は $E\{\zeta(X)\} > 0$ のとき u 軸に対して凸、又 $E\{\zeta(X)\} < 0$ のとき第 7.1 図のように u 軸に対し凹となる。又 $\zeta(x)$ を単調減少関数とすれば、これと逆の結果が得られる。このように一般化ローレンツ曲線を $\zeta(x)$ が単調連続関数である場合に対し拡張定義しても、(6.7) の関係は成立するので、それにより一層有用な結果を得ることが出来る。

以下その実例として一般化ガンマ分布の母数の有効な推定方式を求めることにしよう。

一般化ガンマ分布の母数の推定方式は、既に前節に於てその可能性を検討したが、特殊な場合を除き一般に適用する方式としては猶不便であった。従って、ここで改めて尺度母数が既知の場合の実際的方式を提案するが、その際次の定理が基本的に重要な役割を演ずる。但し、定理の記述に先立って若干の用語及び記号上の定義が必要である。即ち、前節 (6.1) に於て

$$(7.4) \quad \zeta(x) = \log x$$

とした場合、一般化ローレンツ曲線、平均差、Gini 係数を特に対数ローレンツ曲線、対数平均差、対数 Gini 係数等と呼び、それぞれ (u, v_i) , A_i , G_i^* で表わすことにする。この時、次の定理が成立する。

定理 7.1 一般化ガンマ分布 (2.5) の対数ローレンツ曲線及び対数 Gini 係数は、母数 α の値に関係なくそれぞれ次式で与えられる。即ち

$$(7.5) \quad v_i = \frac{\gamma_p\left(\frac{1}{h}, y\right)}{\Gamma'\left(\frac{1}{h}\right)}$$

* G_i は G と異なり一般に $-\infty < G_i < \infty$ となる。

及び

$$(7.6) \quad G_I = \frac{h - \beta \left(\frac{2}{h} \right)}{\psi \left(\frac{1}{h} \right)} - \frac{h \Gamma \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{\pi} \Gamma' \left(\frac{1}{h} \right)} \left\{ F_\beta \left(1, \frac{2}{h}, \frac{1}{h} + 1; \frac{1}{2} \right) + F_\gamma \left(1, \frac{2}{h}, \frac{1}{h} + 1; -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

が成立する。但し、 γ_p 及び F_β, F_γ はそれぞれ

$$(7.7) \quad \gamma_p(p, y) = \frac{\partial}{\partial p} \gamma(p, y)$$

及び

$$(7.8) \quad \begin{cases} F_\beta(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\partial}{\partial \beta} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) \\ F_\gamma(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\partial}{\partial \gamma} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) \end{cases}$$

を表わす。又、 $\beta(z)$ は附録 (xi) のベータ関数

$$(7.9) \quad \beta(z) = \frac{1}{2} \left\{ \psi \left(\frac{z+1}{2} \right) - \psi \left(\frac{z}{2} \right) \right\}$$

を意味する。

証明 上記の定義により

$$(7.10) \quad v_i = \frac{1}{E(\log X)} \int_0^x (\log \xi) \frac{\alpha h}{\Gamma \left(\frac{1}{h} \right)} \xi^{\alpha-1} \exp(-\xi^{\alpha h}) d\xi$$

$$= \frac{\int_0^x (\log \xi) \xi^{\alpha-1} \exp(-\xi^{\alpha h}) d\xi}{\int_0^\infty (\log \xi) \xi^{\alpha-1} \exp(-\xi^{\alpha h}) d\xi}$$

ここで

$$(7.11) \quad \zeta = \xi^{\alpha h}, \quad y = x^{\alpha h}$$

とすれば容易に (7.5) 式が得られる。又、定義に従って (5.2) 及び (7.5) 式を適用すると

$$(7.12) \quad G_I = 1 - 2 \int_0^1 v_i du = 1 - 2 \int_0^\infty \frac{\gamma_p \left(\frac{1}{h}, y \right) y^{1/h-1} e^{-y}}{\Gamma' \left(\frac{1}{h} \right) \Gamma \left(\frac{1}{h} \right)} dy$$

$$= 1 - \frac{2}{\Gamma' \left(\frac{1}{h} \right) \Gamma \left(\frac{1}{h} \right)} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \int_0^\infty \gamma(p, y) y^{1/h-1} e^{-y} dy \right\} \Big|_{p=1/h}$$

となる。ここで附録の公式 (iv) を適用し、更に p に関する対数微分法を適用すると、

$$(7.13) \quad G_I = 1 - \frac{2}{\Gamma' \left(\frac{1}{h} \right) \Gamma \left(\frac{1}{h} \right)} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{\Gamma \left(p + \frac{1}{h} \right)}{p 2^{p+1/h}} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \times {}_2F_1\left(1, p + \frac{1}{h}; p + 1; \frac{1}{2}\right) \Big|_{p=1/h} = 1 - \frac{2^{1-2/h} h}{\Gamma'\left(\frac{1}{h}\right)\Gamma\left(\frac{1}{h}\right)} \\ & \times \left[\left\{ \Gamma'\left(\frac{2}{h}\right) - (h + \log 2) \Gamma\left(\frac{2}{h}\right) \right\} {}_2F_1\left(1, \frac{2}{h}; \frac{1}{h} + 1; \frac{1}{2}\right) \right. \\ & \left. + \Gamma\left(\frac{2}{h}\right) \frac{\partial}{\partial p} \left\{ {}_2F_1\left(1, p + \frac{1}{h}; p + 1; \frac{1}{2}\right) \right\} \Big|_{p=1/h} \right]. \end{aligned}$$

ここで公式 (vi) を適用すると,

$$(7.14) \quad {}_2F_1\left(1, \frac{2}{h}; \frac{1}{h} + 1; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{h} + 1\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{h}\right) \sqrt{\pi}}{h \Gamma\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right)}$$

更に公式 (iii) の最も簡単な場合として周知の

$$(7.15) \quad \Gamma(2z) = \frac{2^{2z}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

により結局 (7.13) 式は,

$$(7.16) \quad G_l = 1 - \frac{\psi\left(\frac{2}{h}\right) - (h + \log z)}{\psi\left(\frac{1}{h}\right)} - \frac{h}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(h + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma'\left(\frac{1}{h}\right)} \\ \times \frac{\partial}{\partial p} \left\{ {}_2F_1\left(1, p + \frac{1}{h}; p + 1; \frac{1}{2}\right) \right\} \Big|_{p=1/h}$$

となる. ここで更に, 公式 (xi) を最初の二項に適用すると (7.6) 式が得られる.

定理 7.1 の成立は, (7.6) 式の左辺の G_l に対して標本対数 Gini 係数 \bar{G}_l 即ち,

$$(7.17) \quad \bar{G}_l = \frac{\bar{\Delta}_l}{2\bar{X}_l}$$

ここで,

$$(7.18) \quad \bar{X}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i$$

$$(7.19) \quad \bar{\Delta}_l = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, \dots, n} |\log X_i - \log X_j|$$

を用いることにより h の推定量 \hat{h} が得られることを示している.

更に, この \hat{h} 及び \bar{X}_l を (3.9) の第 1 式に適用すると,

$$(7.20) \quad \bar{\alpha} = \frac{\psi\left(\frac{1}{h}\right)}{h \bar{X}_l}$$

により, α が推定される.

さて (7.6) 式の右辺は何等の統計量も含まないから, 予め h に関する関数表を作製しておくところの推定方式は極めて実用性に富んだものとなる. その製表上の目的に対して, 次の定理は極めて有用である. 即ち,

定理 7.2 定理 7.1 に於ける G_I は更に次のように表現される. 即ち,

$$(7.21) \quad G_I = \frac{\beta \left(\frac{2}{h} \right)}{\psi \left(\frac{1}{h} \right)} + \frac{h \Gamma \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2} \right)}{\sqrt{\pi} \Gamma' \left(\frac{1}{h} \right)} F_\beta \left(1, \frac{2}{h}, \frac{1}{h} + 1; \frac{1}{2} \right) \\ = \frac{h}{2 \psi \left(\frac{1}{h} \right)} - \frac{h \Gamma \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2} \right)}{2 \sqrt{\pi} \Gamma' \left(\frac{1}{h} \right)} F_\gamma \left(1, \frac{2}{h}, \frac{1}{h} + 1; \frac{1}{2} \right)$$

証明 G_I に関する第一等式は, (7.12) 式の代りに,

$$(7.22) \quad G_I = 2 \int_0^1 u d v_I - 1 \\ = \frac{2}{\Gamma' \left(\frac{1}{h} \right) \Gamma \left(\frac{1}{h} \right)} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \int_0^\infty \gamma \left(\frac{1}{h}, y \right) y^{p-1} e^{-y} dy \right\} \Big|_{p=1/h} - 1$$

を用いることにより, 定理 7.1 と同様に証明することが出来る. 又, 第二等式は第一等式と (7.6) 式との関係から容易に導かれる.

定理 7.2 は更に Euler の積分表示 (附録 (vii) 参照) を用いて次のように表現される.

定理 7.3 一般化ガンマ分布 (2.5) について $h > 1$ のとき

$$(7.23) \quad G_I = \frac{\pi \cot \left(\frac{\pi}{h} \right)}{2 \psi \left(\frac{1}{h} \right)} - \frac{h \Gamma \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2} \right)}{2 \sqrt{\pi} \Gamma' \left(\frac{1}{h} \right)} \\ \times \frac{1}{B \left(\frac{2}{h}, 1 - \frac{1}{h} \right)} \int_0^1 t^{2/h-1} (1-t)^{-1/h} \left(1 - \frac{t}{2} \right)^{-1} \log (1-t) dt$$

が成立する.

証明 一般に $\gamma > \beta > 0$ のとき

$$(7.24) \quad {}_2F_1 (\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma (\gamma)}{\Gamma (\beta) \Gamma (\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt$$

であるから γ についての対数微分を考えると容易に

$$(7.25) \quad \frac{F_\gamma (\alpha, \beta, \gamma; z)}{{}_2F_1 (\alpha, \beta; \gamma; z)} = \psi (\gamma) - \psi (\gamma - \beta) \\ + \frac{\int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} \log (1-t) dt}{\int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt}$$

従って, 又

$$(7.26) \quad F_\gamma (\alpha, \beta, \gamma; z) = \{ \psi (\gamma) - \psi (\gamma - \beta) \} {}_2F_1 (\alpha, \beta; \gamma; z) \\ + \frac{\Gamma (\gamma)}{\Gamma (\beta) \Gamma (\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} \log (1-t) dt$$

が得られる。故に又

$$(7.27) \quad F_\gamma\left(1, \frac{2}{h}, \frac{1}{h} + 1; \frac{1}{2}\right) = \left\{ \psi\left(1 + \frac{1}{h}\right) - \psi\left(1 - \frac{1}{h}\right) \right\} \\ \times {}_2F_1\left(1, \frac{2}{h}; \frac{1}{h} + 1; \frac{1}{2}\right) \\ + \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{h}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1}{h}\right)} \int_0^1 t^{2/h-1} (1-t)^{-1/h} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-1} \log(1-t) dt$$

が成立する。他方附録の公式 (viii) 及び (ix) により

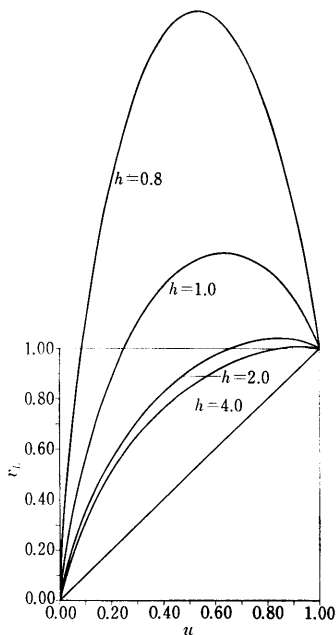
$$(7.28) \quad \psi\left(1 + \frac{1}{h}\right) - \psi\left(1 - \frac{1}{h}\right) = h - \pi \cot\left(\frac{\pi}{h}\right)$$

が得られる。

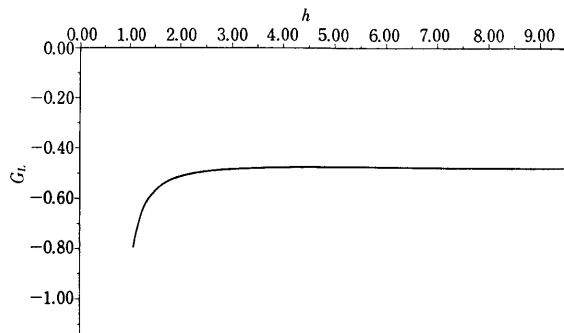
今 (7.27) 及び (7.28) を定理 7.2 の第二等式に代入し、更に (7.14) 式を適用すると (7.23) 式が得られ、定理 7.3 が成立する。

対数ローレンツ曲線 (u, v_i) 及び対数 Gini 係数 G_i の h に対する関係は第 7.1~2 図に示す通りであり、 $h=4.6$ の近傍で単調増大から単調減少に転ずる。又 G_i は、(7.22) 式から直接理解されるように、 $h=1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ 等で不連続であり $h=\frac{2}{3}$ 以下では、複雑に変化する。然し乍ら経験上大切なのは、 $1.0 < h < 4.0$ の範囲と考えるとよく、この範囲では、第 3.1 図と第 7.1 図を比較すると h に対して、少なくとも $1.0 < h < 4.5$ の間では類似した変動を示すことが理解される。従って両者の優劣は専ら対数変動係数と対数 Gini 係数の推定精度に依存し、

後者の変動係数が前者の変動係数よりも小であれば略 (7.24) の推定方式が (3.10) の方式より有利であるとみてよいであろう。従って今後此の問題は、対数変動係数、又は対数 Gini 係数の何れかについてよりよい推定方式を見出すこと、及び経験データによってその結果を具体的に確認する方向に展開されるべきであろう。



第 7.1 図 一般化ガンマ分布 (2.5) 式の対数ローレンツ曲線



第 7.2 図 G_i の h による変動

第7.1表 G_I の h による変動

h	G_I	h	G_I	h	G_I
1.05	-0.7973	2.10	-0.5033	4.10	-0.4729
1.10	-0.7456	2.20	-0.4984	4.20	-0.4728
1.15	-0.7055	2.30	-0.4943	4.30	-0.4727
1.20	-0.6736	2.40	-0.4909	4.40	-0.4726
1.25	-0.6476	2.50	-0.4880	4.50	-0.4726
1.30	-0.6262	2.60	-0.4856	4.60	-0.4725
1.35	-0.6083	2.70	-0.4835	4.70	-0.4725
1.40	-0.5931	2.80	-0.4817	4.80	-0.4726
1.45	-0.5801	2.90	-0.4802	4.90	-0.4726
1.50	-0.5689	3.00	-0.4789	5.00	-0.4727
1.55	-0.5592	3.10	-0.4778	5.5	-0.4731
1.60	-0.5507	3.20	-0.4769	6.0	-0.4738
1.65	-0.5432	3.30	-0.4760	6.5	-0.4745
1.70	-0.5365	3.40	-0.4754	7.0	-0.4753
1.75	-0.5307	3.50	-0.4748	7.5	-0.4761
1.80	-0.5254	3.60	-0.4743	8.0	-0.4768
1.85	-0.5207	3.70	-0.4739	8.5	-0.4776
1.90	-0.5165	3.80	-0.4736	9.0	-0.4783
1.95	-0.5127	3.90	-0.4733	9.5	-0.4790
2.00	-0.5093	4.00	-0.4731	10.0	-0.4797

8. む す び

以上に於ては、専ら一般化ガンマ分布を対象として、種々の観点から解析を加えたが、それらの結果から判断すると、複雑な形態母数を含む分布に対しては、アングロ・サクソン学派とその周辺学派の統計手法は、少なくとも単独では十分な解析結果を与え得ないのではなかろうか。又、特に、その点に於て、ローレンツ曲線に代表されるイタリア学派の統計諸手法は、その一般化された形式に於て、多くの可能性を見出し得るのではなかろうか。本稿は、特にその種の可能性を見出す試みであり、必ずしも完成された方法・結果を提示したとはいえないが、それに至る何等かの手掛りを与え得たとすれば、本稿の目的は達成されたものと考えたい。

あ と が き

本稿の諸グラフの作製上のコンピューター・プログラムは統計数理研究所の岡崎 卓 研究員の助言による処が大きい。又直接その作製及び原稿の整理に当たったのは馬場成子嬢である。ここで深く両氏に感謝するものである。又細を穿ったレフリー氏のコメントに深謝する。

附 録

適用される数学公式*

(i) $x, a > 0$ のとき

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(a-1)(a-2)\cdots(a-n)}{n!(x+n)} \right\}$$

* A. Erdelyi 他: Higher Transcendental Functions Vol. II, McGraw-Hill, New York (1953) 及び森口 他: 数学公式 III, 岩波全書, 244 (1960) 等参照。

(ii) 特に

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{x+n}$$

$$(2n)!! = 2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2$$

$$\text{ここで } (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1$$

$$0!! = (-1)!! = 1$$

(iii) n を 0, 又は正の整数とすると,

$$\Gamma(nz) = \frac{n^{nz}}{(2\pi)^{(n-1)/2} \sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right)$$

(iv) $\alpha, \beta > 0, s > 0$ のとき

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} \gamma(\alpha, t) dt = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\alpha(1+s)^{\alpha+\beta}} {}_2F_1\left(1, \alpha + \beta; \alpha + 1; \frac{1}{1+s}\right)$$

(v) ${}_2F_1(-\alpha, \beta; \beta; z) = (1-z)^\alpha$

$$(vi) \quad {}_2F_1\left(2\alpha, 2\beta; \alpha + \beta + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}$$

$$(vii) \quad {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt;$$

$$\gamma > \beta > 0$$

$$(viii) \quad \psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

$$(ix) \quad \psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z)$$

$$(x) \quad \psi(2z) = \frac{1}{2} \left[\psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) \right] + \log 2$$

$$(xi) \quad \beta(z) = \frac{1}{2} \left[\psi\left(\frac{z+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{z}{2}\right) \right] = \psi(z) - \psi\left(\frac{z}{2}\right) - \log 2$$

参 考 文 献

- [1] Aitchinson, J. and Brown, J.A.C. (1957) *The Lognormal Distribution*, Cambridge at the University Press, 20-24.
- [2] Amoroso, L. (1925) Ricerche intorno alla curva dei redditi, *Annali di Matematica*, Serie IV, Tomo II, 123-159.
- [3] Atkinson, A.B. (1970) On the measurement of inequality, *Journal of Economic Theory*, **2**, 244-263.
- [4] Johnson, N.L. and Kotz, S. (1970) *Continuous Univariate Distributions -1*, John Wiley & Sons Co., New York, 197-199.
- [5] Kapteyn, J.C. (1903) *Skew Frequency Curves in Biology and Statistics*, Astronomical Laboratory, Groningen: Noordhoff.
- [6] Lienhard, J.H. and Meyer, P.L. (1967) A physical basis for the generalized gamma distribution, *Quarterly of Applied Mathematics*, **25**, 30-334.
- [7] Lomnicki, Z.A. (1952) The standard error of Gini's mean difference, *Ann. Math. Statist.*, **23**, 635-637.

- [8] Stacy, E.W. (1962) A generalization of the gamma distribution, *Ann. Math. Statist.*, **33**, 1187–1192.
- [9] Stacy, E.W. and Mihram, G.A. (1965) Parameter estimation for a generalized gamma distribution, *Technometrics*, **7**, 349–358.
- [10] Subbotin, M.T. (1963) On the law of frequency of errors, *Matematicheskii Sbornik*, **31**, 296–301.
- [11] Taguchi, T. (1978) On a generalization of Gaussian distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **30**, A, 211–242.