数量化 II 類の解法について

統計数理研究所　仁　木　直　人

(1979年4月　受付)

On Computation Methods for the Discrimination Problem by Hayashi (Quantification Method Type II)

Naoto Niki
(The Institute of Statistical Mathematics)

Discrimination problem by Hayashi (quantification method type II) requires numerical solutions of certain type of eigenvalue problems of large dimension. Taking advantage of its special structure, Isida devised a method in which the dimension of the required eigenvalue problem is considerably reduced. His method is superior to other methods in its simplicity and numerical stability. However, properties of his method are little known. This note is intended to present some favorable features of his method and to propose some computational schemes.

1. 序

林 [1] によって開発された数量化 II 類は，林の発表後ただちに丸山（文行）が次元が分類グループ数より1少ない固有値問題に転換できるはずだとの指摘を行ない，石田は各個体に与える得点の平均値を0とする仮定のもとでの次元縮小した計算手続きを提案した．([3] にあるものと同じ方法)．また植松 [4] は平均0の仮定なしでも次元縮小できることを示した．

にもかかわらず，従来数量化 II 類が高次元の固有値問題のまま解かれることが多かった事情はよくわからない．ただ，植松の方法は発表当時の計算技術をもってはやや複雑すぎており，また石田の方法は簡明さと精度の両面で秀れたものであるが，その性質についての議論がなく，実用に際してとまどいのあったことも事実である．

仁木はこれまで植松の方法を計算しやすい形に変形して使用してきた（未発表）が，石田の方法の性質を調べてみたところ，この方法は石田自身が考えていたよりも良い性質をもっていることがわかってきた．本論文は，この石田の解法の重要な2つの性質（第3節）およびそれらの性質を使った計算方法のさらなる単純化（第4節）について述べ，これまでの議論の不足を埋めることが主な目的である．また，これらの結果をふまえて，第5節では実際に解を求める際の指針を与える．

2. 数量化 II 類の解法

数量化 II 類については多くの著書（たとえば [2]）があり，ここでは詳しく述べないが，その要点は；

個体の数を n，個体の特性を示す項目 (item) の数を r，第 j 項目の区分 (category) の数を c_j，各個体が分類されているグループ数を p，第 j 項目第 k 区分に与える数値を $x_{jk}=x(l)$ $\left[l\text{ は区分の通し番号：}l=k\ \ (j=1),\ l=\sum_{i}^{j-1}c_i+k\ \ (j\neq1)\right]$ とするとき，

(1) $$\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = \eta^2 \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

を（r 個の条件，例えば $x_{jc_j}=0\,(j=1, 2, \cdots, r)$ など，のもとに）解くことである．ここに，

$\boldsymbol{H} = (h_{lm})$，$\boldsymbol{A} = (a_{lm})$，

$\boldsymbol{x} = (x(l))$ ［縦ベクトル］

$$h_{lm} = \sum_{t=1}^{p} \frac{g_t(l)\, g_t(m)}{n_t} - \frac{n(l)\, n(m)}{n}$$

$$a_{lm} = f(lm) - \frac{n(l)\, n(m)}{n}$$

$$n_t = \sum_{i}^{n} \delta_{it}, \quad n(l) = \sum_{i}^{n} \delta_i(l)$$

$$g_t(l) = \sum_{i}^{n} \delta_{it}\, \delta_i(l), \quad f(lm) = \sum_{i}^{n} \delta_i(l)\, \delta_i(m)$$

$$\delta_{it} = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 個体が第 } t \text{ グループに属すとき} \\ 0 & \text{属さないとき} \end{cases}$$

$$\delta_{ijk} = \delta_i(l) = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 個体が第 } j \text{ 項目第 } k \text{ 区分に反応するとき} \\ 0 & \text{しないとき（}l\text{ は区分の通し番号）} \end{cases}$$

(2) $$\sum_{t}^{p} \delta_{it} = 1, \quad \sum_{k}^{c_j} \delta_{ijk} = 1$$

$$\left(\begin{array}{l} t = 1, 2, \cdots, p \\ l, m = 1, 2, \cdots, c\,;\; c = \sum_{j}^{r} c_j \end{array} \right)$$

である．

この固有方程式は普通かなり次元数が高く，直接計算を行なうことは大型計算機を用いてもかなりの計算時間を要す上，計算精度の面でも問題がある．

しかし，次に掲げるちょっとした改良を加えることにより，ごく普通の低次元固有値問題に変えることができる．

2.1 石田の解法

石田 [3] は各個体に与える得点の平均を 0 とおいても一般性が失なわれないことを利用して，

(3) $$\boldsymbol{G}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{G}'\boldsymbol{x} = \eta^2 \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$$

を得点の総和 s が 0，すなわち

(4) $$s = \sum_{i}^{n} \sum_{l}^{c} \delta_i(l)\, x(l) = 0$$

の条件の下で解くことを提案した．ここに

$$\boldsymbol{G} = (g_t(l)) \quad (l = 1, 2, \cdots, c\,; t = 1, 2, \cdots,$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} n_1 & & & 0 \\ & n_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n_p \end{pmatrix}$$

および

$$\boldsymbol{F} = (f(lm)) \qquad (l, m = 1, 2, \cdots,$$

である．

いま，p 個の要素からなる縦ベクトル

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{G}'\boldsymbol{x} \tag{5}$$

を定義すれば，$\boldsymbol{y}$ の各要素 y_t は各グループ内での平均得点を与える．すなわち，

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{n_t}\sum_{l}^{c} g_t(l)\,x(l) \\ &= \frac{1}{n_t}\sum_{i}^{n}\delta_{it}\sum_{l}^{c}\delta_i(l)\,x(l). \end{aligned}$$

この $\boldsymbol{y}$ を用いて (3) 式を変形しよう．まず $\boldsymbol{F}$ のランクは一般に $c-r+1$ であるから逆行列が存在しないので，その代わりに一般化逆行列 $\boldsymbol{F}^+$ を考える．$\boldsymbol{F}^+$ は無数にあるが，ここでは第 l_j 行および第 l_j 列 $\left(l_j = \sum_{i}^{j} c_j\,;\, j=1,2,\cdots,r-1\right)$ の各要素が全て 0 であるものを考えておけばよいだろう（このような $\boldsymbol{F}^+$ は一意に定まる）．このことは (3) 式を

$$x(l_j) = x_{jc_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, r-1)$$

なる条件の下で解くことに対応し，一般性を失なうことはない．

さて，いま定めた $\boldsymbol{F}^+$ を用いると (3) 式は

$$\boldsymbol{F}^+\boldsymbol{G}\boldsymbol{y} = \eta^2\boldsymbol{x}$$

と書け，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z} &= \boldsymbol{F}^+\boldsymbol{G}, \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{G}'\boldsymbol{Z} \end{aligned}$$

とおくことにより，

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \eta^2\boldsymbol{y} \tag{6}$$

なる p（グループ数）次元の固有方程式に帰着する．また，(3) 式の解 $\boldsymbol{x}$ は (3)，(5) 式により，

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\eta^2}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}^+\boldsymbol{G}\frac{\boldsymbol{y}}{\eta^2} \tag{7}$$

として求まる．ここで注意すべきことは，(7) 式が「各個体の属すグループ番号の代わりに，そのグループの平均得点の $1/\eta^2$ をデータとして与えたときの数量化 I 類の解」になっていることである．(数量化 I 類については [2] [3] などを参照．）すなわち，数量化 II 類は「固有値問題を解いて各グループに与える（平均）得点の配置を定める」そして「与えた（平均）得点を最もうまく説明するように数量化 I 類の問題として解く」という 2 つの段階から成るといえる．

通常のデータでは c（区分の総数）は 10 以上，p（グループ数）は 5 以下のことがほとんどであり，(1) 式の代わりに (6) 式を解くことは計算の能率の上からも精度の上からも好ましい結果を生むはずである．

計算の手順は次のようになる．

step 1.　各グループを第 $r+1$ 項目の区分と見なして，$\delta_i(l)$，δ_{it} のクロス集計を行なう．この結果

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \\ \hline \boldsymbol{G}' & \boldsymbol{N} \end{array}\right] & \begin{array}{c} c \\ p \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad c & \quad p \end{array} & \end{array}$$

のようなマトリクス $\boldsymbol{T}$ を得る.

step 2. $\boldsymbol{Z}=(z_{lt})=\boldsymbol{F}^{+}\boldsymbol{G}$ を求める. このとき $\boldsymbol{Z}$ を一意にするため, 連立一次方程式

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}$$

の第 l_j 番目 $\left(l_j=\sum_{i}^{j} c_j;\ j=1,2,\cdots,r-1\right)$ の式を取り除き (無視し), 代わりに

$$z_{l_j t}=0 \quad (t=1,2,\cdots,p)$$

との条件をおく. この操作は $\boldsymbol{T}$ 上で実行でき

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{array}{|c|c|}\hline * & \boldsymbol{Z} \\ \hline \boldsymbol{G}' & \boldsymbol{N} \\ \hline \end{array}$$

を得る.

step 3. $\boldsymbol{T}_1$ をもとにして $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{G}'\boldsymbol{Z}$ を作る.

step 4. 固有値問題 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\eta^2\boldsymbol{y}$ を (4) 式の条件の下に解く.

step 5. $\boldsymbol{x}=\frac{1}{\eta^2}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{y}$ より $\boldsymbol{x}$ を求める.

この解法は計算が簡単な上, $\boldsymbol{F}$ の対角要素が他の同行の要素に比べて大きいため, step 2 で $\boldsymbol{Z}$ を求める際にも, pivot の入れかえをしない単純な消去法でも充分精度の高いものが得られるようだ.

3. 石田の解法の性質

ここでは, 石田の解法を用いて数量化 II 類を解くときに重要な意味を持つ 2 つの性質について議論する.

まず, この解法が正しいためには (6) 式が (4) 式の条件の下で解を持たなければならないが, このことを保障する次の性質を示せば充分であろう.

[性質 1]

$\eta^2\neq 1$ なる $\boldsymbol{B}$ の固有値 η^2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ およびそれから求めた $\boldsymbol{x}$ は得点の総和 s を 0 とする.

[証 明]

c 個の要素からなるベクトル $\boldsymbol{1}_c'=(11\cdots1)$ を (3) 式の両辺に左から乗ずると

$$\boldsymbol{1}_c'\boldsymbol{G}\boldsymbol{y}=\eta^2\boldsymbol{1}_c'\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$$

より,

$$r(n_1 n_2\cdots n_p)\boldsymbol{y}=\eta^2 r(n(1)\,n(2)\cdots n(c))\boldsymbol{x}$$
$$rs=\eta^2 rs$$

であるから, $(1-\eta^2)s=0$ より [性質 1] が得られる.

次に, 石田の解法を用いて実際に解を求めるときに注意すべき性質として, 数量化 II 類の解とはならない (6) 式の解について述べる.

[性質 2]

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{1}_p=\boldsymbol{1}_p \quad [\boldsymbol{1}_p \text{ は } p \text{ 個の要素をもつベクトルで } \boldsymbol{1}_p'=(11\cdots1)]$$

[証　明]

$$\boldsymbol{x}' = (\underbrace{00\cdots0}_{c-c_r}\ \underbrace{11\cdots1}_{c_r})$$

とすると，(2)，(5) 式より

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{1}_p$$

が得られる．このとき

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} n(1) \\ n(2) \\ \vdots \\ n(c) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} n(1) \\ n(2) \\ \vdots \\ n(c) \end{pmatrix}$$

となるから，$\eta^2=1$ とすれば (3) 式は成立つ．すなわち，$\boldsymbol{B}$ も固有値 $\eta^2=1$ を持ち，その対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{1}_p$ である．

結局，(4) 式の条件つきで (6) 式を解くということは [性質 2] に相当する解を排除することに他ならず，同じ効果があるならばとくに (4) 式の条件を付加する必要はない．(自動的に s は 0 となる．)

4.　石田の解法の変形

前節で見たように，石田の解法には非常に取扱いやすい性質がある．ここではその性質を用いて不要な解 $(\eta^2=1, \boldsymbol{1}_p)$ を除き，計算をより簡単にする 2 つの変形法を提示しよう．

なお，この節では固有方程式

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \eta^2\boldsymbol{y}$$

の固有根を $1, \eta_1^2, \eta_2^2, \cdots, \eta_{p-1}^2$ とし，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{1}_p, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_{p-1}$ と書くことにする．

4.1　最大固有値 1 を 0 に置き換える

p 次のマトリクス

$$\boldsymbol{E}_p = (\boldsymbol{0}_p\cdots\boldsymbol{0}_p\,\boldsymbol{1}_p) = \boldsymbol{1}_p(0\cdots01)$$

を用いて

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}_p \tag{8}$$

なる p 次のマトリクス $\boldsymbol{C}$ を定義する．すなわち $\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{B}$ の第 p 列の各要素から 1 引いたものである．(8) 式および

$$(0\cdots01)\,\boldsymbol{1}_p = 1$$

よりただちに $\boldsymbol{C}$ の固有値が $0, \eta_1^2, \eta_2^2, \cdots, \eta_{p-1}^2$ であることがわかる．また簡単な計算により

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{1}_p = \boldsymbol{0}_p \tag{9}$$

を得る．

いま $\eta_i^2, \boldsymbol{y}_i$ のサフィックスを落として書くことにすれば，(9) 式より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{y} - \frac{y_p}{\eta^2}\boldsymbol{1}_p\right) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{y} \qquad (y_p \text{ は } \boldsymbol{y} \text{ の第 } p \text{ 要素}) \\ &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{E}_p\boldsymbol{y} \\ &= \eta^2\boldsymbol{y} - y_p\boldsymbol{1}_p\end{aligned}$$

であるから，$\boldsymbol{C}$ は固有値 η^2 および固有ベクトル

$$\boldsymbol{y}_c = \boldsymbol{y} - \frac{y_p}{\eta^2}\mathbf{1}_p$$

を持つ．すなわち (6) 式を $s=0$ の条件の下で解く代わりに

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{y}_c = \eta^2\,\boldsymbol{y}_c$$

なる固有方程式を無条件で解き，その（$\eta^2=0$ でない）解 $\boldsymbol{y}_c$ の各要素から（$s=0$ となるように）一定数

$$\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\,y_{cp} \qquad (y_{cp}\ \text{は}\ \boldsymbol{y}_c\ \text{の第}\ p\ \text{要素})$$

を引けば $\boldsymbol{y}$ が求まる．

当然のことながら，この変形は $\boldsymbol{E}_p$ の代わりに

$$\boldsymbol{w}'\,\mathbf{1}_p = 1$$

とするような任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ を用いて

$$\boldsymbol{C}_w = \boldsymbol{B} - \mathbf{1}_p\,\boldsymbol{w}'$$

としても同様に成立つ．$\boldsymbol{w}$ としては

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \frac{1}{p}\mathbf{1}_p,\quad \frac{1}{n}\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\\vdots\\\vdots\\n_p\end{pmatrix}$$

などが簡単な例である．

$\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{y}_c$ の違いは単に全平均をずらす意味しかもたないので，$\boldsymbol{y}_c$ がそのままでも数量化 II 類の解としての資格のあることは明らかである．

4.2 次元数を $p-1$ にする

いま第 p 列及び対角要素が 1 で他が 0 の p 次マトリクス

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．すぐわかるように

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

である．このとき

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U} = \left(\begin{array}{c|c} (b_{ij}-b_{pj}) & \begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix} \\ \hline b_{p1}\cdots\cdots b_{p,p-1} & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix}\text{ただし}\ \boldsymbol{B}=(b_{ij}) \\ (i,\ j=1,2,\cdots,p)\end{pmatrix}$$

となり，$\boldsymbol{B}_1$ と $\boldsymbol{B}$ の固有値は一致するから，$p-1$ 次のマトリクス

$$\boldsymbol{D} = ((b_{ij}-b_{pj})) \qquad (i,\ j=1,2,\cdots\cdots,p-1)$$

の固有値は $\eta_1^2, \eta_2^2, \cdots, \eta_{p-1}^2$ で各 η^2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{y}_D$ は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_D \\ y_p \end{pmatrix} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 - y_p \\ \cdots\cdots \\ y_{p-1} - y_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

を満たす．すなわち

$$\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{y}_D = \eta^2\,\boldsymbol{y}_D$$

を解き，$s=0$ とするように y_p を決めて

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_D \\ 0 \end{pmatrix} + y_p \boldsymbol{1}_p$$

とすれば $\boldsymbol{y}$ が求まる．ここに

$$y_p = -\frac{1}{1-\eta^2}\sum_{i}^{p-1} b_{pj}\,y_{Dj} = -\frac{1}{n_p}\sum n_j\,y_{Dj}$$

となる．もちろん，**4.1** と同様に

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_D \\ 0 \end{pmatrix}$$

も数量化 II 類の解としての資格を備えている．

4.1 と同様にこの変形は他の行（たとえば第 1 行）を残すようにもでき，計算機のプログラムが書きやすいように選べばよい．

5. 解を求める際の指針

この節で取り上げるのは，どのように固有値問題（第 2 節の step 4）を解いたらよいか，という問題である．

始めに解くべきマトリクスの精度のチェックの方法を述べ，そののち目的に応じた解の求め方について順次述べていくことにしよう．

5.1 マトリクス $\boldsymbol{B}$ の精度

第 2 節で述べたように $\boldsymbol{B}$ を求めるために必要な p 個の連立方程式

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{G}$$

は pivot の入れかえをしない単純な消去法で充分な精度が得られるようだ．もしその精度に不安がある場合は，

$$\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{1}_p = \boldsymbol{1}_p \quad \text{または} \quad \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{1}_p = \boldsymbol{0}_p$$

すなわち，$\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{C})$ の各行について要素の和が必要な精度の許す範囲内でほぼ 1(0) になっているかどうかを確かめてみればよい．

また $\boldsymbol{B}$ の全固有値を求めるような手法で (8) 式を解いた場合には (5.4)，最大固有値がほぼ 1 に等しいかどうかを見てもよいだろう．

5.2 数量化 II 類の当初の目的である 1 でない最大固有値 η_1^2 のみを求める

この目的のためには $\boldsymbol{B}$ そのものを使っても充分能率よく解が求められる．

$\boldsymbol{C}$ や $\boldsymbol{D}$ を用いる場合はただちに power method により η_1^2 を求めることができるが，$\boldsymbol{B}$ を用いる場合は $\eta^2=1$ の解を避ける必要がある．これには適当な初期値を $\boldsymbol{y}^{(0)}$ として，各ステップで $\boldsymbol{B}$ の第 p行を除いた $\boldsymbol{B}_{-p}$ により

$$\boldsymbol{y}_{-p}{}^{(k)} = \boldsymbol{B}_{-p}\,\boldsymbol{y}^{(k-1)}$$

$$y_p^{(k)} = -n_p^{-1}(n_1\cdots n_{p-1})\boldsymbol{y}_{-p}^{(k)}$$

を計算し，

$$\boldsymbol{y}^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_{-p}^{(k)} \\ y_p^{(k)} \end{pmatrix}$$

とする．$\eta^2=1$ に対応する解 $\mathbf{1}_p$ のみが $s\neq 0$ とするから，$\boldsymbol{y}^{(k)}$ は $\mathbf{1}_p$ の成分を含まないことになるので，$\eta^2\neq 1$ なる最大の固有値 η_1^2 および $\boldsymbol{y}_1$ が求まる．

この計算法は一見複雑のようであるが，計算量は $\boldsymbol{C}$ を用いる場合とほとんど変わりがない．

5.3 η_1^2 の次に大きい η_2^2 を求める

η_1^2 および η_2^2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ を用いて各個体の得点を計算し，平面上にプロットしてみるのも興味あるところだ．η_2^2 を求めるには，

$$\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C} - \eta_1^2\boldsymbol{y}_{c1}\boldsymbol{w}_1' \quad (\boldsymbol{w}_1 \text{ は } \boldsymbol{w}_1'\boldsymbol{y}_{c1}=1 \text{ なる任意のベクトル})$$

として $\boldsymbol{C}_1$ の最大固有値を power method で計算すればよい．$\boldsymbol{y}_2$ は η_2^2 を利用して連立一次方程式を解くか，$\boldsymbol{y}_2$ の計算が楽なように $\boldsymbol{w}_1$ を決めておくことにより求まる．同様なことが $\boldsymbol{D}$ を用いても行なえやはり有利な方法であるが，$\boldsymbol{B}$ を用いるのは計算がやや複雑になるのでこの目的には向かないようである．

この方法は η_2^2 よりも小さい固有値を求めるために次々と継続していくこともできるが，計算誤差が集積してくるため，せいぜい η_3^2 を求める程度にとどめるべきである。

また $\boldsymbol{y}_1$ の成分を含まないベクトル $\boldsymbol{y}_2^{(0)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^{(0)}-\eta_1^2\boldsymbol{y}^{(0)}$ を初期値として **5.2** と同様に η_2^2 を求めることもできようが，あまりいい成果は期待できない．

5.4 全ての固有値 $\eta_1^2, \eta_2^2, \cdots, \eta_{p-1}^2$ を求める

固有値の完全問題といわれているものである．この問題については数多くの著書があり，一般論は述べない．ここでは実際的な2つの方法について述べよう．

5.4.1 $p-1$ 次方程式（固有方程式）を解く

数量化 II 類が使われるケースでは，グループ数が 2〜5 の場合がほとんどを占める．しかも各固有値は $0<\eta^2<1$ を満たしており，直接 η^2 の満たす $p-1$ 次方程式を解く方が有効な場合が多い．

典型的なのは $p=2$（2 分類）の場合である．この場合は

$$\eta^2 = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{B} - 1 = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$$

でただちに解が求まる．また $p=3$ の場合は

$$\lambda^2 - (\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}-1)\lambda - \frac{1}{2}\{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^2 - (\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}-1)^2 - 1\} = 0,$$

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}\,\boldsymbol{C}\cdot\lambda - \frac{1}{2}\{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{C}^2 - (\mathrm{tr}\,\boldsymbol{C})^2\} = 0$$

または

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}\,\boldsymbol{D}\cdot\lambda - \frac{1}{2}\{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{D}^2 - (\mathrm{tr}\,\boldsymbol{D})^2\} = 0$$

の2根として η_1^2, η_2^2 が求まる．

$p=4$ 以上の場合も公式（$p=4$ および5の場合）やニュートン法などを用いて簡単に各 η^2 を求めることができる．また power method と組合せて解を求めることも実際的である．

5.4.2 右上三角行列に相似変換する

$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ は一般に非対称マトリクスであるから Jacobi 法を適用することはできないが，そ

れに非常によく似た回転法で，$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ を右上三角行列に相似変換できる．このことは，「実正方行列の固有値が全て実数であるとき，その行列を直交行列を用いて実右上三角行列に相似変換できる.」という定理に基く．(簡単に証明できる.)

回転法は一般にあまり能率のいい方法ではないが，この場合は $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ の次元数が小さいので充分であろう．当然0にすべき要素数の少ない $\boldsymbol{D}$ について行なうのが最も効果的である.

この方法は **5.4.1** に比べて能率の面では劣るが，計算機を用いる場合にはプログラムがすっきりした形になるという利点がある.

なお，解法の歴史については石田正次氏に多くを教えていただきました．また，レフェリーの方々からは有益な助言をいただきました．ここに記して感謝いたします.

参考文献

[1] Hayashi, C. (1952) On the prediction of phenomena from qualitative data and the quantification of qualitative data from the mathematico-statistical point of view, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **3**, 69-98.

[2] 林・樋口・駒沢 (1970) 情報処理と統計数理，産業図書.

[3] 石田正次 (1977) データ解析の基礎，森北出版.

[4] Uematu, T. (1959) Note on the numerical computation in the discrimination problem, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **10**, 131-136.