部分集団の選別のベイズ決定方式について

統計数理研究所　野　田　一　雄

(1979年5月　受付)

On a Bayes Decision Procedure for a Selection of a Subpopulation

Kazuo Noda
(The Institute of Statistical Mathematics)

A common feature in selection problems is to select under some criterion a subpopulation (or a subset) of members of a population on the basis of measurements on a variable X, because realized values of an another variable Y which characterize members of the population cannot be directly measured at the time of selection. Since each optimum selection $\phi_{\theta}^*(x)$ depends on an unknown parameter θ, a construction (or a decision procedure) $\hat{\phi}(x, s)$ for selection on the basis of a supplementary sample S having information of θ must be considered. A question, "Does a decision procedure $\phi_{\bar{\theta}}^*(x)$ always become a Bayes decision procedure when $\bar{\theta}(S)$ is the mean of a posterior distribution?" has been presented by many statisticians.

In this paper a negative answer to the above-mentioned question is given by constructing a simple counterexample. In this example (X, Y) is specialized as a variable distributed with a normal distribution and the prior distribution is a truncated normal distribution. The criterion of selection is the one introduced by Raj [2].

1. はじめに

1.1. 部分母集団の最適選別

部分母集団（もしくはグループ）の選別とは，入学試験における選抜や農畜産の育種における良質部分の選別などにみられるように，ある母集団の成員の部分集団を一定の基準のもとでどのように選びだすのかという問題である．その場合，成員の性格を量的に特徴づける変量 Y の実現値（例えば，入学試験の選抜においては学生の入学後の成績など）は，現在時点においては観測されず将来において始めてみいだされる．したがって，次位にはなるが成員の性格をやはり特徴づける別の変量 X の実現値（例えば，入学試験の選抜においては入学試験の成績など）が x のある一定の領域 R（とりあえず，これを選別領域とよぶことにする）に属することをみることによって，対応する成員を選別する集団の一員とする．つまり，選別領域 R に属す x に対応する成員の集合が，選別される部分集団となるわけである．また，このような集団の選別は，一定の基準のもとでなされる．かくして，一定の制約条件のもとである目的関数の最大値もしくは最小値を与える集団の選別は最適選別 optimum selection とよばれる．いろいろな基準が考えられるが，ここでは Cochran [1] および Raj [2] によって与えられた基準をとりあげてみよう．

いま，X，Y の同時確率密度を $f(x, y, \theta)$ によって表す．ここで θ は未知パラメーターを表す．X の確率密度 g は，あらかじめ既知であるようにとられている．x が与えられたときの Y の回帰関数，条件付分散をそれぞれ $\eta(x, \theta)$，$v(x, \theta)$ によって表すことにする．$\mathscr{R}$，$\mathscr{R}^2$ をそれぞれ実数空間，2次元の実数空間とする．このとき，選別される集団を (x, y)-平面の上に表示すれば，R を選別領域として，2次元の直積集合 $R\times\mathscr{R}=\{(x, y): x\in R, y\in\mathscr{R}\}$ となる．いま，

$$\iint_{R\times\mathscr{R}} f(x,\ y,\ \theta)\ dxdy=\alpha$$

とすれば，選別後の母集団の密度は $\phi_R f(x,\ y,\ \theta)/\alpha$ によって表わされる．ただし ϕ_R は R の定義関数である．かくして，選別領域 R に対応する定義関数 ϕ_R が一般化され，各 x について $0\leqq\phi(x)\leqq 1$ なる x の関数（詳しくは，Borel-可測関数）は選別 selection とよばれる．

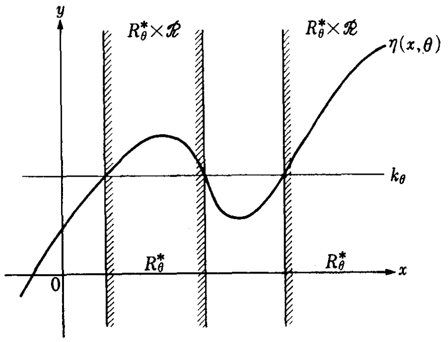
さて，Cochran の基準は次のように述べられる：α を $0<\alpha<1$ なるある与えられた定数として

(1.1)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\phi(x)\ f(x,\ y,\ \theta)/\alpha]\ dxdy$$
$$=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\ g(x)\ dx=\alpha$$

なる制約条件のもとで，ϕ の目的関数

(1.2)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\,[\phi(x)\ f(x,\ y,\ \theta)/\alpha]\ dxdy$$
$$=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(x,\ \theta)\ \phi(x)\ g(x)\ dx$$

の maximization を考えること．すなわち，容量を一定値 α に制限する中で，選別後の母集団（その密度は $\phi(x)\ f(x,\ y,\ \theta)/\alpha$）の平均値を最大にするような最適選別 $\phi_\theta{}^*$ を求めることが要求される．



この最適な選別領域 $R_\theta{}^*$ は，一定の条件のもとで $R_\theta{}^*=\{x;\eta(x,\ \theta)\geqq k_\theta\}$ として求められる．ただし k_θ は

$$\int_{R_\theta{}^*}g(x)\ dx=\alpha$$

を満たす定数である（[1] を見よ）．あるいは，最適選別 $\phi_\theta{}^*$ は，

(1.3)
$$\phi_\theta{}^*(x)=\begin{cases}1 & (\eta(x,\ \theta)\geqq k_\theta \text{ を満たす } x),\\ 0 & (\eta(x,\ \theta)<k_\theta \text{ を満たす } x)\end{cases}$$

として求められる．この形からわかるように，$\phi_\theta{}^*$ はパラメーター θ に依存する．

つぎに，Raj の選別の基準を考えることにする．これは，α_1，α_2 $(0<\alpha_1<1)$ を与えられた定数として，

(1.4)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\ g(x)\ dx=\alpha_1,$$

(1.5)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\,[\phi(x)\ f(x,\ y,\ \theta)/\alpha_1]\ dxdy$$
$$=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(x,\ \theta)\ \phi(x)\ g(x)\ dx=\alpha_2$$

なる制約条件のもとで，ϕ の目的関数

$$(1.6)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-\alpha_2)^2[\phi(x)f(x,\ y,\ \theta)/\alpha_1]\,dxdy$$
$$=\frac{1}{\alpha_1}\int_{-\infty}^{\infty}[v(x,\ \theta)+(\eta(x,\ \theta)-\alpha_2)^2]\,\phi(x)\,g(x)\,dx$$

の minimization を考えるものである．この基準の意味するものは，容量，選別後の母集団の平均値をそれぞれ一定値 α_1，α_2 に制限する中で，選別後の母集団の分散を最小にする最適選別 $\phi_\theta{}^*$ を要求することである．すなわち，容量一定のもとで一定の平均値のまわりに密集するグループを選別することをねらうのがこの基準である．この場合の最適選別 $\phi_\theta{}^*$ もパラメーター θ に依存する．

1.2. 問題の設定

以上の二つの基準においてみられるように，一般に最適選別 $\phi_\theta{}^*$ は未知パラメーター θ に依存する．したがって θ に関する（補助）情報，すなわち $(X,\ Y)$ とは独立に，しかもその分布と同じ分布をもつ互いに独立な標本 $(X_1,\ Y_1)$，$\cdots$，$(X_n,\ Y_n)$ を S によって表わし，この S の実現値 s を用いることによって，$\phi_\theta{}^*$ に代りうる適当な選別の再構成あるいは決定方式 $\hat{\phi}(x,\ s)$ を求めることが問題となる．ただし $\hat{\phi}$ は，すべての $(x,\ s)$ について $0\leqq\hat{\phi}(x,\ s)\leqq1$ なるような $(x,\ y)$ の関数（詳しくいえば，Borel-可測関数）である．この場合，$\hat{\phi}$ の危険関数は次のように与えられる．(1.2)，(1.6) に示されているような目的関数を一般化してこれを $\tau_0(\theta,\ \phi)$ と表わし，$\tau_0(\theta\ ,\phi_\theta{}^*)$ が最大値である（$\tau_0(\theta,\ \phi)$ は ϕ の利得を示す）ときは

$$L(\theta,\ \phi)=\tau_0(\theta,\ \phi_\theta{}^*)-\tau_0(\theta,\ \phi),$$

$\tau_0(\theta,\ \phi_\theta{}^*)$ が最小値であるときは

$$L(\theta,\ \phi)=\tau_0(\theta,\ \phi)-\tau_0(\theta,\ \phi_\theta{}^*)$$

とおく．L は ϕ を決定するときの損失関数を意味して，すべての $(\theta,\ \phi)$ について非負値をとる．かくして $\hat{\phi}$ の危険関数は，S の分布に関する $L(\theta,\ \hat{\phi})$ の平均 $r(\theta,\ \hat{\phi})=\mathrm{E}_\theta L(\theta,\ \hat{\phi})$ によって与えられる．パラメーター θ の空間 Θ の上に事前確率密度 ξ が与えられるときは，ベイズ危険関数

$$\bar{r}(\xi,\hat{\phi})=\int_\Theta r(\theta,\ \hat{\phi})\,\xi(\theta)\,d\theta$$

が $\hat{\phi}$ の評価式として考えられる．

さて，ξ の事後確率密度を $\bar{\xi}(\theta|s)$ とするとき，$\bar{\xi}$ の平均 $\tilde{\theta}$（これは平均自乗誤差の ξ に関する平均を最小にする解でもある）を $\phi_\theta{}^*$ における θ と置換してえられる $\phi_{\tilde{\theta}}{}^*$ は，また一つの選別の決定方式である．こゝで多くの研究者によって，$\phi_{\tilde{\theta}}{}^*$ は $\bar{r}$ の最小値を与えるベイズ決定方式になりえるかという質問がなされている．もしもその答が肯定的であれば，ベイズ解を求めることがより簡単であるということにとどまらず，パラメーター θ のベイズ推定と選別のベイズ決定との関係が直線的であるという結果がえられることになる．

しかしながら，その答は，一般的には否定的である．というのは，先述の Raj の基準のもとで，自然な反例をつくることができるからである．次節以下，その詳細を示すことにする．

2. Raj の基準における最適選別について

まず，g と族 $\{f(x,\ y,\ \theta);\theta\in\Theta\}$ を具体化する．$\bar{f}$ を，x が与えられたときの Y の条件付確率密度として，次のような密度をもつ正規分布の族を考える：

$$(2.1)\qquad \bar{f}(x,\ y,\ \theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\theta_0-\theta_1 x)^2\right],$$

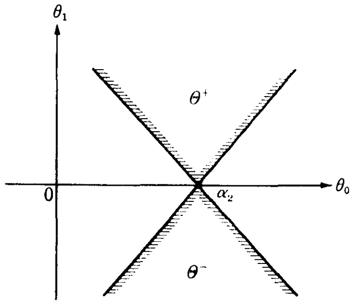
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-x^2/2], \tag{2.2}$$

ただし $\sigma>0$ は既知，$\theta=(\theta_0, \theta_1)$ は次のような空間 Θ の点である．まず Θ^+ を次式を満たす θ の集合とする：

$$\begin{cases} \theta_1 > 0 , \\ \theta_1 > \dfrac{\alpha_1}{\psi(\Psi^{-1}(\alpha_1))} (\theta_0 - \alpha_2) , \\ \theta_1 > \dfrac{-\alpha_1}{\psi(\Psi^{-1}(1-\alpha_1))} (\theta_0 - \alpha_2) . \end{cases} \tag{2.3}$$

また Θ^- を次式を満たす θ の集合とする：

$$\begin{cases} \theta_1 < 0 , \\ \theta_1 < \dfrac{\alpha_1}{\psi(\Psi^{-1}(\alpha_1))} (\theta_0 - \alpha_2) , \\ \theta_1 < \dfrac{-\alpha_1}{\psi(\Psi^{-1}(1-\alpha_1))} (\theta_0 - \alpha_2) . \end{cases} \tag{2.4}$$



ただし，ψ, Ψ はそれぞれ標準正規分布の密度関数および分布関数とし，Ψ^{-1} は Ψ の逆関数を表すものとする．このとき Θ は Θ^+ と Θ^- の和集合 $\Theta^+ \cup \Theta^-$ として与えられる．

Raj の基準は，$\eta(x, \theta)=\theta_0+\theta_1 x$, $v(x, \theta)=\sigma^2$ であるから，すべての $\theta \in \Theta$ について

$$\tau_1(\theta, \phi) = \frac{1}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, g(x) = 1 , \tag{2.5}$$

$$\tau_2(\theta, \phi) = \frac{1}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{\infty} (\theta_0 + \theta_1 x)\, \phi(x)\, g(x)\, dx = \alpha_2 \tag{2.6}$$

なる制約条件のもとで，ϕ の目的関数

$$\tau_0(\theta, \phi) = \frac{1}{\alpha_1} \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma^2 + (\theta_0 + \theta_1 x - \alpha_2)^2]\, \phi(x)\, g(x)\, dx \tag{2.7}$$

の minimization を考えるものとなる．

さて，パラメーターの空間として (2.3)，(2.4) によって定義される Θ をとった理由は，次の結果による．

命題 2.1

制約条件 (2.5)，(2.6) を満たす（パラメーター θ に依存する）選別が存在するための必要十分条件は θ が Θ に属することである．

（証明については略.）

かくして，Theorem 4.1, 4.2 [5] をこの問題に適用することによって，最適選別 $\phi_\theta{}^*$ に関する次の結果が得られる．

定理 2.1

制約条件 (2.5)，(2.6) を満たし目的関数 (2.7) を最小にする最適選別 $\phi_\theta{}^*$ は存在する．さらに (2.5)，(2.6) を満たすある選別 ϕ_θ が最適であるための必要十分条件は，Θ の上のある関

数 h_1^*, h_2^* があって ϕ_θ が次式を満足することである：

$$\phi_\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x_1(\theta) < x < x_2(\theta)) \\ 0 & (x < x_1(\theta) \text{ もしくは } x > x_2(\theta)) \end{cases} \tag{2.8}$$

ただし，$x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$ は，二次方程式

$$\zeta(x,\ \theta) \rightleftarrows \sigma^2 + (\theta_0 + \theta_1 x - \alpha_2)^2 - h_1^*(\theta) - h_2^*(\theta)\,(\theta_0 + \theta_1 x) = 0 \tag{2.9}$$

の二実根であり，h_1^*, h_2^* は

$$\begin{cases} \Psi(x_2(\theta)) - \Psi(x_1(\theta)) = \alpha_1, \\ \theta_0 + \theta_1\,[\psi(x_1(\theta)) - \psi(x_2(\theta))]/\alpha_1 = \alpha_2 \end{cases} \tag{2.10}$$

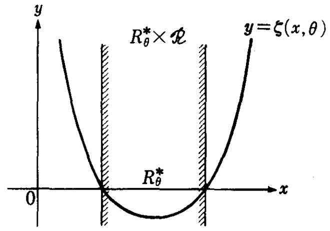
を満たすものとして与えられる．

略　証

ϕ_θ^* の存在は，命題 2.1 の上にたって，Theorem 4.1 [5] から直接的に導かれる．また (2.8) は，Theorem 4.2 [5] より ϕ_θ が

$$\phi_\theta(x) = \begin{cases} 1 & \zeta(x,\ \theta) < 0 \text{ を満たす } x \\ 0 & \zeta(x,\ \theta) > 0 \text{ を満たす } x \end{cases}$$

を満たすこととして与えられることから結果する．



かくして，

$$R_\theta^* = \{x;\ x_1(\theta) \leqq x \leqq x_2(\theta),\ \theta \in \Theta\} \tag{2.11}$$

とおけば，R_θ^* は最適な選別領域となり，R_θ^* の定義関数 ϕ_θ^* は最適選別である．

3.　ベイズ決定方式について

さて，標本 $S = ((X_1,\ Y_1),\ \cdots,\ (X_n,\ Y_n))$ の尤度は，

$$f_\theta^{(n)}(s) = \prod_{i=1}^{n} \bar{f}(x_i,\ y_i,\ \theta) \cdot g(x_i) \tag{3.1}$$

として与えられる．この分布に関する期待値を $\mathrm{E}_\theta(\cdot)$ によって表わすことにしよう．ξ を nonsingular な二次元正規分布 $N(m,\ V)$ の密度関数とする．ただし

$$m = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} v_{00} & v_{01} \\ v_{10} & v_{11} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Θ が (2.3), (2.4) で与えられる領域であるために，Θ^* は Θ に含まれる長方形

$$\Theta^* = \{(\theta_0,\ \theta_1);\ \theta_0^{(1)} \leqq \theta_0 \leqq \theta_0^{(2)},\ \ \theta_1^{(1)} \leqq \theta_1 \leqq \theta_1^{(2)}\} \tag{3.3}$$

であるとし，事前確率密度 ξ^* は ξ を Θ^* 上で truncate することによってつくられる分布の密度であるとする．ξ^* の事後確率密度関数を $\bar{\xi}^*(\theta|s)$ によって表し，$\bar{\xi}^*$ の平均を $\tilde{\theta}$ とする．このとき，(2.11) によって得られた ϕ_θ^* において，θ を $\tilde{\theta}$ によって置換すると，問題とすべき決定方式 $\phi_{\tilde{\theta}}^*$ がえられる．いま，

$$\beta_n(\theta) = \mathrm{E}_\theta\,\tau_2(\theta,\ \phi_{\tilde{\theta}}^*) - \alpha_2 \tag{3.4}$$

とおけば，すべての $\theta \in \Theta$ について $\beta_n(\theta) \to 0$ $(n \to \infty)$ である．

かくして，すべての $\theta \in \Theta$ について

$$\mathrm{E}_\theta\,\tau_1(\theta,\ \hat{\phi}) = 1\ , \tag{3.5}$$

$$\mathrm{E}_\theta\,\tau_2(\theta,\ \hat{\phi}) = \alpha_2 + \beta_n(\theta) \tag{3.6}$$

なる制約条件のもとで，ベイズ危険

(3.7)
$$\bar{r}(\bar{\xi}^*, \hat{\phi}) = \int_{\Theta} r(\theta, \hat{\phi})\xi^*(\theta)\,d\theta = \int_{\Theta} \mathrm{E}_\theta[\tau_0(\theta, \hat{\phi}) - \tau_0(\theta, \phi_\theta^*)]\,\xi^*(\theta)\,d\theta$$

の最小値を与えるベイズ決定方式 $\hat{\phi}_{\xi^*}$ を求めることが問題となる．

このために，まず $\bar{\xi}^*$ の形を求めることにする．ξ の事後確率密度 $\bar{\xi}(\theta|s)$ は，また正規分布 $N(\hat{\theta}, \hat{V})$ の密度である（例えば [3] を見よ）．ただし

(3.8)
$$\begin{cases} \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_0 \\ \hat{\theta}_1 \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} v_{00}m_0 + v_{01}m_1 + (\sum_{i=1}^{n} y_i)/\sigma^2 \\ v_{10}m_0 + v_{11}m_1 + (\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)/\sigma^2 \end{bmatrix} \\ \hat{V} = \begin{bmatrix} \hat{v}_{00} & \hat{v}_{01} \\ \hat{v}_{10} & \hat{v}_{11} \end{bmatrix} = U^{-1} \end{cases}$$

であり，U は

(3.9)
$$U = \begin{bmatrix} v_{00} + n/\sigma^2 & v_{01} + (\sum_{i=1}^{n} x_i)/\sigma^2 \\ v_{10} + (\sum_{i=1}^{n} x_i)/\sigma^2 & v_{11} + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)/\sigma^2 \end{bmatrix}$$

として与えられる．いま，

(3.10)
$$A = \int_{\Theta^*} \xi(\theta)\,d\theta$$

とおけば*

(3.11)
$$\xi^*(\theta) = \begin{cases} \xi(\theta)/A & (\theta \in \Theta^*) \\ 0 & (\theta \in \Theta \sim \Theta^*) \end{cases}$$

である．また

(3.12)
$$f^{(n)}(s) = \int_{\Theta} f_\theta^{(n)}(s)\ \xi(\theta)\,d\theta$$

とおけば，$f_\theta^{(n)}(s)\ \xi(\theta) = f^{(n)}(s)\bar{\xi}(\theta|s)$ である．したがって，すべての $\theta \in \Theta^*$ について

$$\bar{\xi}^*(\theta|s) = \frac{f_\theta^{(n)}(s)\xi^*(\theta)}{\int_{\Theta^*} f_\theta^{(n)}\xi^*(\theta)\,d\theta} = \frac{f_\theta^{(n)}(s)\ \xi(\theta)/A}{\left[\int_{\Theta^*} f_\theta^{(n)}(s)\ \xi(\theta)\,d\theta\right]\Big/A}$$
$$= \frac{f^{(n)}(s)\bar{\xi}(\theta|s)}{\int_{\Theta^*} f^{(n)}(s)\ \bar{\xi}(\theta|s)\,d\theta} = \frac{\bar{\xi}(\theta|s)}{\int_{\Theta^*} \bar{\xi}(\theta|s)\,d\theta}.$$

かくして，次の結果をえる：

命題 3.1

(3.13)
$$\nu(s) = \int_{\Theta^*} \bar{\xi}(\theta|s)\,d\theta$$

とおけば，事後確率密度 $\bar{\xi}^*(\theta|s)$ は次式で与えられる：

(3.14)
$$\bar{\xi}^*(\theta|s) = \begin{cases} \bar{\xi}(\theta|s)/\nu(s) & (\theta \in \Theta^*), \\ 0 & (\theta \in \Theta \sim \Theta^*). \end{cases}$$

---

* Θ と Θ^* との差集合を $\Theta \sim \Theta^*$ によって表す．

ξ^* の平均 $\tilde{\theta}$ は，例えば (66.1)，(66.2)，(66.3) [4] を (3.14) に適用することによって，次のように示される．いま，

$$(3.15)\quad \begin{cases} \rho = \dfrac{\hat{v}_{10}}{\sqrt{\hat{v}_{00}\hat{v}_{11}}}, & \bar{\theta}_j{}^{(i)} = \dfrac{\theta_j{}^{(i)} - \hat{\theta}_j}{\sqrt{\hat{v}_{jj}}}, \\ a_i = \dfrac{\bar{\theta}_1{}^{(i)} - \rho[\bar{\theta}_0{}^{(i)}]^2}{\sqrt{1-\rho^2}}, & b_i = \dfrac{\bar{\theta}_0{}^{(i)} - \rho[\bar{\theta}_1{}^{(i)}]^2}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i=1,2 \\ j=0,1 \end{pmatrix}$$

とおくとき，

$$(3.16)\quad \begin{cases} \tilde{\theta}_0 = \hat{\theta}_0 + \dfrac{\sqrt{\hat{v}_{00}}}{\nu(s)}\left[\{\psi(\bar{\theta}_0{}^{(1)})(1-\Psi(a_1)) + \rho\psi(\bar{\theta}_1{}^{(1)})(1-\Psi(b_1))\}\right. \\ \qquad \left. -\{\psi(\bar{\theta}_0{}^{(2)})(1-\Psi(a_2)) + \rho\psi(\bar{\theta}_1{}^{(2)})(1-\Psi(b_2))\}\right], \\ \tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 + \dfrac{\sqrt{\hat{v}_{11}}}{\nu(s)}\left[\{\psi(\bar{\theta}_1{}^{(1)})(1-\Psi(b_1)) + \rho\psi(\bar{\theta}_0{}^{(1)})(1-\Psi(a_1))\}\right. \\ \qquad \left. -\{\psi(\bar{\theta}_1{}^{(2)})(1-\Psi(b_2)) + \rho\psi(\bar{\theta}_0{}^{(2)})(1-\Psi(a_2))\}\right]. \end{cases}$$

共分散マトリックス $\tilde{V}$ も同様にしてえられるが，ここではその記述を略す．

さて，以上の準備のもとに，Theorem 5.1，5.2 [5] をこの問題に適用すると，ベイズ決定方式 $\hat{\phi}_{\xi^*}$ について次の結果をえる：

定理 3.1

制約条件 (3.5)，(3.6) のもとでベイズ危険 (3.7) を最小にするベイズ決定方式 $\hat{\phi}_{\xi^*}$ は存在する．さらに，(3.5)，(3.6) を満たすある決定方式 $\hat{\phi}^0$ がベイズ決定方式となるための必要十分条件は，s のある (Borel-可測) 関数 $\tilde{h}_1$，$\tilde{h}_2$ があって $\hat{\phi}^0$ が次式を満たすことである．

$$(3.17)\quad \hat{\phi}^0(x, s) = \begin{cases} 1 & (\tilde{x}_1(s) < x < \tilde{x}_2(s)), \\ 0 & (x_1 < \tilde{x}_1(s) \text{ もしくは } x > \tilde{x}_2(s)). \end{cases}$$

ただし $\tilde{x}_1(s)$，$\tilde{x}_2(s)$ は二次方程式

$$(3.18)\quad \begin{aligned} \tilde{\zeta}(x, s) \rightleftarrows\ & \sigma^2 + (\tilde{\theta}_0(s) + \tilde{\theta}_1(s)x - \alpha_2)^2 \\ & + \tilde{v}_{00}(s) + 2\tilde{v}_{01}(s)x + \tilde{v}_{11}(s)x^2 - \tilde{h}_1(s) - \tilde{h}_2(s)x \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

の二実根であり，$\tilde{h}_1$，$\tilde{h}_2$ はすべての $\theta \in \Theta$ について

$$(3.19)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}[\Psi(\tilde{x}_2(s)) - \Psi(x_1(s))]f_\theta{}^n(s)\,ds = 1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left[\theta_0 + \dfrac{\theta_1}{\alpha_1}\{\psi(\tilde{x}_1(s)) - \psi(\tilde{x}_2(s))\}\right]f_\theta{}^n(s)\,ds \\ \qquad = \alpha_2 + \beta_n(\theta) \end{cases}$$

を満たすものとして与えられる．

4. 結　　論

定理 2.1 と定理 3.1 において表わされている $\phi_{\hat{\theta}}{}^*$ と $\hat{\phi}_{\xi^*}$ との形を比較すれば（すなわち $\zeta(x, \hat{\theta})$ が $\tilde{\zeta}(x, s)$ に一致しないことをみるならば)，あきらかに $\phi_{\hat{\theta}}{}^*$ はベイズ決定方式になりえないことがわかる．

謝　辞

本論文の研究は，林知己夫氏の勧めによって着手された．ここに著者より，氏にあつく感謝のことばをのべる．また，第1節の中でのべているように，赤池弘次氏や柳本武美氏をはじめ，本論文の研究の動機となった質問を呈してくださった方々に，あつく感謝のことばをのべる．さらに，本論文を詳細に検討しコメントを呈された審査員に，あつく感謝のことばをのべる．とくに命題 2.1 はそのコメントに負うものであり，論文の全体もその関係で再構成された．

参　考　文　献

[1] Cochran, W.G. (1951) Improvement by means of selection, *Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, 449–470.

[2] Raj, D. (1954) On optimum selections from multivariate populations, *Sankhyā*, Ser. A, **14**, 363–366.

[3] 宮沢光一 (1971) 情報・決定理論序説，岩波書店.

[4] Johnson, N.L. and Kotz, S. (1972) *Distributions in Statistics, Continuous Multivariate Distributions*, John Wiley, New York.

[5] Noda, K. (1978) Estimation of an optimum selection of a subpopulation on the basis of supplementary information, *Reserch Memo*. No. 124, The Institute of Statistical Mathematics.