Sylvester の 問 題

琉球大学 前 原 潤

(1978年2月 受付)

On Sylvester's Problem

Hiroshi Maehara
(Ryukyu University)

In this note we find the followings. (i) The probability P that four points, distributed independently in the plane according to a bivariate normal distribution, form a convex quadrilateral; $P=6\arcsin(1/3)\pi$. (ii) The probabilities that the shape of convex hull of random five points in the plane, is a triangle, a quadrilateral, and a pentagon, when five points are distributed uniformly in a circle (by (1)), in a rectangle (by (2)), and in a triangle (by (3)).

幾何確率の問題に Sylvester の問題というのがある [1]. 平面内の有界な凸領域 Γ 上で一様に分布する点を独立に4個とるとき,「4点が凸四辺形を作る確率 P」(これを Sylvester の確率と呼ぶことにしよう) を求めよという問題である. この確率は凸領域の形 (アフィン変換の範囲での) によって変るのである.

例えば,

円の場合	$P=1-35/(12\pi^2)$	$=0.7045$
長方形	$25/36$	$=0.6944$
3角形	$2/3$	$=0.6667$

となっている [1].

このノートでは, 2次元正規分布における Sylvester の確率と, 一様分布をする5点の凸包 (convex hull) の形の分布について 調べる. 2次元正規分布に 従う 4 点を 独立にとるときこれらが凸四辺形を作る確率 P は

$$P=6\arcsin\frac{1}{3}/\pi=0.6490$$

凸領域 Γ 上の一様分布をする独立な5点をとるとき, これらの張る凸包が, 3角形, 4角形, 5角形となる確率は

(1) Γ が円のとき

$$15/16\pi^2=0.09 \quad , \quad 65/12\pi^2=0.55 \quad , \quad 1-305/48\pi^2=0.36$$

(2) 長方形のとき

$$15/144=0.10 \quad , \quad 80/144=0.56 \quad , \quad 49/144=0.34$$

(3) 3角形のとき

$$5/36=0.14 \quad , \quad 20/36=0.56 \quad , \quad 11/36=0.31$$

1. 2次元正規分布における Sylvester の問題

2次元正規分布に従う4点を独立にとるとき, この4点が凸四辺形の頂点と なっている確率 P を求めよう. 平面内の凸図形はアフィン変換でやはり凸図形に移るから, P を求めるには,

2次元正規分布として，密度関数が

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

となるものを考えればよい．以後，いくつかの点をとると言えば，この分布に従う点をいくつか独立にとることを意味するものとする．3点 A, B, C をとり，各点対を通る直線をひき，図1のように，各領域に名前をつける．領域 U_1, U_2, U_3, U_4, V_1, V_2, V_3 のもつ確率をそれぞれ，u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3 とする．勿論これらは確率変数で，対称性から，明らかに

$$E(u_1)=E(u_2)=E(u_3)\quad (=\bar{u}\text{ とおく})$$
$$E(v_1)=E(v_2)=E(v_3)\quad (=\bar{v}\text{ とおく})$$

である．第4の点 D をとって考えると，

$$\Pr(D\in U_1)=\Pr(A\in\Delta BCD)=\Pr(D\in\Delta ABC)$$

となるから，やはり $E(u_4)=\bar{u}$ であることがわかる．また4点 A, B, C, D が凸四辺形を作る確率 P は

$$P=\Pr(D\in V_1)+\Pr(D\in V_2)+\Pr(D\in V_3)=3\bar{v}$$

となっている．A, B を通る直線は平面を2分するが，C の入る側を W, W のもつ確率を w とすると，

$$E(w)=2\bar{u}+2\bar{v}$$
$$1-E(w)=2\bar{u}+\bar{v}$$

従って

$$\bar{v}=2E(w)-1$$

直線 AB を A から B に向って進むとき，右側の半平面を R, R のもつ確率を r とすると，

$$E(w|r)=r\cdot\Pr(C\in R)+(1-r)\Pr(C\notin R)$$
$$=2r^2+1-2r$$

期待値は，条件付期待値の期待値に等しく，また $E(r)=1/2$ だから，

$$E(w)=2E(r^2)$$

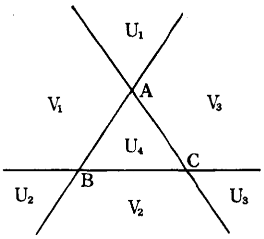

図1

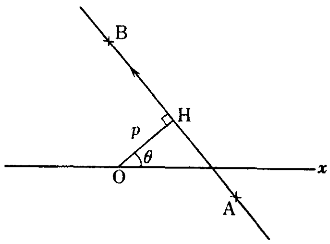

図2

$E(r^2)$ を計算しよう．2点 A, B の座標を (x_1,y_1), (x_2,y_2)，原点 O（分布の中心）から直線 AB におろした垂線の足を H, OH の長さを p, $\overrightarrow{OH}$ が x 軸となす角を θ とする（図2）．直線 AB に A から B に向う向きをつけ，有向線分 HA, HB の長さを，それぞれ，a, b とする．x_1, y_1, x_2, y_2 を p, θ, a, b に変数変換して $E(r^2)$ を求めようというのである（[2] 参照）．

$$x_1=p\cos\theta-a\sin\theta$$
$$y_1=p\sin\theta+a\cos\theta$$

であるから

$$dx_1 \wedge dy_1 = dp \wedge da + pdp \wedge d\theta - ad\theta \wedge da$$

（∧ は外積の記号）．　同様に

$$dx_2 \wedge dy_2 = dp \wedge db + pdp \wedge d\theta - bd\theta \wedge db$$

となり，結局

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 = (b-a)\, da \wedge db \wedge dp \wedge d\,\theta$$

となる．また

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2 = 2p^2 + a^2 + b^2$$

に注意して

$$\mathrm{E}(r^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1{}^2 + y_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2)\right\} dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\, d\,\theta \int_0^{\infty} r^2 e^{-p^2}\, dp \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |a-b| \left(\frac{1}{2\pi}\right) e^{-\frac{a^2+b^2}{2}}\, da\, db$$

ところが R が 0 を含むとき

$$r = \int_{-\infty}^{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \quad (= \Phi(p) \text{ とおく})$$

で，R が 0 を含まないときは

$$r = \Phi(-p)$$

であるから，

$$E(r^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p)^2 e^{-p^2}\, dp \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |a-b| \left(\frac{1}{2\pi}\right) e^{-\frac{a^2+b^2}{2}}\, da\, db$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p)^2 e^{-p^2}\, dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \int_{-\frac{t}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \int_{-\frac{t}{\sqrt{2}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

ここで

$$z_1 = x + \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = y + \frac{t}{\sqrt{2}}$$

とおく．t, x, y が独立に標準正規分布をする確率変数と思えば，z_1, z_2 は，平均 0，分散 1＋1/2，共分散 1/2 の 2 次元正規分布をする．そして上の積分は，z_1, z_2 の同時密度の第 1 象限 ($z_1 \geqq 0$, $z_2 \geqq 0$) での積分に等しい．その積分は，[3]，p. 351 に巧妙に計算されていて

$$\frac{1}{4} + \left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\Big/(2\pi)$$

となる．従って

$$\mathrm{E}(\omega) = 2\,\mathrm{E}(r^2) = \frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{3}\Big/\pi$$

また

$$\mathrm{P} = 3\bar{v} = 3(2\,\mathrm{E}(\omega) - 1)$$

だったから，結局

定理. 2次元正規分布における Sylvester の確率

$$\mathrm{P} = 6\arcsin\frac{1}{3}\Big/\pi = 0.6490\cdots$$

2. ランダム完全グラフの交差数

2次元の分布 $F(x, y)$ に従う独立な n 個の点をとりそれらの各対を線分で結んだ図形を，位数 n の (F) ランダム完全グラフと呼ぶことにしよう．交差している線分の対の個数を交差数といい $x(n)$ で表す．分布 F における Sylvester の確率を P とする．4点 A, B, C, D の作るランダム完全グラフの交差数を特に $x(\mathrm{ABCD})$ で表すことにする．$x(\mathrm{ABCD})=1$ または0で，1となるのは A, B, C, D が，凸四辺形を作るときに限るから，

$$\mathrm{E}x(\mathrm{ABCD}) = \mathrm{P}$$

また位数3以下のランダム完全グラフの交差数は0だから

$$x(n) = \sum x(\mathrm{ABCD})$$

（和は4点の組 {A, B, C, D} のすべてについて）となることがわかる．従って

$$\mathrm{E}x(n) = \binom{n}{4}\mathrm{P}$$

3. 5点の問題

2次元の分布 $F(x_1, x_2)$ における分散共分散行列を Σ，この分布に従う独立な3点の作る3角形の面積を S とすると，

定理 $\mathrm{E}(S^2) = \dfrac{3}{2}\det\Sigma$

証明 (Wilks [4] 参照) 3点 A, B, C, の座標を (x_{1i}, x_{2i})，$i=0, 1, 2$ とする．[4] の記号に従って，

$$_2S_{x_0,2} = \begin{vmatrix} (x_{11}-x_{10}) & (x_{21}-x_{20}) \\ (x_{12}-x_{10}) & (x_{22}-x_{20}) \end{vmatrix}^2$$

$$\Sigma = (\sigma_{ij}) \ , \ \Sigma^{-1} = (\sigma^{ij})$$

とおくと

$$\mathrm{E}(_2S_{x_0,2}) = 2\cdot\binom{2}{2}|\sigma_{ij}|\left[1 + \sum_{i,j=1}^{2}\sigma^{ij}(\mu_i - x_{i0})(\mu_j - x_{j0})\right]$$

となる（[4] p. 545 の (18.1.17) 式）．ここで期待値は点 B, C に関するものである．$_2S_{x_0,2}=4S^2$ に注意して上の式をさらに点 A について平均すれば

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i,j=1}^{2}\sigma^{ij}(\mu_i - x_{i0})(\mu_j - x_{j0})\right) = \sum_{i,j}^{2}\sigma^{ij}\sigma_{ij} = 2$$

だから

$$\mathrm{E}(S^2) = \frac{3}{2}\det\Sigma$$

いくつかの場合 $\mathrm{E}(S^2)$ を求めておく．

(i) 単位円内の一様分布のとき

$$\mathrm{E}(S^2) = \frac{3}{2}\begin{vmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{vmatrix} = \frac{3}{32}$$

(ii)　面積 1 の正方形内の一様分布のとき

$$\mathrm{E}(S^2)=\frac{3}{2}\begin{vmatrix}1/12 & 0\\ 0 & 1/12\end{vmatrix}=\frac{1}{96}$$

(iii)　面積 1/2 の直角 2 等辺 3 角形内の一様分布のとき

$$\mathrm{E}(S^2)=\frac{3}{2}\begin{vmatrix}1/18 & -1/36\\ -1/36 & 1/18\end{vmatrix}=\frac{1}{288}$$

さて分布 F に従う 5 点をとるとき，その凸包 (convex hull) が 3 角形，4 角形，5 角形となる確率を考えよう．この確率は確率変数にアフィン変換を行っても変らないことに注意．まず，3 角形となる確率は，5 点 A, B, C, D, E のうち，2 点が他の 3 点の作る 3 角形の中にある確率

$$\binom{5}{2}\mathrm{Pr}(\mathrm{A},\ \mathrm{B}\in\varDelta\,\mathrm{CDE})$$

に等しい．$\varDelta$CDE の面積を S, S の密度を $f(s)$ とすれば，

$$\mathrm{Pr}(\mathrm{A},\ \mathrm{B}\in\varDelta\,\mathrm{CDE})=\int\mathrm{Pr}(\mathrm{A},\ \mathrm{B}\in\varDelta\,\mathrm{CDE}\,|\,S=s)\,f(s)\,ds$$

分布 F が凸領域 Γ 上の一様分布なら

$$=\frac{1}{(\Gamma\ \text{の面積})^2}\int s^2 f(s)\,ds=\frac{\mathrm{E}(S^2)}{(\Gamma\ \text{の面積})^2}$$

従って 5 点の凸包が 3 角形となる確率は，先程のアフィン変換を行っても変りがないという注意を思い出して，上の (i)，(ii)，(iii) から，

(i)　Γ が楕円のとき　　$30/32\pi^2$
(ii)　　平行四辺形のとき　　10/96
(iii)　　3 角形のとき　　10/72

独立に分布する 5 点の各対を線分で結んだときの交差数 $x(5)$ の平均は 5 P (P は Sylvester の確率) に等しい (2 節)．また図 3 をみればすぐわかるように，5 点の凸包が 3 角形のとき，$x(5)=1$，4 角形のとき $x(5)=3$，5 角形のとき $x(5)=5$ である．

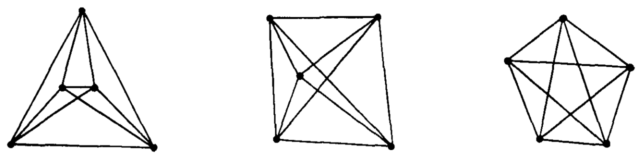

図 3

$\mathrm{Pr}(x(5)=i)=p_i$ $(i=1,3,5)$　とすれば，

$$p_1+3p_3+5p_5=\mathrm{E}x(5)=5\,\mathrm{P}$$
$$p_1+p_3+p_5=1$$

これから

$$p_3=\frac{5}{2}(1-\mathrm{P})-2p_1$$

$$p_5=\frac{1}{2}(5\,\mathrm{P}-3)+p_1$$

Γ が円，平行四辺形，3 角形のとき P は，それぞれ

$$1-35/(12\pi^2)\ ,\quad 25/36\ ,\quad 2/3$$

で [1], p_1 は上に求めてあるから,

定理 凸領域 Γ 内で一様, 独立に分布する5点の凸包が, 3角形, 4角形, 5角形となる確率は, それぞれ

(1) Γ が楕円のとき

$$15/16\pi^2=0.09\ ,\quad 65/12\pi^2=0.55\ ,\quad 1-305/48\pi^2=0.36$$

(2) 平行4辺形のとき

$$15/144=0.10\ ,\quad 80/144=0.56\ ,\quad 49/144=0.34$$

(3) 3角形のとき

$$5/36=0.14\ ,\quad 20/36=0.56\ ,\quad 11/36=0.31$$

参 考 文 献

[1] Kendall, M.G. and Moran, P.A.P. (1962) *Geometrical Probability*, Griffin, London.
[2] 栗田 稔 (1956) 積分幾何学, 共立出版.
[3] Kendall, M.G. and Stuart, A.S. (1968) *Advanced Theory of Statistics*, Griffin, London.
[4] Wilks, S.S. (1963) *Mathematical Statistics*, Wiley, New York.