正規母集団からの打ち切り標本による信頼区間について

弘前大学　二ツ矢　昌　夫*
統計数理研究所　高　橋　宏　一

(1977年5月　受付)

Comparative Monte-Carlo Studies on Confidence Intervals of the Mean and Standard Deviation of a Normal Distribution from Censored Samples

Masao Futatsuya
(Hirosaki University)

Koiti Takahasi
(The Institute of Statistical Mathematics)

Five kinds of confidence intervals of the mean and three kinds of confidence intervals of the standard deviation of a normal distribution from type I and type II censored samples are compared by the Monte-Carlo method. Two of confidence intervals of the mean are based on the maximum likelihood estimator, other two are based on the linear unbiased estimator and the last one is the confidence interval proposed by Halperin [6].

Main conclusion is that for the mean the ML-T intervals and the LU-T intervals seem to be practicable in the case of type I and in the case of type II, respectively.

1. まえがき

正規母集団における打ち切り標本にもとずく信頼区間としては，大標本のときについて村上・新保 [8] が述べているような最尤推定量から作る方法や，小標本のときに Halperin [6], [7] が述べている方法などがある．また最尤推定量や最良線型不偏推定量およびそれらの標準誤差を使って信頼区間を作るときに，標準誤差に乗じる係数を t 分布を用いてきめる方法などが考えられる．

小標本の場合でも最尤推定量などの精密な標本分布を理論的に求めて，信頼区間を作ることはほとんど期待できない．そこでわれわれは，標本の大きさ n が 10, 20, 30, 50, 100 の場合について，いくつかの考えられる簡便法的な信頼区間の性質を，いかなる場合にどの信頼区間が実用に適するかという面からモンテカルロ法によって検討した．なお，Halperin [7] には Halperin [6] で提案した信頼区間の小標本的性質を数値的に検討したことが述べられているが，具体的結果は掲載されていない．

2. 信頼区間の構成

平均 μ, 標準偏差 σ の正規母集団から大きさ n の標本をとるものとする．いま，次の２つの

*) この研究は著者の＊が昭和51年度内地研究員として統計数理研究所に滞在したときに行なわれたものである．

場合を考える：

(i) このうち，ある与えられた値 x_0 以下のものだけが観測され，x_0 より大きいものはその個数だけが知られるものとする．

(ii) 小さい方から k 個 (k はあらかじめ与えられている) だけが観測され，残り $(n-k)$ 個は観測されないものとする．

従来の習慣に従って，これらの場合を右側打ち切り標本といい，(i) の場合を第 I 型，(ii) の場合を第 II 型ということにする．左側打ち切り標本も同じようにとり扱えるのでここでは右側打ち切り標本についてのみ述べることにする．

測定値を $x=(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，これを小さい方から並べたものを $\tilde{x}=(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(k)})$ とし，それぞれに対応する確率変数を $X=(X_1, X_2, \cdots, X_k)$，$\tilde{X}=(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(k)})$ で表わすことにする．また，$\phi(x)$，$\Phi(x)$ はそれぞれ標準正規分布の密度関数，分布関数とする．

〔イ〕 最尤推定量を用いる方法

第 I 型のとき，尤度関数 L は次式で与えられる：

$$L=\frac{n!}{k!(n-k)!}(1-\Phi(\xi))^{n-k}(2\pi\sigma^2)^{-k/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2\right\}$$

ただし，$\xi=(x_0-\mu)/\sigma$ とする．

μ, σ の最尤推定量 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ およびその漸近分散 $\sigma^2\mu_{11}(\xi)/n$, $\sigma^2\mu_{22}(\xi)/n$ は Hald [5], Cohen [1], [2], David [3] などに与えられている．ここで $\mu_{11}(\xi)$, $\mu_{22}(\xi)$ は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix}\mu_{11}(\xi), & \mu_{12}(\xi)\\ \mu_{12}(\xi), & \mu_{22}(\xi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(\xi), & \varphi_{12}(\xi)\\ \varphi_{12}(\xi), & \varphi_{22}(\xi)\end{pmatrix}^{-1}$$

ただし，$Z(\xi)=\phi(\xi)/(1-\Phi(\xi))$ とおくとき

$$\varphi_{11}(\xi)=\Phi(\xi)+\phi(\xi)(Z(\xi)-\xi)$$
$$\varphi_{12}(\xi)=-\phi(\xi)+\xi\phi(\xi)(Z(\xi)-\xi)$$
$$\varphi_{22}(\xi)=2\Phi(\xi)+\xi\varphi_{12}(\xi)$$

である．これらを使って μ と σ に対する漸近的に信頼係数 α をもつ信頼区間は次のように与えられる：

$$\hat{\mu}-c(\alpha)\sqrt{\frac{\mu_{11}(\hat{\xi})}{n}}\,\hat{\sigma}\leqq\mu\leqq\hat{\mu}+c(\alpha)\sqrt{\frac{\mu_{11}(\hat{\xi})}{n}}\,\hat{\sigma} \tag{1}$$

$$\frac{\hat{\sigma}}{1+c(\alpha)\sqrt{\dfrac{\mu_{22}(\hat{\xi})}{n}}}\leqq\sigma\leqq\frac{\hat{\sigma}}{1-c(\alpha)\sqrt{\dfrac{\mu_{22}(\hat{\xi})}{n}}} \tag{2}$$

ただし，$c(\alpha)=\Phi^{-1}((1+\alpha)/2)$，$\hat{\xi}=(x_0-\hat{\mu})/\hat{\sigma}$ ($k=n$ のときは $\hat{\xi}=\infty$) とする．ここで，(2) の上限の分母が 0 あるいは負になるときは，上限の値は $+\infty$ とする．また $k=0$ のときは μ, σ の信頼区間はそれぞれ無限区間 $(-\infty, \infty)$, $[0, \infty)$ としておく．

第 II 型のとき，尤度関数 L は次式で与えられる：

$$L=\frac{n!}{(n-k)!}\left(1-\Phi\left(\frac{x_{(k)}-\mu}{\sigma}\right)\right)^{n-k}(2\pi\sigma^2)^{-k/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{k}(x_{(i)}-\mu)^2\right\}$$

$k\geqq2$ のとき最尤推定量 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ およびその漸近分散が $k/n\to p\,(n\to\infty)$ のとき $\sigma^2\mu_{11}(\Phi^{-1}(p))/n$, $\sigma^2\mu_{22}(\Phi^{-1}(p))/n$ であることは Gupta[4], Cohen [1], [2], David [3] などに述べられている．μ, σ に対する漸近的に信頼係数 α をもつ信頼区間は (1), (2) における $\mu_{11}(\hat{\xi})$, $\mu_{22}(\hat{\xi})$ をそれぞれ $\mu_{11}(\Phi^{-1}(k/n))$, $\mu_{22}(\Phi^{-1}(k/n))$ とおいたもので与えられる：

$$\hat{\mu} - c(\alpha)\sqrt{\frac{\mu_{11}(\Phi^{-1}(k/n))}{n}}\,\hat{\sigma} \leqq \mu \leqq \hat{\mu} + c(\alpha)\sqrt{\frac{\mu_{11}(\Phi^{-1}(k/n))}{n}}\,\hat{\sigma} \tag{3}$$

$$\frac{\hat{\sigma}}{1 + c(\alpha)\sqrt{\dfrac{\mu_{22}(\Phi^{-1}(k/n))}{n}}} \leqq \sigma \leqq \frac{\hat{\sigma}}{1 - c(\alpha)\sqrt{\dfrac{\mu_{22}(\Phi^{-1}(k/n))}{n}}} \tag{4}$$

以上の方法による信頼区間 (1), (2), (3), (4) を以下簡単のため ML 区間とよぶことにする．

次に (1), (3) における $c(\alpha)$ を自由度 $(k-1)$ の t 分布の上側 $(1-\alpha)/2$ 分点 ($c_{k-1}(\alpha)$ と書くことにする) によっておきかえ，$\hat{\sigma}$ を $\sqrt{k/(k-1)}\,\hat{\sigma}$ ($k=1$ のときは便宜的に $k=2$ として扱う) でおきかえて得られる区間を以下簡単のため ML-T 区間とよぶことにする．すなわち μ の ML-T 区間は第 I 型のとき，

$$\hat{\mu} - c_{k-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\mu_{11}(\hat{\xi})}{n}}\sqrt{\frac{k}{k-1}}\,\hat{\sigma} \leqq \mu \leqq \hat{\mu} + c_{k-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\mu_{11}(\hat{\xi})}{n}}\sqrt{\frac{k}{k-1}}\,\hat{\sigma} \tag{5}$$

第 II 型のとき

$$\hat{\mu} - c_{k-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\mu_{11}(\Phi^{-1}(k/n))}{n}}\sqrt{\frac{k}{k-1}}\,\hat{\sigma} \leqq \mu \leqq \hat{\mu} + c_{k-1}(\alpha)\sqrt{\frac{\mu_{11}(\Phi^{-1}(k/n))}{n}}\sqrt{\frac{k}{k-1}}\,\hat{\sigma} \tag{6}$$

である．

〔ロ〕 最良線型不偏推定量を用いる方法

第 II 型のとき，$k\geqq2$ に対して Sarhan and Greenberg [9] は μ, σ の最良線型不偏推定量 μ^*, σ^* およびその分散 $c(n,k)\sigma^2$, $d(n,k)\sigma^2$ を 20以下の n に対して与えている．これらを用いて (3), (4) に対応する μ, σ の信頼区間を次のように作る：

$$\mu^* - c(\alpha)\sqrt{c(n,k)}\;\sigma^* \leqq \mu \leqq \mu^* + c(\alpha)\sqrt{c(n,k)}\;\sigma^* \tag{7}$$

$$\frac{\sigma^*}{1 + c(\alpha)\sqrt{d(n,k)}} \leqq \sigma \leqq \frac{\sigma^*}{1 - c(\alpha)\sqrt{d(n,k)}} \tag{8}$$

ただし (8) の上限の分母が 0 あるいは負になるときは上限を $+\infty$ とする．

第 I 型のとき，測定値 $\tilde{x}$ を第 II 型の測定値のようにみなして，上と同じ区間を作る（理論的な根拠はなく一つの試みである）．(7), (8) およびこれらの区間を簡単のため LU 区間とよぶことにする．また，(5), (6) の $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ を μ^*, σ^* で，(5) の $\mu_{11}(\hat{\xi})/n$ と (6) の $\mu_{11}(\Phi^{-1}(k/n))/n$ をともに $c(n,k)$ でおきかえて得られる区間を簡単のため LU-T 区間とよぶことにする．

〔ハ〕 Halperin [6] による方法

第 I 型のとき，まず最初に大きさ n の標本中の測定値の個数 $k(\neq 0)$ と信頼係数 α から，Φ_U, Φ_L, r, s, δ_0 を順次次のように定める．測定値の個数 k に対応する確率変数を K とすれば，K は試行回数 n, 生起確率 $\Phi_{x_0} \equiv \Phi((x_0-\mu)/\sigma)$ の二項分布に従うから，通常の方法により $K=k$ のとき Φ_{x_0} に対する信頼係数 $\alpha^{1/2}$ をもつ信頼区間を求めることができる．その上限，下限をそれぞれ Φ_U, Φ_L とする．また $K=k$ ($k\geqq1$ とする) のもとで X の条件付き分布は打ち切り点 x_0 をもつ裁断分布，つまり $F(x)=\Phi((x-\mu)/\sigma)/\Phi((x_0-\mu)/\sigma)$, からの大きさ k の標本の分布と一致する．したがって，$U_{(1)}=F(X_{(1)})$, $U_{(2)}=F(X_{(2)})$, $\cdots$, $U_{(k)}=F(X_{(k)})$ は (0, 1) 上の一様分布からの大きさ k の順序統計量になる．また，便宜上 $U_{(0)}=0$, $U_{(k+1)}=1$ とする．ここで $0\leqq s'\leqq r'\leqq k+1$ として，次の不等式を考える：

$$Pr(U_{(s')} \leqq \delta \leqq U_{(r')} \mid K=k) \geqq \alpha^{1/2} \tag{9}$$

ここで左辺は $\sum_{j=s'}^{r'-1}\binom{k}{j}\delta^j(1-\delta)^{k-j}$ に等しい．まず $\delta=1/2$ として，3つの場合にわけて s, r をきめる．

(a) $s'=k-r'+1$ として，(9) をみたす $r'(\neq k+1)$ が存在する場合：
このとき，(9) をみたす最小の r' を r, $k-r+1$ を s とする．

(b) (a) が成立せず，$s'=1$, $r'=k+1$ で (9) が成立する場合：
このとき $s=1$, $r=k+1$ とする．

(c) その他の場合：
このとき $s=0$, $r=k$ とする．

次に $s'=s$, $r'=r$ として，(9) が等号となる $0\leqq\delta\leqq1/2$ の範囲の δ を δ_0 とする．

与えられた α, k に対して，上のようにしてきめられた Φ_L, Φ_U, δ_0, s, r を使って信頼区間を作る．便宜上，$x_{(0)}=-\infty$, $x_{(k+1)}=x_0$ とする．まず μ に対する信頼区間は，次のように3つの場合にわけて与えられる．ただし R_U, R_L は

$$R_U=\frac{\Phi^{-1}(\Phi_U)}{\Phi^{-1}(\Phi_U)-\Phi^{-1}(\delta_0\Phi_U)}$$

$$R_L=\frac{\Phi^{-1}(\Phi_L)}{\Phi^{-1}(\Phi_L)-\Phi^{-1}(\delta_0\Phi_L)}$$

で，$\Phi_U=1$ のとき $R_U=1$ とする．

〔A〕 $\Phi_L\geqq1/2$ の場合：

$$x_0-(x_0-x_{(s)})R_U\leqq\mu\leqq x_0-(x_0-x_{(r)})R_L \tag{10}$$

〔B〕 $\Phi_U<1/2$ の場合：

$$x_0-(x_0-x_{(r)})R_U\leqq\mu\leqq x_0-(x_0-x_{(s)})R_L \tag{11}$$

〔C〕 $\Phi_U\geqq1/2$, $\Phi_L<1/2$ の場合：

$$x_0-(x_0-x_{(s)})R_U\leqq\mu\leqq x_0-(x_0-x_{(s)})R_L \tag{12}$$

次に σ に対する信頼区間は次のように与えられる．

$$\frac{x_0-x_{(r)}}{\Phi^{-1}(\Phi_U)-\Phi^{-1}(\delta_0\Phi_U)}\leqq\sigma\leqq\frac{x_0-x_{(s)}}{\Phi^{-1}(\Phi_L)-\Phi^{-1}(\delta_0\Phi_L)} \tag{13}$$

ただし，$\Phi_U=1$ のときは下限を0とする．

第II型の場合の μ および σ に対する信頼区間は，第I型の場合の x_0 を $x_{(k)}$, k を $k-1$ として同じ方法で求めたものになる (Halperin [7] p. 295 参照)．この Halperin [6] の方法による信頼区間を以下簡単のため H 区間とよぶことにする．

なお，以上の方法で信頼区間が定義されない場合がある．第I型のときには $k=0$ の場合である．この場合は，全区間にしておく．すなわち μ に対しては $(-\infty, \infty)$, σ に対しては $[0, \infty)$ とする．第II型については，$k=1$ の場合であるが，この場合は考察の対象から除外することにする．

3. 問題点の提起

与えられた信頼水準を満足することが証明されている H 区間（ただし，無限区間がある）とちがって，ML, ML-T, LU, LU-T 区間は，最尤推定量や線型不偏推定量の漸近正規性を拠り所に構成されているから，標本の大きさがそれほど大きくない場合に信頼係数が実際はどうなっているかがまず第一の問題点である．（もし，ML 区間や LU 区間で信頼水準を満足することが保証されていれば ML-T 区間や，LU-T 区間を使用する必要がないことはいうまで

もないことである.)

一方, H 区間は, μ, σ に対する信頼水準 α の同時信頼領域として導入されたものである. 信頼水準 α を満足することが保証されてはいても, 単独に μ の信頼区間, あるいは σ の信頼区間として使用すると, 実際に母数を含む区間の割合が α より大きくなりすぎ, したがって区間の長さが必要以上に長くなり実用にそぐわないのではないかという心配が残る. これが第二の問題点である.

次に, 信頼水準を満足することが保証されているとしても, 実際に作られる区間は無限区間のこともあって, 無限区間がどんな時にどんな割合で現われるかが問題になる. さらに有限としても区間の平均的な長さがどのくらいなのかが問題になる. また, 母数を含まない区間がどのような特徴をもっているかも問題になる. これらが第三の問題点である.

4. μ に対する信頼区間

まず無限区間が現われる場合を調べておこう. いいかえれば, 有限区間であることが保証される場合を明らかにしておこう. ML, ML-T 区間については第 I 型の場合は $k \geqq 1$, 第 II 型の場合は $k \geqq 2$ のときは有限区間である. LU, LU-T 区間については, 第 I 型, 第 II 型ともに $k \geqq 2$ のときは, 有限区間である. H 区間については, 有限区間になるのは第 I 型の場合は 3 節の条件 (a) また (b) が成立するときに限られる. すなわち, k が

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k} > \alpha^{1/2} \tag{14}$$

をみたすときである. たとえば, $\alpha=0.9$, 0.95, 0.99 に対して, それぞれ $k \geqq 5$, 6, 8 の場合にみたされる. 第 II 型の場合には, (14) が k のかわりに $k-1$ について成立する場合に有限となる.

次に信頼係数に関して考察を行う. 一般に, μ や σ に対する信頼下限を $l(x)$, 信頼上限を $u(x)$ で表わすことにする.

4.1 第 I 型

それぞれの方法で作られる区間が信頼係数 α の信頼区間として実用に供し得るためには, 実際的に考えられる範囲の μ, σ に対して

$$Pr_{\mu,\sigma}{}^{x_0}\,(l(X) \leqq \mu \leqq u(X)) \geqq \alpha \tag{15}$$

を少なくとも近似的にみたしていなければいけない. ここで左辺の確率は $N(\mu, \sigma^2)$ からの第 I 型右側 x_0-打ち切り標本の分布における確率を意味する. このことは $Y_i=(X_i-\mu)/\sigma$, $y_0=(x_0-\mu)/\sigma$ という変換を行なうなら, 打ち切り点 y_0 に対して, 標準正規分布からの第 I 型打ち切り標本 Y が

$$Pr_{0,1}{}^{y_0}\,(l(Y) \leqq 0 \leqq u(Y)) \geqq \alpha \tag{16}$$

をみたすかどうかをみればよいことになる.

そこで, それぞれの方法について $n=10$, 20, 30, 50, 100 (ただし LU, LU-T については $n=10$, 20), $\alpha=0.90$, 0.95, 0.98, 0.99 (H については 0.98 でなく 0.80), および $\eta=0.10$, 0.25, 0.50, 0.75, 0.90 なる $y_0=\Phi^{-1}(\eta)$ のそれぞれの組合せに対して次のような事項を検討した. まず第一に (16) 式の左辺中の区間が有限区間でありかつ 0 を含む場合の生じる確率を % にしたものの推定値 $\hat{p}$ (%) を次に述べるモンテカルロ法で求めてみた. 以下, 信頼係数は, 単に区間が母数を含む場合の生じる確率でなく, 有限区間でしかも母数を含む場合の生じる確率の意味に用いられる. 合同法による一様乱数を Box-Muller の方法で変換して $\mu=0$, $\sigma=1$ の正規乱数を n 個作り, それらを用いて y_0, α の各組合せに対して, それぞれの方法に

よる信頼区間を作る．このことを1000回繰返し，その中で区間が有限な上限，下限を有し，しかも $\mu=0$ を含む場合が何回あるかを調べた．次に異なる乱数を用いて2000回の繰返しに拡張した．1000回と2000回の場合で有限な上限，下限を有し，しかも0を含む比率に有意な差はなかったので繰返し数3000回とみなして求めた比率 $\hat{p}$(%) を表1，2，3にまとめた．

表1 第I型，ML区間の $\hat{p}$ (%)

η \ n	10	20	30	50	100
0.10	(42.3) (46.5)	(66.6) (71.8)	76.8 (81.9)	84.9 89.7	90.1 94.8
0.25	(74.7) (81.2)	85.8 91.5	90.6 94.7	91.8 96.2	94.0 97.6
0.50	93.4 97.7	94.1 98.2	94.2 97.9	94.2 98.4	95.3 98.8
0.75	93.0 97.6	93.8 98.2	94.0 98.3	94.3 98.7	94.9 98.8
0.90	91.9 97.0	93.0 97.8	93.5 97.9	94.2 98.6	94.6 98.9

表2 第I型，LU区間の $\hat{p}$

η \ n	10	20
0.10	(13.5) (15.5)	(41.3) (45.2)
0.25	(52.7) (58.7)	78.5 (84.9)
0.50	86.8 (92.7)	90.7 95.2
0.75	91.9 97.2	93.1 97.7
0.90	92.9 97.6	93.2 98.0

表3 第I型，H区間の $\hat{p}$

η \ n	10	20	30	50	100
0.10	(0.0) (0.0)	(0.9) (0.0)	(7.3) (0.8)	(36.1) (11.7)	(93.5) (79.1)
0.25	(2.1) (0.0)	(38.9) (11.3)	(80.5) (48.6)	99.1 (95.3)	99.9 100.0
0.50	(37.5) (4.8)	97.8 (87.7)	98.7 99.8	98.1 99.5	98.1 99.8
0.75	(92.2) (54.0)	99.9 100.0	99.8 100.0	99.8 100.0	99.8 99.9
0.90	99.5 (93.2)	99.7 100.0	99.5 99.9	99.3 99.9	99.6 100.0

表の中の上段の数値は $\alpha=0.95$，下段は $\alpha=0.99$ としたときの $\hat{p}$ である．また，これらの表および以下の表を通じて（ ）を付した部分は無限区間の現われる確率が $1-\alpha$ 以上であること，したがって前述した意味での信頼係数が α より小さいことが理論的にわかっているところである．なお有限区間でしかも0を含む真の比率 p (%) の推定値 $\hat{p}$ には勿論モンテカルロ法による誤差があるので，その意味で p に対する信頼区間を求めなければならないが，信頼係数0.95の p に対する信頼区間は $\hat{p}=95\%$ のときおよそ $95\%\pm0.8\%$，$\hat{p}=99\%$ のとき $99\%\pm0.4\%$ である．

これらの表からわかるように，ML区間やLU区間では $c(\alpha)$ を用いたときに信頼係数（実用的に考えて有限区間でしかも μ を含む区間の生じる割合の意味で用いている）は近似的にみても（モンテカルロ法による誤差は無視して，ここでは信頼係数が $\alpha=0.95$ のときには0.94以上，$\alpha=0.99$ のときには0.98以上であることを目安にする），$n=10$ の場合や，$\eta\leqq0.25$ の場合には α 以上であることが保証されているとはいえない．しかも全般的に α より信頼係数が小さい傾向が見られる．そこでこれらの区間のほかに通常の t 分布を用いて作る信頼区間のアナロジーであるML-T，LU-T区間を作って調べてみた．方法は前と同じであるが繰返し数は2000回で，ML，LUのときに用いたものと同じ乱数を使用した．それらの結果を表4，5にまとめた．p に対する信頼係数0.95をもつ信頼区間は実験回数が2000回なので $\hat{p}=95\%$ のとき $95\%\pm1.0\%$，$\hat{p}=99\%$ のとき $99\%\pm0.4\%$ である．

表 4 第 I 型, ML-T 区間の $\hat{p}$

η ＼ n	10	20	30	50	100
0.10	(62.9) (65.7)	(81.4) (85.7)	90.4 (94.7)	92.2 96.8	93.9 97.9
0.25	(89.9) (93.5)	92.3 96.8	93.6 97.4	94.0 98.2	95.0 98.1
0.50	97.3 99.4	96.4 99.0	95.7 99.2	96.0 99.2	96.1 99.2
0.75	97.3 99.3	96.4 99.4	96.0 99.1	95.7 99.4	95.7 99.4
0.90	96.3 99.1	95.6 99.2	95.5 98.8	95.6 99.2	95.5 99.3

表 5 第 I 型, LU-T 区間の $\hat{p}$

η ＼ n	10	20
0.10	(22.9) (25.8)	(55.1) (60.0)
0.25	(69.5) (74.1)	86.4 (93.0)
0.50	94.0 (97.9)	93.0 98.0
0.75	96.6 99.6	95.9 99.1
0.90	96.8 99.5	95.5 99.4

表 6 第 I 型, ML-T 区間の長さの平均値

η ＼ n	10	20	30	50	100
0.25				1.40 2.02 [10]	0.86 1.17 [23]
0.50	4.24 13.27 [3]	1.38 2.02 [10]	1.03 1.43 [16]	0.74 1.01 [30]	0.50 0.67 [63]
0.75	1.76 2.81 [7]	1.03 1.44 [16]	0.81 1.10 [25]	0.61 0.81 [44]	0.42 0.56 [90]
0.90	1.50 2.20 [9]	0.96 1.32 [19]	0.76 1.03 [28]	0.58 0.77 [47]	0.40 0.53 [100]

表 7 第 I 型, LU-T 区間の長さの平均値

η ＼ n	10	20
0.75	1.78 2.78 [7]	1.02 1.41 [16]
0.90	1.54 2.26 [9]	0.96 1.32 [19]

表 8 第 I 型, H 区間の長さの平均値

η ＼ n	10	20	30	50	100
0.10					4.29 [3]
0.25				2.82 [4]	1.76 [7] 2.39 [8]
0.50		2.78 [4]	2.00 [6] 2.95 [6]	1.33 [11] 1.88 [11]	0.81 [25] 1.10 [25]
0.75		1.77 [7] 2.49 [8]	1.34 [11] 1.77 [12]	1.01 [17] 1.27 [20]	0.72 [31] 0.89 [37]
0.90	2.64 [4]	1.71 [7] 2.12 [9]	1.37 [10] 1.71 [12]	1.06 [16] 1.31 [19]	0.74 [30] 0.92 [34]

表4より ML-T 区間では $\eta=0.1$, および $\eta=0.25$ の $n\leqq 30$ の場合を除くと信頼水準は近似的に保証されているといえる. また, $\eta\geqq 0.5$ の場合も ML 区間の表1より信頼係数が大きくなるのは当然であるが, $\alpha=0.95$, 0.99 のいずれの場合も α にくらべて大きすぎるということはなさそうである. LU-T 区間については $\eta\geqq 0.75$ の場合に信頼水準 α は保証されているといえよう.

次に ML-T および LU-T について, 信頼水準 α が近似的に保証されている場合について参考までに実験結果として得られ

た区間の長さの平均値をそれぞれ表6，表7に示す．比較のためにH区間の長さの平均値を表8に示す．いずれも上段は$\alpha=0.95$，下段は$\alpha=0.99$の場合である．また表の中の〔 〕内の数値は，正規分布における大きさmの標本からのt分布を利用する通常の母平均に対する信頼区間の長さの平均が表中の各平均値に等しくなるようにしたときのmの値である．

表中の実験的な平均値は，それぞれの場合について，信頼区間の長さの理論的期待値が有限でなければ意味はないが，われわれはまだこのことを確認できていない．

4.2 第II型

第II型の場合には，n，kが与えられたとき，任意のμ，σに対して

$$Pr_{\mu,\sigma}\,(l(X)\leqq\mu\leqq u(X))\geqq\alpha \tag{17}$$

が成立するためには，$\mu=0$，$\sigma=1$に対して成立することがいえれば十分である．実験に使う乱数や繰返し回数などは第I型のときと同じである．ML区間，LU区間，H区間についての0を含む区間の出現率はそれぞれ表9, 10, 11にまとめられている．ただしkは$n\eta$を四捨五入した値になっている．なお，第II型の場合については，無限区間の生じる確率が理論的に$(1-\alpha)$以上であることがわかっている部分は空欄にしてある．

表9 第II型，ML区間の$\hat{p}$

η \ n	10	20	30	50	100
0.10		43.7 50.5	60.8 68.6	75.0 81.0	83.7 90.7
0.25	67.0 73.3	76.2 82.5	83.6 90.2	87.5 93.1	90.7 96.1
0.50	80.7 88.0	88.7 93.7	89.4 95.1	91.9 97.2	93.6 98.6
0.75	89.9 95.4	90.8 96.8	92.6 97.5	93.7 98.5	94.8 98.7
0.90	90.0 96.2	92.3 97.4	93.1 97.8	93.5 98.4	94.4 98.8

表10 第II型，LU区間の$\hat{p}$

η \ n	10	20
0.10		73.8 78.2
0.25	83.4 88.0	87.5 91.6
0.50	88.9 93.8	91.5 96.0
0.75	92.5 97.2	92.6 97.7
0.90	93.0 97.4	93.4 98.1

第II型の場合もML区間およびLU区間は，$c(\alpha)$を用いたときに信頼水準がαであることはほとんどの組合せについて保証されているとはいえない．そこでML-T区間，LU-T区間について調べた結果が表12, 13である．

表11 第II型，H区間の$\hat{p}$

η \ n	10	20	30	50	100
0.10					99.6 100.0
0.25			99.5	99.6 99.9	99.9 100.0
0.50		99.6 100.0	99.7 100.0	99.7 100.0	99.6 99.9
0.75	99.5	98.9 100.0	99.1 99.7	99.5 99.9	99.8 100.0
0.90	98.6 99.8	99.5 99.9	99.4 99.9	99.4 99.9	99.8 99.9

第I型の場合とちがって，第II型の場合にはLU-T区間はほとんどの組合せに対して近似的に信頼水準が保証されているといえる．一方ML-T区間は第I型の場合よりも保証される組合せが減少している．

近似的に信頼水準が保証されていると考えられる場合について，区間の平均の長さを表14,

表 12　第 II 型，ML-T 区間の $\hat{p}$

η \ n	10	20	30	50	100
0.10		87.0 96.9	84.2 96.0	86.3 94.5	88.5 95.6
0.25	87.8 96.8	87.1 94.1	89.0 96.0	90.6 95.6	92.7 97.4
0.50	92.2 96.8	92.2 97.1	93.0 97.6	94.2 98.1	95.1 98.8
0.75	94.6 99.2	94.2 98.5	94.9 98.6	95.0 99.1	95.4 99.2
0.90	94.7 98.8	94.8 99.1	95.2 98.7	95.0 99.1	96.0 99.2

表 13　第 II 型，LU-T 区間の $\hat{p}$

η \ n	10	20
0.10		95.2 99.0
0.25	95.1 98.9	93.0 97.9
0.50	95.8 99.0	94.8 98.2
0.75	96.8 99.6	95.3 99.1
0.90	96.5 99.4	95.6 99.3

表 14　第 II 型，ML-T 区間の長さの平均値

η \ n	10	20	30	50	100
0.50			0.95 1.31 [19]	0.71 0.96 [32]	0.49 0.66 [65]
0.75	1.48 2.19 [9]	0.98 1.36 [18]	0.78 1.06 [27]	0.59 0.79 [46]	0.42 0.55 [90]
0.90	1.42 2.07 [10]	0.94 1.29 [19]	0.75 1.02 [29]	0.57 0.76 [49]	0.40 0.53 [100]

表 15　第 II 型，LU-T 区間の長さの平均値

η \ n	10	20
0.10		48.23 241.63 [ナシ]
0.25	6.71 15.48 [3]	3.05 5.06 [4]
0.50	2.50 4.15 [5]	1.34 1.92 [11]
0.75	1.66 2.46 [8]	1.04 1.45 [16]
0.90	1.57 2.28 [8]	0.98 1.35 [18]

表 16　第 II 型，H 区間の長さの平均値

η \ n	10	20	30	50	100
0.10					4.28 [3] 6.47 [4]
0.25			3.67 [3]	2.47 [5] 3.61 [5]	1.73 [7] 2.24 [9]
0.50		2.54 [5] 4.25 [5]	1.85 [7] 2.74 [7]	1.27 [12] 1.75 [12]	0.78 [27] 1.07 [27]
0.75	2.66 [4]	1.52 [9] 2.28 [8]	1.23 [12] 1.54 [15]	0.97 [18] 1.21 [21]	0.71 [32] 0.87 [36]
0.90	2.17 [5] 3.32 [6]	1.60 [8] 1.98 [10]	1.36 [10] 1.64 [13]	1.01 [17] 1.27 [20]	0.73 [31] 0.92 [43]

15, 16 に示す．

4.3 信頼区間が μ を含まないときの特徴

上の実験において，μ を含まない区間の個数を l，その中で $u(x)<\mu$ なる個数を m, $Q=(m/l)\times 100$ とおく．ML, ML-T, LU, LU-T 区間では，第 I 型，第 II 型ともに，$\alpha=0.95$ に対して $\eta=0.1$, 0.25 のとき $Q=100\%$，$\eta=0.5$ のとき $Q\fallingdotseq 85\sim100\%$，$\eta=0.75$ のとき $Q\fallingdotseq70\%$，$\eta=0.9$ のとき $Q\fallingdotseq60\%$ であった．このような傾向は Cohen [2] で求めら

れている$\hat{\mu}$と$\hat{\sigma}$の漸近相関係数, Sarhan and Greenberg [9] で求められているμ^*とσ^*の相関係数からも予想されることである. すなわち, これらの相関係数はηが小さくなると大きくなるので, ηが小さいときには, $\hat{\mu}$またはμ^*が小さめに出れば, $\hat{\sigma}$またはσ^*も小さめに出て$u(x)<\mu$となることが多いと考えられる.

5. σに対する信頼区間

σに対する信頼区間の考察もこれまで述べてきたμに対する場合と平行して行なわれた. ただし, σに対する信頼区間が有限というときは$0<l(x)$, かつ$u(x)<\infty$の意味に用いられる.

第I型の ML 区間が有限区間になるための必要十分条件は

$$1-c(\alpha)\sqrt{\frac{\mu_{22}(\hat{\xi})}{n}}<0 \tag{18}$$

であるが, 与えられたn, αに対して, この不等式が成立する条件をkの値によって表現することはできない. 他の区間(第II型も含めて)は, μの場合と同様の考察を行うことが可能である. ただし, H区間については$\Phi_U \neq 1$, すなわち$n>k$なる条件が加えられる.

表17は, 第I型のσに対する ML 区間が有限でかつσ (=1) を含む割合(%)の推定値$\hat{p}$である. 表18は第II型の場合の$\hat{p}$表である.

表17 第I型, ML区間の$\hat{p}$

η \ n	10	20	30	50	100
0.10	(7.2) (0.3)	(32.6) (4.0)	57.2 (17.4)	84.0 52.6	94.7 92.8
0.25	(47.8) (11.1)	87.3 58.6	94.8 90.0	95.3 98.5	95.0 98.7
0.50	91.3 69.2	95.5 98.9	95.0 98.8	94.4 98.6	95.1 98.6
0.75	94.6 97.9	94.9 99.1	95.0 98.6	94.7 98.8	94.3 98.9
0.90	94.8 99.0	94.3 98.9	94.3 98.8	95.0 98.8	94.3 99.1

表18 第II型, ML区間の$\hat{p}$

η \ n	10	20	30	50	100
0.10			99.3	97.5 99.8	95.6 99.3
0.25	98.1	96.2 99.9	95.5 99.6	94.4 99.1	94.5 99.0
0.50	95.5 99.7	94.4 99.5	94.3 99.0	95.0 99.0	94.8 98.7
0.75	94.8 99.2	94.9 99.1	94.7 98.9	94.6 98.9	94.4 98.9
0.90	94.8 99.0	94.8 99.0	95.0 99.0	94.8 98.8	94.5 99.0

第I型及び第II型の ML, LU, H 区間を比較してみると, ML 区間は他の二つの区間より信頼水準をみたす(n, η)の組が多い. H区間で信頼水準をみたす所は, μの場合と同様に$\hat{p}$が大き過ぎる. 区間の長さの平均値でも, ML 区間は LU 区間に比べて 20~30% 短かい. H区間は ML 区間の2倍位の長さである. 以上のことから LU, H 区間は実用的でないので省くことにする.

また, μの場合の ML-T, LU-T 区間に対応する区間についても実験したが ML, LU 区間より無限区間が多くなり, 結果はよくないので省くことにする.

6. 結論および注意事項

6.1 第I型の場合のμに対する信頼区間

最尤推定値の両側に漸近的標準偏差の$\Phi^{-1}((1+\alpha)/2)/\sqrt{n}$倍の巾をつけて作った ML 区間, および第II型の場合に得られている線型不偏推定量の結果を形式的に第I型の場合にあてはめて作った LU 区間を信頼水準αのμに対する信頼区間として使用することは, それぞれ

表1，表2からわかるように小標本の場合に信頼水準が保証されないという意味で無理である．

H区間については小標本の場合に無限区間が現われやすいこと，および区間の長さがかなり長いという意味であまり実用的でない．ただし，われわれは Halperin [6] にしたがって信頼区間を作るときに，Φ_{x_0} に対する信頼水準 $\sqrt{\alpha}$ の信頼区間と信頼水準 $\sqrt{\alpha}$ で成立する不等式 (9) を組合わせて使用しているが，Halperin [7] によれば数値的検証の結果として上記二つの信頼水準を $\sqrt{\alpha}$ の代りに α にして求める μ の信頼区間は信頼水準 α をもつであろうということが述べられている．したがって，この観点に立って Halperin [6] の方法を利用することが考えられる．たとえば，表3の上段の数値を $\alpha=0.95$ に対するものとしてでなく，$\alpha=\sqrt{0.95}\fallingdotseq 0.975$ に対するものとみなすのである．確かに無限区間の影響を除けばすべての組合せで $\hat{p}>0.975$ になっており Halperin [7] で述べられていることがわれわれの実験結果でも裏付けられる．しかしなおかつ信頼係数が大きすぎ，参考としてあげた表8からもわかるように，ML-T 区間などにくらべて見劣りがする．

LU-T 区間については第I型の場合表4と表5，表6と表7でみる限り ML-T 区間よりすぐれているとはいえない．ただし，第I型の場合 LU-T 区間の使用について一つの問題点が残っている．第I型の場合に対応する線型不偏推定量の理論的結果がないため，われわれは第II型の場合の線型推定量に関する結果を形式的に使用した．このような利用の仕方として他にもいくつかの方法が考えられるであろう．たとえば，打ち切り点 x_0 を加えて，$x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(m)}, x_0$ を大きさ $n+1$ の標本から $m+1$ 個で打ち切った第II型標本とみなす方法である．区間推定に限らず点推定の問題に対しても，第I型の場合に第II型の線型推定の理論を如何に援用したらよいかという問題が残っている．

結論として第I型の場合の μ に対する小標本にもとずく信頼区間としては ML-T 区間がもっとも実用的であるということができよう．しかし，ML-T 区間にしても $\eta=0.1$ のとき，および $\eta=0.25$ で $n\leqq 30$ のときには信頼水準が保証されてない．信頼水準が保証されているときについては，区間の長さの平均は表6からわかるように大きさ $[n\eta]$ の打ち切りのない標本にもとずく t 分布を用いる通常の信頼区間の長さの平均よりは短いと考えてよい．

6.2 第II型の場合の μ に対する信頼区間

ML 区間，LU 区間，H 区間についてはほぼ第I型と同じ傾向が見られる．ML-T 区間については，第I型の場合よりも信頼水準が保証される組合せが減少している．すなわち $\eta=0.5$ の場合でも $n\leqq 30$ では信頼水準が保証されているとはいえなくなる．一方，LU-T 区間は当然のこととはいえ（第II型の場合について構成されている線型推定の理論を応用しているのであるから）非常にすぐれた性質を示している．すなわち $\eta=0.1$，$n=10$ の場合を除くと信頼水準は保証されていると考えられ，区間の長さという点でも表14と表15で比較する限り ML-T 区間よりわずかながらよさそうである．したがって結論としては第II型の場合の μ に対する信頼区間としては LU-T 区間がもっとも実用的であり，$n>20$ の場合についても線型推定量の係数や分散の表を作って信頼区間に応用できるようにすることが有意義かと思われる．

6.3 σ に対する信頼区間

σ については ML 区間，LU 区間，H 区間を比較しているが，多くの場合 ML 区間が実用的であるといえそうである．しかし第I型の場合には $\eta=0.1$ のとき，$\eta=0.25$ で $n\leqq 30$ のとき，$\eta=0.5$ で $n=10$ のときは信頼水準を満足しない．第II型の場合は表18からわかるように $\eta=0.1$，$n\leqq 30$ のときを除くと ML 区間は信頼水準 α をほぼ満足しているといえる．

謝辞 レフェリーの有益な助言に感謝の意を表する．

参 考 文 献

[1] Cohen, A.C., Jr. (1959) Simplified estimators for the normal distribution when samples are singly censored or truncated, *Technometrics* **1**, 217–237.

[2] Cohen, A.C., Jr. (1961) Tables for maximum likelihood estimates: singly truncated and censored samples, *Technometrics* **3**, 535–541.

[3] David, H.A. (1970) *Order Statistics*, Wiley, New York.

[4] Gupta, A.K. (1952) Estimation of the mean and standard deviation of a normal population from a censored sample, *Biometrika* **39**, 260–273.

[5] Hald, A. (1949) Maximum likelihood estimation of the parameters of a normal distribution which is truncated at a known point, *Skand. Aktuarietidskr* **32**, 119–134.

[6] Halperin, M. (1961) Confidence intervals from censored samples, *Ann. Math. Statist.* **32**, 828–837.

[7] Halperin, M. (1966) Confidence intervals from censored samples, II, *Technometrics* **8**, 291–301.

[8] 村上正康・新保外志 (1959) 推計学の化学および生物学への応用 第3集 現場の推計学, 科学の領域 増刊36号, 48-73.

[9] Sarhan, A.E. and Greenberg, B.G. (Eds.) (1962) *Contribution to Order Statistics*, Wiley, New York.