スターリングの公式をめぐって

統計数理研究所　松　縄　　規

(1978年3月　受付)

On the Stirling Formula

T. Matsunawa
(The Institute of Statistical Mathematics)

The so-called Stirling formula was first obtained by De Moivre with the help of Stirling who gave the exact value of constant appearing in the formula. Stirling himself also gave another formula for approximating ln n! which is more accurate than that of De Moivre's. We shall derive in this paper further improved formulae which can apply to the real gamma function. The formulae are expressed in terms of some inverse factorial series and the error terms are evaluated by certain double inequalities as accurately as we desire. We shall also show that an asymptotic formula is obtained by the use of the central limit theorem and the moment convergence theorem applied to the sum of i.i.d. gamma random variables.

要　　旨

いわゆるスターリングの公式についての若干の歴史的事項を述べると共に，実ガンマ関数が絶対収束する逆階乗級数で表示され，しかもこの級数は二重不等式で望むだけの精度で評価できることを示す．また，中心極限定理およびモーメント収束定理から逆に実数の場合にも適用できるスターリングの公式が導出できることを示す．なお本ノートは筆者の関連する論文 [6], [7] とは結果および誘導方法に於て極く一部分を除いて重複しない．

1.　序

与えられた数の階乗の近似値を知りたい場合が統計学の理論に限らずしばしば起る．n を十分大きな自然数とするとき近似公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}, \quad (n\to\infty), \tag{1.1}$$

がよく知られている．こゝで記号 $\sim$ は両辺の比を取ったときのその値が $n\to\infty$ で1に収束することを表す．(1.1) よりも複雑な次の表現

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \cdots \tag{1.2}$$

が既に二世紀半も前にド・モアブルによって，ラテン語で書かれた 7 頁のノート "Approximatio ad Summam Terminorum Binomii $(a+b)^n$ in Seriem expansi" (1733) の中で発表された．この内容は後に彼の有名な著書 The Doctrine of Chances の第二版 (1738) の中に英訳して納められた (cf. Daw and Pearson [2], De Moivre [3])．彼は当初 (1720年頃から) の研究では (1.2) の定数 $\ln\sqrt{2\pi}$ を与えることができず，この部分を誤った推論から

$$(1.3) \qquad 1-\frac{1}{12}+\frac{1}{360}-\frac{1}{1260}+\frac{1}{1680}-\cdots$$

としていたようである．彼はこの級数が収束するものと考えておりその値を $\ln B$ と記した．そして後になって友人スターリングの関連する仕事の結果から $B=\sqrt{2\pi}$ であると結論した．しかし，彼の推論は誤りである．というのは，(1.2)，(1.3) の級数が実は彼の考えたような収束級数ではなく後述するように発散級数であるからである．

然しながらド・モアブルの結果は今日で言う漸近展開を与えたものであると解釈すれば有限項で打切られた級数を考えれば話が済むため，彼の $B\fallingdotseq\sqrt{2\pi}$ の推論は近似的には正しいと言える．なお，彼の結果 (1.2) はその発表手段のまずさと定数 $\sqrt{2\pi}$ をスターリングが与えたこともあって今日では通常スターリングの公式と呼ばれているが，正確にはド・モアブル＝スターリングの定理あるいはスターリング級数のド・モアブル表現と呼ぶべきかもしれない (cf. K. Pearson [9], Jeffreys and Jeffreys [5])．

ところで後世に名を残す栄誉を担ったスターリング自身はド・モアブルと違った方法で $m=n+1/2$ としての次の驚くべき近似公式

$$(1.4) \qquad \ln n! = \frac{1}{2}\ln 2\pi + m\ln m - m - \frac{1}{2\cdot 12\,m}+\frac{7}{8\cdot 360\,m^3}-\frac{31}{32\cdot 1260\,m^5}+\frac{127}{128\cdot 1680\,m^7}-\cdots$$

を発表していたようである．(*Methods Differentialis*: sive tractalus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, London (1730), p. 137) (cf. [5])．スターリングのこの結果はド・モアブルの結果 (1.2) に比べ多少複雑である．しかし近似の精度は相対的に (1.4) の方が優れており，ガンマ関数の一般論など建設されていなかった時代に与えられことに驚かされる．(1.4) の右辺に於て n ではなく $m=n+1/2$ を用いているが，この発想はずっと後に Burnside によって再発見され，また Feller [4] でも二項分布の正規近似で用いられ，近似精度の向上の点からも非常に有用であることが明らかにされている．この事は離散分布を連続分布で近似する際のいわゆる連続補正に密接に関連する．なおスターリングが (1.4) で与えた定数 $\sqrt{2\pi}$ は恐らく π を有理数の無限乗積で表現したウォーリスの結果 (1655)；

$$(1.5) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}$$

を用いることにより発見したと思われる．

以上スターリングの公式の誕生をめぐる若干の事柄を述べてきたが，近似公式 (1.1)，(1.2)，(1.4) は理論上は n が十分大きいときに成立する漸近公式であることに注意しなければならない．しかし実用上は n がそれほど大きくなくても (1.2)，(1.4) に対応する漸近展開はかなり良い近似値を与えることが知られている．そこで次節では理論上も，小さな非負の整数 n に対しても，或はもっと一般に実数 $x>-1/2$ に対しても使えるような実ガンマ関数の近似を行なう．そこでは実数の場合のスターリングの公式に関連する二重不等式を用いて $\ln\Gamma(x+1)$ をいくらでも望むだけの精度で近似できることを証明する．第3節では確率論的考察からスターリングの公式を導く．即ち中心極限定理およびモーメント収束定理を独立同一分布に従うガンマ確率変数の和に適用し，第2節で得た関連結果と組合せることによりスターリングの公式の無限級数を用いた漸近的表現を与える．

2. $\ln\Gamma(x+1)$ の逆階乗級数表示と評価

実数 $x>0$ に対し Binet の関数

$$(2.1)\qquad \mu(x)=\ln\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}\,x^{x-1/2}e^{-x}}$$

を考える．先に述べたようにド・モアブルの結果 (1.2) は十分大きな n に対し

$$(2.2)\qquad \mu(n)=\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\frac{1}{1680n^7}+\cdots$$

なる級数表現が可能であるとした．しかし

$$(2.3)\qquad e^{\mu(n)}\sim\exp\left\{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\frac{1}{1680n^7}\right\}\quad(n\to\infty),$$

なら成立するが (2.2) は成立しない．今日スターリング級数と呼ばれるものを詳しく記せば

$$(2.4)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^iB_i}{(2i)(2i-1)x^{2i-1}}$$

となる．こゝで B_i はベルヌーイ数で

$$(2.5)\qquad B_i=\frac{2(2i)!}{(2^{2i}-1)\pi^{2i}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^{2i}}$$

と定義される．(2.4), (2.5) から容易に確められるように (2.2) の右辺に与えられた4項は (2.4) の始めの4項と全く一致する．このことからド・モアブルは殆ど疑いもなく (2.4) の級数に到達していたと思われる．ところでそうなるとベルヌーイ数の次の性質

$$(2.6)\qquad B_i/B_{i-1}\sim(i/\pi)^2,\quad B_i\to\infty\quad(i\to\infty)$$

から (2.4) は明らかに発散級数であり，ド・モアブルが $1-\mu(1)=\ln\sqrt{2\pi}$ としたのは誤りであることになる．換言すれば通常のスターリングの公式は $x\to\infty$ での (2·1) の $\mu(x)$ に対する Poincare の概念での漸近級数であり，今の場合はいかに大きくても，固定された x に対して (2.4) の無限級数は発散してしまう．

以上の事柄を明確にするため (2.2) は

$$(2.7)\qquad \mu(n)\approx\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\frac{1}{1680n^7}+\cdots\quad(n\to\infty)$$

とでも表わし，記号 $=$, $\sim$ と区別し混乱を防ぐ必要がある (cf. De Brujin [1])．

さて，話を本題に移して，$\ln\Gamma(x+1)$ の不等式による近似を行うことにしよう．その為に $\mu(x)$ を (2.4) の漸近級数ではなく $x>0$ に対して絶対収束する収束級数で表現したい．これを実現する一つの方法として次の逆階乗級数によるものが考えられる：

$$(2.8)\qquad \mu(x)=-\sum_{i=0}^{\infty}a_{i+1}\prod_{j=0}^{i}(x+j)^{-1},$$

こゝに $a_1=-1/12$, $a_2=0$, $a_3=1/360$, $a_4=1/120$, $a_5=5/168$, $a_6=11/84$, $a_7=3499/5040$, $\cdots$ で，一般に

$$(2.9)\qquad a_i=\frac{1}{i}\int_0^1 t(1-t)(2-t)\cdots(i-1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)dt\quad(i\geqq 2)$$

で与えられる．

$a_i>0$ $(i>3)$ であり正項級数に関する次の評価

$$(2.10)\qquad 0<\sum_{i=2}^{\infty} a_{i+1}\prod_{j=0}^{i}(x+j)^{-1}<\frac{1}{64}\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(x+1)}\right\}$$

が可能である (cf. Matsunawa [8], p. 338) ので (2.8) の右辺の級数は任意の固定された $x>0$ に対し絶対収束する.

さて (2.8) を誘導しよう. この級数は x が整数 $n\geqq 2$ のとき Schlömilch [10] によって与えられており, 筆者 [8] は x が実数の場合 Binet の $\ln\Gamma(\cdot)$ に対する積分による第1表現から求めた (複素変数に対しても成立する). しかしいずれも多少複雑な積分演算を要するので, ここではもっと初等的な方法で証明する.

(2.1) の $\mu(x)$ の定義から

$$(2.11)\qquad \mu(x)-\mu(x+1)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1.$$

そこで右辺に次の公式を適用する.

$$(2.12)\qquad \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=-\sum_{i=0}^{\infty} b_i\prod_{j=0}^{i}(x+j)^{-1}$$

こゝに $b_0=-1,\ b_1=1/2,\ b_2=1/6,\ b_3=1/4,\ \cdots$, 一般に

$$(2.13)\qquad b_i=\int_0^1 t(1-t)(2-t)\cdots(i-1-t)dt\quad (i\geqq 2)$$

である (cf. Matsunawa [7]). (2.11) は次の様に変形される:

$$(2.14)\qquad \mu(x)-\mu(x+1)=-\sum_{i=1}^{\infty} b_i\Big/\prod_{j=1}^{i}(x+j)-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} b_i\Big/\prod_{j=0}^{i}(x+j).$$

よってこの関係を n 回逐次用いて辺々加えれば

$$\mu(x)-\mu(x+n)=\sum_{k=1}^{n}\{\mu(x+k-1)-\mu(x+k)\}$$

$$(2.15)\qquad =-\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\left(b_{i+1}+\frac{b_i}{2}\right)\sum_{l=0}^{n}\prod_{j=0}^{i}(x+j+l)^{-1}\right\}$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty} b_{i+1}\prod_{j=0}^{i}(x+j)^{-1}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} b_i\prod_{j=0}^{i}(x+n+j)^{-1}.$$

そこで

$$(2.16)\qquad \sum_{l=0}^{n}\prod_{j=0}^{i}(x+j+l)^{-1}=\frac{1}{i}\left\{\prod_{j=0}^{i-1}(x+j)^{-1}-\prod_{j=0}^{i-1}(x+n+j)^{-1}\right\},$$

$$(2.17)\qquad \frac{1}{i}b_{i+1}-\left(1-\frac{1}{2i}\right)b_i=a_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

に注意すれば

$$(2.18)\qquad \mu(x)-\mu(x+n)=-\sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}\prod_{j=0}^{i}(x+j)^{-1}$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{i+1}\left(b_{i+2}+\frac{b_{i+1}}{2}\right)+\frac{1}{2}b_i\right\}\prod_{j=0}^{i}(x+n+j)^{-1}.$$

ところで b_i について

$$(2.19)\qquad \Gamma(i-1)/6\leq b_i\leq \Gamma(i)/6\quad (i\geqq 2)$$

が成立する．また

(2.20)　$$\sum_{i=1}^{\infty} \Gamma(i) \prod_{j=0}^{i} (x+j)^{-1} = x^{-2}, \quad (x>0)$$

であるから (cf. Lemma 3.2, 3.3 [1])，(2.18) の第 2 項は $n \to \infty$ で 0 となることが容易に確め得る．従って (2.8) を証明するためには

(2.21)　$$\mu(x+n) \to 0, \quad (n \to \infty)$$

の成立することを言えばよい。次にこれを示そう．

$b_i > 0$ $(i=1,2,\cdots)$ に注意して (2.18) の右辺を評価すると

(2.22)　$$0 < \mu(x) - \mu(x+n) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}\right)$$

を得る．そこで特に x が自然数 n である場合を考えると，$\mu(n) - \mu(2n) < 1/(4n) \to 0$, $(n \to \infty)$ である．即ち

(2.23)　$$\frac{\Gamma(n)}{n^{n-1/2}e^{-n}} = \gamma(n)$$

と置けば

(2.24)　$$\gamma(n)/\gamma(2n) \to 1 \quad (n \to \infty)$$

である．一方，(1.5) のウォーリスの公式を用いることにより

(2.25)　$$\gamma^2(n)/\gamma(2n) \to \sqrt{2\pi} \quad (n \to \infty)$$

が出る．よって (2.24)，(2.25) から

(2.26)　$$\gamma(n) \to \sqrt{2\pi} \quad (n \to \infty)$$

となる．次に $x>0$ を n に無関係な実数とすれば

(2.27)　$$\frac{\gamma(x+n)}{\gamma(n)} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \Big/ \left[e^{-x} \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^{x+n-1/2}\right] \to 1 \ (n \to \infty)$$

であるから，(2.26)，(2.27) により

(2.28)　$$\mu(x+n) = \ln\left[\frac{\gamma_1(n)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma(x+n)}{\gamma(n)}\right] \to 0 \ (n \to \infty),$$

を得る．よって (2.8) の証明が完了した．結局 (2.1)，(2.8) で x を $x+1$ で置き替えて

公式 1　$$\ln \Gamma(x+1) = \ln \sqrt{2\pi} + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x+1) - (x+1) - \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} \prod_{j=0}^{i} (x+1+j)^{-1}, \quad (x>-1)$$

を得る (cf. Matsunawa [8], (2.11) 式)．前述したようにこの公式の級数は絶対収束であり，$x>-1$ である任意の実数に対して成立する．

故に通常のスターリングの公式が十分大きな x に対して成立する漸近展開であるのに比べ，公式 1 は小さな $x(>-1)$ に対しても適用できる公式である．

さて，第 1 節でスターリング自身による公式 (1.4) を紹介した．彼の漸近的結果に対応して，逆階乗級数による表現を求めよう．

このためにガンマ関数の理論に於るル・ジャンドルの 2 倍公式：

(2.29)　$$\Gamma(2x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

を用いるのが便利である．(2.1) にこの公式を適用すれば

$$\ln\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\ln\sqrt{2\pi}+x\ln x-x-\mu(x)+\mu(2x)\quad(x>0)$$

となるから，x を $x+1/2$ で置き替えて公式

公式 2 $$\ln\Gamma(x+1)=\ln\sqrt{2\pi}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)+\mu(2x+2),\quad\left(x>-\frac{1}{2}\right)$$

を得る．$\mu(x)$ は (2.8) 式で定義され

$$(2.30)\quad -\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)+\mu(2x+2)=\sum_{i=0}^{\infty}a_{i+1}\left\{\prod_{j=0}^{i}\left(x+\frac{1}{2}+j\right)^{-1}-\prod_{j=0}^{i}(2x+1+j)^{-1}\right\}=-\frac{1}{24\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{360}\times\left\{\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)}-\frac{1}{(2x+1)(2x+2)(2x+3)}\right\}+\cdots$$

である．

ところで公式2は公式1に比較して誤差項とでもいうべき級数の部分の収束が早いことがわかる．両者では逆階乗の形が異なっているので厳密な比較は煩しくなるが，x が適当に大きくなれば次数 $O(x^{-1})$ の項の係数の絶対値は公式1では 1/12 であるのに対し公式2では 1/24 と小さくなっている．$O(x^{-2})$ 以下の項についても同様なことが言える．主要項については，公式1，2とも $\ln\Gamma(x+1)$ の絶対収束級数による表現であったから，誤差項の収束性の優れている公式2がやはり近似度の高い主要項を持つはずである．したがって近似精度の上から言えば公式2の右辺に見るように適当な大きさの数 x を $x+1/2$ と半数補正することは非常に意味があるということになる．簡単な数値例で両公式の主要項を比べて見よう．なお（ ）中の数値は対応する $\Gamma(x+1)$ の値である．

(i) $x=0$

真の値： $\ln\Gamma(1)=0$ (1)

公式1の主要項： $\ln\sqrt{2\pi}-1=-0.08106147$ (0.922137)

公式2の主要項： $\ln\sqrt{2\pi}+0.5\ln 0.5-0.5=0.07236494$ (1.075048)

(ii) $x=1$

真の値： 0 (1)

公式1の主要項： −0.00413407 (0.959502)

公式2の主要項： 0.02713620 (1.027508)

(iii) $x=5$

真の値： 4.7874917 (120)

公式1の主要項： 4.7736156 (118.35)

公式2の主要項： 4.7950530 (120.91)

(iv) $x=10$

真の値： 15.1044126 (3628800)

公式1の主要項： 15.0968389 (3601420.46)

公式2の主要項： 15.1083787 (3643220.98)

上のいくつかの数値例からもわかるように公式2に於る半数補正は近似をよくするために確かに有用である．$x=1$ のときは公式1の方が真の値との絶対誤差が小さくなっているが，$\exp\{\ln\Gamma(x+1)\}$ の値は逆に公式2の方がよくなっている．しかし このようなことは x の値が極端に小さいときにのみ起るのであって，次数 $O(1/x)$ の項まで考えると $x=1$ の場合でも公式2の方が圧倒的に良い近似値を与える．この半数補正は第1節で述べたようにスターリングによって (1.4) の漸近展開の中で行なわれている．彼の結果がド・モアブルの表現 (1.2) よりも精度に於て優れていると述べたのは実は上のような事を指して言ったのである．スターリングによる結果 (1.4) が忘れられているのは非常に残念である．

さて我々は $\ln\Gamma(x+1)$ の近似に於て半数補正の有用さを知ったわけであるが，その表現の中に無限級数を含んでおり少々煩しい．そこでこの部分を上，下から不等式で評価して $\ln\Gamma(x+1)$ の近似を行なうことを考えよう．問題にしている級数 (2.30) の中で係数 a_i は $a_1=-1/12$, $a_2=0$ そして定義式 (2.9) から $a>0$ $(i\geqq 3)$ が言える．(cf. a_i に関するより詳しい評価は Matsunawa [7], [8] で扱っている)．(2.30) で

$$(2.31)\qquad y(x;i)=\prod_{j=0}^{i}\left(x+\frac{1}{2}+j\right)^{-1}-\prod_{j=0}^{i}(2x+1+j)^{-1},\ \left(x>-\frac{1}{2}\right)$$

と置けば明らかに $y(x;i)>0$ $(x>-1/2)$ であるから (2.30) の級数は $i>3$ で各項は全て正である．従って任意の整数 L_1, L_2 $(L_1>L_2\geqq 0)$ に対し

$$(2.32)\qquad -\mu\left(x+\frac{1}{2}\right)+\mu(2x+2)>\sum_{i=0}^{L_1}a_{i+1}y(x;i)$$

$$>\sum_{i=0}^{L_2}a_{i+1}y(x;i)\geqq-\frac{1}{24\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

が言える．即ち (2.30) の級数で項数を多く取れば取るほど (2.32) の左辺の量の下界が改良出来ることになる．公式2と (2.32) から我々は望むだけの精度で $\ln\Gamma(x+1)$ を下から近似できることが原理的に可能と言える．

$\ln\Gamma(x+1)$ を上から近似するには例えば次の様にすればよい．(2.12) を用いて公式1を次のように変形できる．

$$(2.33)\qquad \ln\Gamma(x+1)=\ln\sqrt{2\pi}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\omega(x)\qquad\left(x>-\frac{1}{2}\right),$$

こゝに

$$(2.34)\qquad \omega(x)=\frac{-1}{24(x+1)}-\frac{1}{24(x+1)(2x+3)}-\sum_{i=2}^{\infty}z(x;i),$$

そして

$$(2.35)\qquad z(x;i)=a_{i+1}\prod_{j=0}^{i}(x+1+j)^{-1}+\frac{b_i}{2}\prod_{j=0}^{i-1}(2x+2+j)^{-1}$$

である．

全ての i について $b_i>0$ であり，$a_i>0$ $(i\geqq 3)$ であるから (2.34) の級数は正項級数である．従って任意の整数 U_1, U_2 $(U_1>U_2\geqq 2)$ に対し

$$(2.36)\qquad \omega(x)<-\frac{1}{24(x+1)}-\frac{1}{24(x+1)(2x+3)}-\sum_{i=2}^{U_1}z(x;i)$$

$$< -\frac{1}{24(x+1)} - \frac{1}{24(x+1)(2x+3)} - \sum_{i=2}^{U_2} z(x;i)$$

$$< -\frac{1}{24(x+1)} .$$

よって $\omega(x)$ の上界についても，級数の項の数を多く取れば取る程改善が可能になることを知った．即ち (2.33) と (2.36) から $\ln\Gamma(x+1)$ を上からいくらでも精度よく近似が可能と言える．

なお筆者 [8] ではある有限項数まで取られた逆階乗級数の剰余部分を評価する不等式を準備して $\ln\Gamma(x+1)$ の近似評価を行なったが，こゝでは重複をさけて，より初等的な方法でかつ精度も悪くない不等式を与えた．

3. 中心極限定理とスターリングの公式

ド・モアブルは (1.2) の近似公式などを用いて二項分布の正規近似を行なった．その結果はラプラスにより精密化され，今日ド・モアブル＝ラプラスの定理として知られており，中心極限定理の最もプリミティブなものとなっている．(cf. 清水 [11])．上にも述べたように彼等の定理はスターリングの公式を用いて発見されたのである．本節ではこれとは逆に中心極限定理の助けを借りてスターリングの公式を導き出せることを証明する．このことについて，Khan [6] は標準指数分布からの独立な確率変数の和に中心極限定理とモーメント収束定理を用いて，自然数の場合の公式である (1.1) を与えた．以下ではガンマ分布に従う独立な確率変数の和を考える事により，Khan の結果を実数の場合に拡張し，前節で詳しく調べた Binet 関数 $\mu(x)$ の性質と組合せることによりスターリングの公式を導こう．

$\{Y_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ を互に独立にパラメータ $\theta>0$ のガンマ分布

$$(3.1) \qquad f(y) = \frac{y^{\theta-1}e^{-y}}{\Gamma(\theta)}, \quad (y>0)$$

に従う確率変数列とする．$S_n=Y_1+\cdots+Y_n$ とすれば，S_n は平均 $n\theta$，分散 $n\theta$ のガンマ分布

$$(3.2) \qquad f_n(y) = \frac{y^{n\theta-1}e^{-y}}{\Gamma(n\theta)}, \quad (y>0)$$

に従う．中心極限定理により

$$(3.3) \qquad L\left(\frac{S_n-n\theta}{\sqrt{n\theta}}\right) \to N(0,\,1)\,, \quad (n\to\infty)$$

が成立する．この事とモーメント収束定理 (ex. 清水 [11], p. 60) により

$$(3.4) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathscr{E}\left[\frac{|S_n-n\theta|}{\sqrt{n\theta}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |t|e^{-t^2/2}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,.$$

一方，S_n の分布が (3.2) であることから

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\mathscr{E}\left[\frac{|S_n-n\theta|}{\sqrt{n\theta}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\theta}\,\Gamma(n\theta)}\int_0^{\infty}|y-n\theta|\,y^{n\theta-1}e^{-y}dy$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\sqrt{n\theta}}{\Gamma(n\theta)}\left[\int_0^{n\theta}\left|\frac{y}{n\theta}-1\right|y^{n\theta-1}e^{-y}dy + \int_{n\theta}^{\infty}\left|\frac{y}{n\theta}-1\right|y^{n\theta-1}e^{-y}dy\right]$$

$y/n\theta=u$, $n\theta=x$ (>0) と置けば

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x^{x+1/2}}{\Gamma(x)} \left[\int_0^1 (1-u)\, u^{x-1} e^{-xu}\, du + \int_1^\infty (u-1)\, u^{x-1} e^{-xu}\, du \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{x^{x+1/2}}{\Gamma(x)} \left[\int_0^1 u^{x-1} e^{-xu}\, du - \int_0^1 u^x e^{-xu}\, du \right.$$

$$\left. + \int_1^\infty u^x e^{-xu}\, du - \int_1^\infty u^{x-1} e^{-xu}\, du \right]$$

第1，第4積分に部分積分を行なって

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{x+1/2}}{\Gamma(x)} \left\{ \left[\frac{u^x e^{-xu}}{x} \right]_0^1 - \left[\frac{u^x e^{-xu}}{x} \right]_1^\infty \right\}$$

$$(3.5) \qquad = \frac{\sqrt{2\pi}\, x^{x+1/2}\, e^{-x}}{\Gamma(x+1)}.$$

よって (3.4)，(3.5) から (1.1) を実数に拡張した

$$(3.6) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\, x^{x+1/2}\, e^{-x}}{\Gamma(x+1)} = 1$$

を得る.

ところで前節 (2.8) の $\mu(x)$ は (2.10) によって $\mu(x)\to 0$, $(x\to\infty)$ であるから，(3.6) は更に詳しく

$$(3.7) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}\, x^{x+1/2}\, e^{-x+\mu(x)}}{\Gamma(x+1)} = 1$$

と改善できる.

なお (3.6)，(3.7) は x が十分大きいときの $\Gamma(x+1)$ の漸近的結果を表しているにすぎないから，上の様な確率論に於る極限定理からスターリングの公式を導く方法では，前節の方法に比べてその結果は理論上非常に弱々しい．逆に言えばこの節での道具立てとして使った中心極限定理やモーメント収束定理を n が小さくても使えるような不等式で評価される近似理論へと発展させる必要が一層強まっていると言えよう.

最後に有益なコメントをくださったレフェリーに感謝致します.

参　考　文　献

[1] De Bruijn, N.G. (1970) *Asymptotic Methods in Analysis*, 3rd ed., North-Holland.

[2] Daw, R.H. and Pearson, E.S. (1972) Studies in the history of probability and statistics. XXX. Abraham De Moivre's 1733 derivation of the normal curve: A bibliographical note, *Biometrika* **59**, 677–680.

[3] De Moivre, A. (1738) *The Doctrine of Chances*, 2nd ed.

[4] Feller, W. (1945) On the normal approximation to the binomial distribution, *Ann. Math. Statist.* **16**, 319–329.

[5] Jeffreys, H. and Jeffreys, B. (1972) *Methods of Mathematical Physics*, 3rd ed., Cambirdge Univ. Press.

[6] Khan, R.A. (1974) A probabilistic proof of Stirling formula, *Amer. Math. Monthly*, **81**, 366–369.

[7] Matsunawa, T. (1976) Some inequalities based on inverse factorial series, *Ann. Inst. Statist. Math.* **28**, 291–305.

[8] Matsunawa, T. (1977) Approximations to the probabilities of binomial and multinomial random variables and chi-square type statistics, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **29** A, 333–358.

[9] Pearson, K. (1924) Historical note on the origin of the normal curve of errors, *Biometrika*, **16**, 402–404.

[10] Schlömilch, O. (1921) *Übungsbuch zum Studium der Höheren Analysis*, zweiter Teil Aufgaben aus der Integralrechnung, fünfte Auflage. Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig, Berlin.

[11] 清水良一 (1976) 中心極限定理, 教育出版.