

生存競争のモデルとシミュレーション

伊藤 榮 明
上田 澄 江

(1974年11月 受付)

The Model and the Simulation of the Struggle for Existence

Yoshiaki Itoh, Sumie Ueda

The struggle for existence based on the model of particle collisions are considered. One system treated is governed by binary collision, while the other by three particle collision. The latter system has some stability comparing to the former. A ruin problem is considered in case of the system with finite particles. The system with infinite number of particles are also treated.

The Institute of Statistical Mathematics

生存競争の問題についてすでに [3], [4], [5], [6], [7] で考えてきている。ここでは

I. 個体数が有限の場合

II. 個体数が十分に大なる場合

のふたつについて考える。

粒子の衝突ということにもとづいたモデルをつくる。このモデルについて上記 I と II を考えるのである。ここで述べるモデルは単純であるが本質をとらえていると思われる。生存競争の問題は Lotka, Volterra 等の仕事以来、多くの人々によりとりあつかわれている。そのほとんどは、個体数を連続な量とみなし、微分方程式により系の変化をしらべている。実際は個体数を有限とみなすべき場合も多いと思われる。その場合マルコフチェインとしてとらえると、ruin problem として興味深い問題となる。粒子数を無限大に持って行き、時間の単位を適切にとれば Lotka-Volterra の方程式をみちびくことができる。粒子の衝突というモデルにもとづいて方程式を自然にみちびくことができるのである。さらに粒子の密度が高い場合に Lotka-Volterra 方程式を拡張することが容易になる。

I. 個体数有限の場合の生存競争の問題

ここでは個体数を有限とし、ある強弱関係を仮定する。ruin problem としての側面に注目する。コンピューターシミュレーションとその stereo-pair drawing に主眼をおき数式の説明は省略する。

[4], [5], [7] を参照

§ 1. ジャンケンについて

壺 G , 壺 C , 壺 P という3つの壺を考える。(G はグー, C はチョキ, P はパーを表わ

す.) それぞれに n_G, n_C, n_P 個の粒子がはいっていたとする. n 個の粒子には1から n まで番号がふってあり, 単位時間内に等確率でまずひとつの粒子を指定し, さらにもうひとつの粒子を等確率で指定する. 粒子の指定はすべて互いに独立に行なわれるとする. 単位時間内に指定された2つが G と C にはいっていたとすれば指定された C の粒子が G に移るものとする. C と P なら P から C に, C と G なら C から G に移動がおきるとする. G と G, C と C, P と P というように同じものの組みあわせである場合移動はおこらないとする. 時刻 t での G, C, P の個数はそれぞれ確率変数 $X_G(t), X_C(t), X_P(t)$ であらわされる. そのとき

$$E(X_G(t+1)X_C(t+1)X_P(t+1) | X_G(t)X_C(t)X_P(t)) = \left(1 - 2\frac{3C_2}{n^2}\right)X_G(t)X_C(t)X_P(t)$$

が成立することがわかる.

§ 2. 強弱関係

種の数か奇数の場合, ジャンケンのときと同様に “どの種も対等” になるように定めることができる.

種 i の1個の粒子と, 種 j の1個の粒子が衝突することにより種 i の粒子2個になる場合, 図で書くと



のようになる場合, i は j より強いと定義することにする.

種数が $2k+1$ である系を考える. それぞれの種が他の k 個の種よりも強く, 残りの k 個の種よりも弱いとき “どの種も対等” であるということにする.

種数が $2k$ であるとする. その場合 “どの種も対等” であるようにすることはできない. 適当なひとつの種をつけくわえることにより “どの種も対等” になる場合, $2k$ 個の種は “どの種もほとんど対等” であるということにする. “どの種もほとんど対等” である場合適当な種をとりさることにより “どの種も対等” になる.

ex. A と B を \rightarrow で結んだ場合, つまり $A \rightarrow B$ なる場合, B は A より強いということを表すとする. そのとき “どの種も対等” であるという状態を図であらわすことができる. Fig. 1 は A, B, C, D, E の5種類からなる場合の図である.

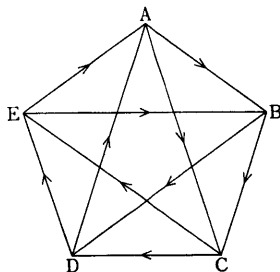


Fig. 1

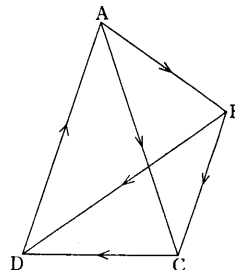


Fig. 2

Fig. 2 は Fig. 1 における E をとりのぞいた状態をあらわし, “どの種もほとんど対等” な場合の例である. さらに B または C をとりさると “どの種も対等” な状態になることがわか

る。

§ 3. 生存競争のモデル

モデル 1

種の数か奇数の場合

衝突という言葉を使うことにより § 1 でのモデルを記述することができる。次の i), ii), iii), iv) を満すようなモデルを考える。

i) ひとつの箱のなかに 1 から $2k+1$ までの種がはいていて、それぞれの種の粒子数は $n_1, n_2, \dots, n_{2k+1}$ である。さらに $\sum_{i=1}^{2k+1} n_i = n$ が成立しているとする。

ii) どの種も対等である。

iii) 単位時間に衝突が 1 回おきる。1 から n まで粒子に番号をつけたとする。どの pair の衝突も同程度におこりやすいとする。たとえば 2 と 3 という衝突も 11 と 17 という衝突も同程度におこりやすいとするのである。

時刻 t における種 1, 2, ..., $2k+1$ の粒子数は $X_1(t), X_2(t), \dots, X_{2k+1}(t)$ なる確率変数で表すことができる。そのとき次の式が成りたつことがわかっている。

$$(1) E(X_1(t+1) X_2(t+1) \dots X_{2k+1}(t+1) | X_1(t) X_2(t) \dots X_{2k+1}(t)) \\ = \left(1 - \frac{2_{k+1} C_2}{n^2}\right) X_1(t) X_2(t) \dots X_{2k+1}(t)$$

種の数か偶数の場合

i) ひとつの箱のなかに 1 から $2k+1$ までの種がはいていて、それぞれの種の粒子数は $n_1, n_2, \dots, n_{2k+1}$ である。さらに $\sum_{i=1}^{2k} n_i = n$ が成立しているとする。

ii) どの種もほとんど対等である。

iii) 単位時間に衝突が一回おきる。どの pair の衝突も同程度におこりやすいとする。

この場合、もっとも弱い種 i が存在する。 i をのぞいた $2k-1$ 種の粒子数の積は確率変数 $H_{2k,i}(t)$ であらわされる。

そのとき

$$(2) E(H_{2k,i}(t+1) | H_{2k,i}(t), X_i(t)) \\ = \left(1 + \frac{X_i(t) - 2_{2k-1} C_2}{n^2}\right) H_{2k,i}(t)$$

が成り立つ。

モデル 2

i) と ii) はモデル 1 と同じであるとする。

iii) 単位時間に、3 体衝突が 1 回おきる。

3 体衝突とは次のようなものを言う。粒子 i, j が先ず指定され i と j は衝突する。さらに k が指定され j と k が衝突する。さらに k と i が衝突する。図で書くと Fig. 3 のようになる。([1], [2], [9] を参照)

3 体衝突が問題になってくるのは粒子の密度が高い場合である。

Fig. 3 において i が種 1 の粒子であり、 j が種 2、 k が種 3 であったとする。3 体衝突により i, j, k はすべて 3 になる。

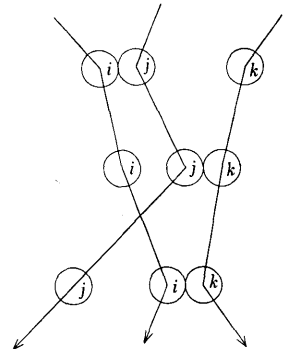


Fig.

i が2, j が3, k が1であったとする. 3体衝突により i, j, k はすべて1になる.

§ 4. stereo-pair drawing

立体視により系の変化を直観的にとらえることができる. すなわち $X-Y$ プロッターにより左眼でみる図形と右眼でみる図形を別々にえがくのである. 先ず右目の座標および左目の座標をさだめる. 左目及び右目からそれぞれ等距離にあるスクリーンを定める. 対象とする図形の重心と两眼の中心を結ぶ線は平面と直交するようにさだめる. その結果スクリーンにえがかれた図が Fig. 4 にある.

§ 5. コンピューターミュレーションシ

今 $2s+1$ 個の種があり「どの種も対等」であるとする. 状態の変化は(1)にしたがう. ある時間の後, ある一種の粒子数は0になり, 残りの $2s$ 種は「ほとんど対等」になる. よって系は(2)に支配される. 適当な時間の後, 種 i はほろび $2s-1$ 種の系になる. よってふたたび(1)にしたがうようになる. このようにして(1)と(2)が交互に適用され最終的には一種類だけが残る.

Fig. 4 について (モデル1)

最初に 15 粒子ずつの 5 種がありどの種も対等になっている. ステップ 622 で種 E がほろびる. どの種もほとんど対等になり種 B が最も弱い種となる. ステップ 649 で種 B がほろびる. 残った 3 種はどの種も対等でありみつどもえの状態がつづいてゆく.

stereo-pair drawing によりこのことをみることにする. A, B, C, D, E の粒子数を n_A, n_B, n_C, n_D, n_E とあらわすことにする. Fig. 4b は n_A, n_C, n_D を x, y, z 軸にとりほぼ

PROBLEM 0
EX. 2.1

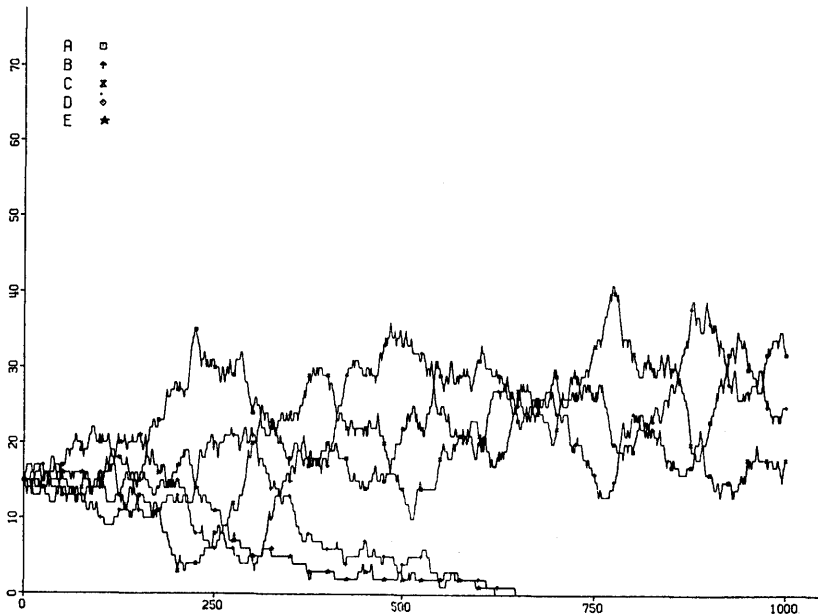


Fig. 4 a



Fig. 4b

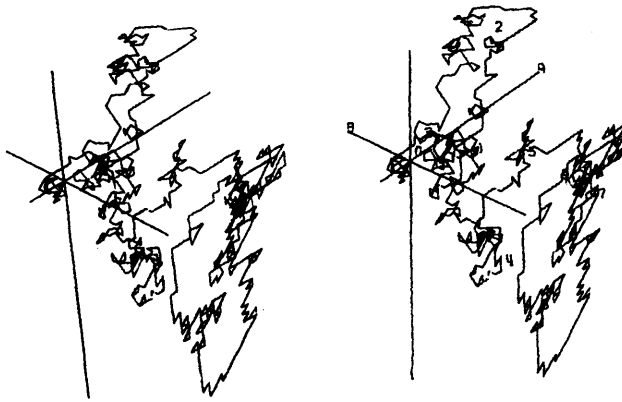


Fig. 4c

(1, 1, 1) の方向から path を見ている。原点は (15, 15, 15) である。path は $n_A + n_C + n_D = 75$ にラセンをえがいて向かって来る。ステップ 649 で $n_A + n_C + n_D = 75$ の上にとってしまう。

Fig. 4c は n_A, n_B, n_C を x, y, z 軸にえらんだものである。stereo-pair drawing により図であらわすことのできる世界が非常にひろがるのである。

Fig. 5 について (モデル 2)

最初に 35 粒子ずつの 7 種がありどの種も対等になっている。ステップ 1574 で種 A がほろびる。『どの種もほとんど対等』になり種 D がもっとも弱い種となる。ステップ 2131 で種 D がほろびる。残った 5 種は『どの種も対等』になっている。ステップ 5360 で種 B がほろびる。よって残った 4 種は『どの種もほとんど対等』になり、種 E がもっとも弱い種となる。ステップ 6133 で種 E はほろびる。残った 3 種は『どの種も対等』でありみつどもえの状態がついて行く。

Fig. 6

モデル 1 とモデル 2 の比較をすることにする。Fig. 6a はモデル 1 のシミュレーションであり、Fig. 6b はモデル 2 のシミュレーションである。

PROBLEM 0
EX. 3.2

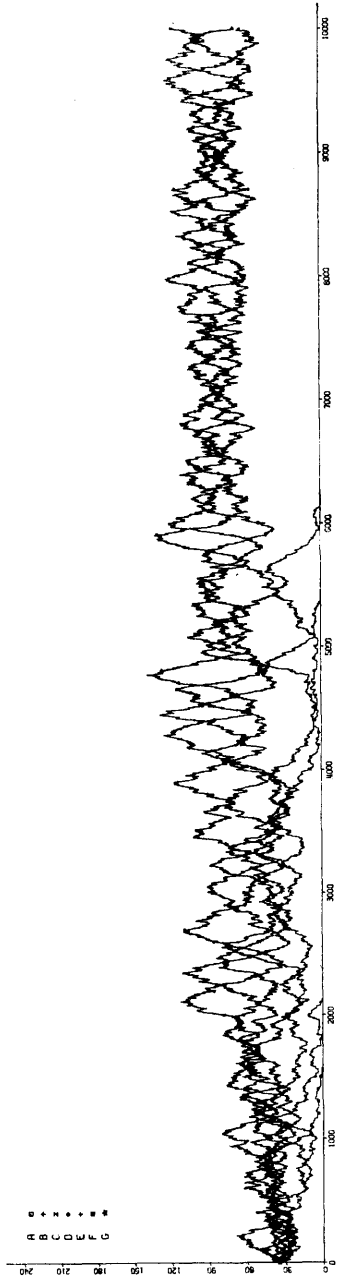


Fig. 5

PROBLEM 0
EX. 2.1

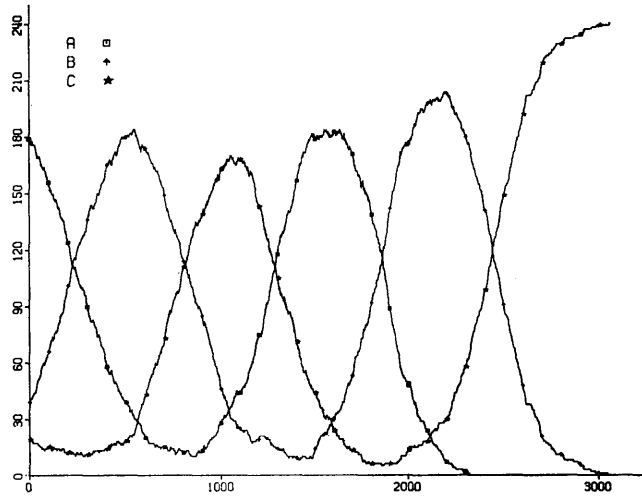


Fig. 6 a

PROBLEM 0
EX. 3.2

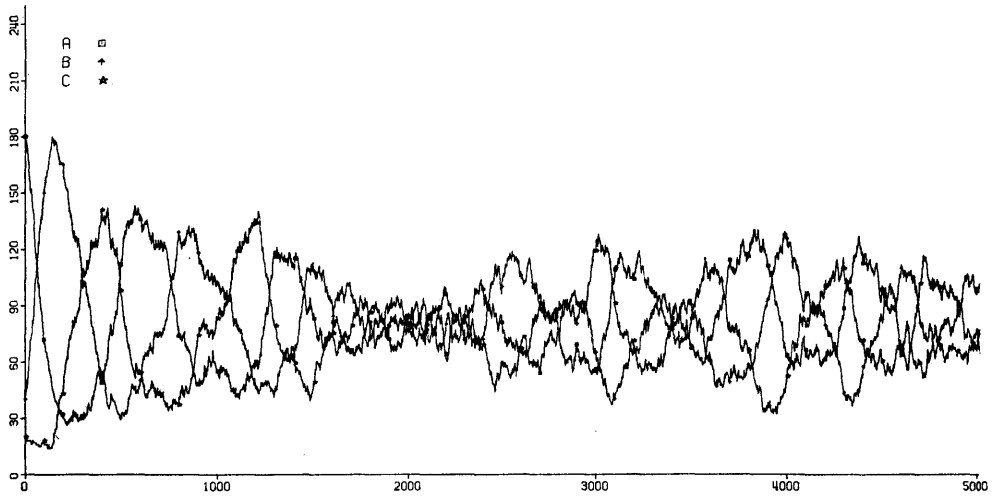
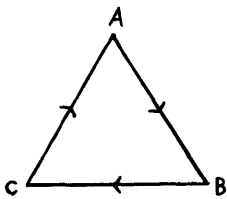


Fig. 6 b



のようになっている。ステップ0では
 $n_A=180, n_B=40, n_C=20$
 というようになっている。

モデル1の場合

$$E(X_A(t+1) X_B(t+1) X_C(t+1) | X_A(t) X_B(t) X_C(t))$$

$$= \left(1 - 2 \frac{{}^3C_2}{n^2}\right) X_A(t) X_B(t) X_C(t)$$

なる関係がある。

モデル2の場合

$$E(X_A(t+1) X_B(t+1) X_C(t+1) | X_A(t), X_B(t), X_C(t))$$

$$= \left[1 + \frac{3}{2n^3} \{(X_A(t) - X_B(t))^2 + (X_B(t) - X_C(t))^2\right.$$

$$\left. + (X_C(t) - X_A(t))^2 - 14n + 14\right] X_A(t) X_B(t) X_C(t)$$

が成立している。

このことから、3体衝突にもとづいた系は2体衝突にもとづいた系にくらべてかなり安定であることが予想される。Fig. 6a と Fig. 6b を比較すれば納得できる。

$X_A(t) + X_B(t) + X_C(t) = 240$ なる平面上で考える。モデル2の場合

$(X_A(t) - X_B(t))^2 + (X_B(t) - X_C(t))^2 + (X_C(t) - X_A(t))^2 - 14n + 14 = 0$ なる閉曲線 C の内側では積の Expectation は減少し、外側では増加する。 $(X_A(t), X_B(t), X_C(t))$ は閉曲線 C の周辺を徘徊するのである。

II. 個体数が十分に大なる場合

個体数が十分に大なる場合、微分方程式としてとりあつかうことが適切である。ここでは2体衝突にもとづいている場合について先ず説明する。さらに3体衝突の項が加わった場合についても述べる。話を簡単にするために3種からなる系についてだけ考えることにする。

§ 1. Lotka-Volterra 方程式をみちびくこと

モデル1において粒子数を無限大にもって行くと Lotka-Volterra の式が得られる。次のようなモデルを考える。

i) ひとつの箱のなかに①から $2k+1$ までの種がはいっていて、それぞれの種の粒子数は $n_1, n_2, \dots, n_{2k+1}$ である。さらに

$$\sum_{i=1}^{2k+1} n_i = n$$

が成立しているとする。

ii) どの種も対等である。

iii) 単位時間内にどの粒子も平均して一回衝突する。どの pair の衝突も同程度におきやすいとする。

ここでは話を種の数3の場合に限る。1は2よりも強く、2は3よりも強く、3は1よりも強いとする。粒子数を連続な量とみなしてよいとすれば、それぞれの粒子数の変化は次の方程式で記述される。

$$\frac{\partial}{\partial t} n_1 = \frac{n_1}{n} n_1 + \frac{n_2}{n} n_1 + \frac{n_1}{n} n_2 - n_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_2 = \frac{n_2}{n} n_2 + \frac{n_3}{n} n_2 + \frac{n_2}{n} n_3 - n_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_3 = \frac{n_3}{n} n_3 + \frac{n_1}{n} n_3 + \frac{n_3}{n} n_1 - n_3$$

1 の粒子 n_1 個のうち **1** の粒子と衝突するものの割合は n_1/n であり **2** の粒子と衝突するものの割合は n_2/n である。よって **1** の粒子のうちの $n_1/n + n^2/n$ は **1** のままとどまる。**2** の粒子 n_2 個のうち $(n_1/n)n_2$ は **1** に変化する。よって単位時間での n_1 の変化は

$$\frac{n_1}{n} n_1 + \frac{n_2}{n} n_1 + \frac{n_1}{n} n_2 - n_1$$

となる。

このことより (3) 式を理解することができる。実際には粒子数というものは不連続な量であり、粒子数が有限の場合はストカスティックなモデルとしてあつかうべきものである。

粒子数が無限大の場合

$$(n_1/n, n_2/n, n_3/n) \equiv (P_1, P_2, P_3)$$

とおけば

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_1 = P_1^2 + P_2 P_1 + P_1 P_2 - P_1 \\ \frac{\partial}{\partial t} P_2 = P_2^2 + P_3 P_2 + P_2 P_3 - P_2 \\ \frac{\partial}{\partial t} P_3 = P_3^2 + P_1 P_3 + P_3 P_1 - P_3 \end{cases}$$

と記述される。

衝突規則を次のような代数的な規則であらわすことができる。

$$(4) \quad \begin{cases} E_1 \cdot E_1 = E_1, & E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_1 = E_1 \\ E_2 \cdot E_2 = E_2, & E_2 \cdot E_3 = E_3 \cdot E_2 = E_2 \\ E_3 \cdot E_3 = E_3, & E_3 \cdot E_1 = E_1 \cdot E_3 = E_3 \end{cases}$$

E_1, E_2, E_3 を base とし, $P_1 E_1 + P_2 E_2 + P_3 E_3$ なる一次結合からなる線型空間を考える。

さらに $(P_1 E_1 + P_2 E_2 + P_3 E_3) \cdot (P_1' E_1 + P_2' E_2 + P_3' E_3)$

なる積を定義する。分配法則がなりたつようにすれば (3) 式を次のようにあらわすことができる。

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) = \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) - \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right)$$

代数的な規則に確率をいれたものを考える。つまり **1** と **2** が衝突した場合、確率 $1 - P_{12}$ で **1** は **2** にかわり P_{12} で **1** にとどまる。**2** は確率 P_{12} で **1** にかわり $1 - P_{12}$ で **2** のままだいる。

この場合代数的な規則は次のようになる。

$$(6) \quad \begin{cases} E_1 \cdot E_1 = E_1 & E_1 \cdot E_2 = E_2 \cdot E_1 = P_{12} E_1 + (1 - P_{12}) E_2 \\ E_2 \cdot E_2 = E_2 & E_2 \cdot E_3 = E_3 \cdot E_2 = P_{23} E_2 + (1 - P_{23}) E_3 \\ E_3 \cdot E_3 = E_3 & E_3 \cdot E_1 = E_1 \cdot E_3 = P_{31} E_3 + (1 - P_{31}) E_1 \end{cases}$$

(6) の上で (5) を考えると、次の式がでてくる。

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} P_1 = \{ (1 - 2P_{12}) P_2 + (2P_{31} - 1) P_3 \} P_1 \right.$$

$$(7) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_2 = \{2P_{12} - 1\} P_1 + (1 - 2P_{23}) P_3 \} P_2 \\ \frac{\partial}{\partial t} P_3 = \{(1 - 2P_{31}) P_1 + (2P_{23} - 1) P_2\} P_3 \end{cases}$$

これは Lotka-Volterra の式である.

$$(8) \begin{cases} \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} N_1 = (a_{12} N_2 + a_{31} N_3) N_1 \\ \beta_2 \frac{\partial}{\partial t} N_2 = (-a_{12} N_1 + a_{23} N_3) N_2 \\ \beta_3 \frac{\partial}{\partial t} N_3 = (-a_{31} N_1 - a_{23} N_2) N_3 \end{cases}$$

なる式は Lotka-Volterra の式とよばれていて

$1 - 2P_{12}$ と a_{12} , $2P_{31} - 1$ と a_{31} , $1 - 2P_{23}$ と a_{23} という対応を考えることができる.

たとえばネズミ一匹とライオン一匹を同じとみなすのは不自然なわけであるが $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ により修正することができる. 衝突にもとづいたモデルをたてることで食う食われるの関係がより明確になり Lotka-Volterra の式を自然にみちびくことができるのである.

§ 2. 粒子の密度が高い場合の生存競争の方程式

気体分子の運動の統計的性質は Boltzmann 方程式によりとりあつかわれる. Boltzmann 方程式は 2 体衝突にもとづいていて, 稀薄なガスについてのみ適用される. 稀薄でない場合, 3 体衝突あるいはそれ以上の n 体衝突をも考えにいれるという方法がある. それはこの場合にも適用される. 先ず 3 体衝突のみからなる系を記述する微分方程式を考える. つまり (2) のもとでの次の微分方程式を考える.

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) = \left[\left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) \right] - \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right)$$

(9) を次のように書くこともできる.

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} P_1 = P_1 (-P_2^2 + 2P_3^2 + P_3 P_1 - 2P_1 P_2) \\ \frac{\partial}{\partial t} P_2 = P_2 (-P_3^2 + 2P_1^2 + P_1 P_2 - 2P_2 P_3) \\ \frac{\partial}{\partial t} P_3 = P_3 (-P_1^2 + 2P_2^2 + P_2 P_3 - 2P_3 P_1) \end{cases}$$

この場合, 次の式が成立する.

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \log P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} \{ (P_1 - P_2)^2 + (P_2 - P_3)^2 + (P_3 - P_1)^2 \} \geq 0$$

2 体衝突と 3 体衝突を考慮にいれると生存競争の方程式は次のようになる.

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) = C_1 \left[\left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) - \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) \right]$$

$$+ C_2 \left[\left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) \right] \cdot \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) - \left(\sum_{i=1}^3 P_i E_i \right) \right]$$

(4) のもとで (12) を考えることができる。3 体衝突の項がきいてくると系はある attracter に近づいて行く。この場合 (P_1, P_2, P_3) は $(1/3, 1/3, 1/3)$ に近づいて行く。

(6) の上で (12) を考えることもできる。その場合の数値計算の結果が Fig. 7 である。

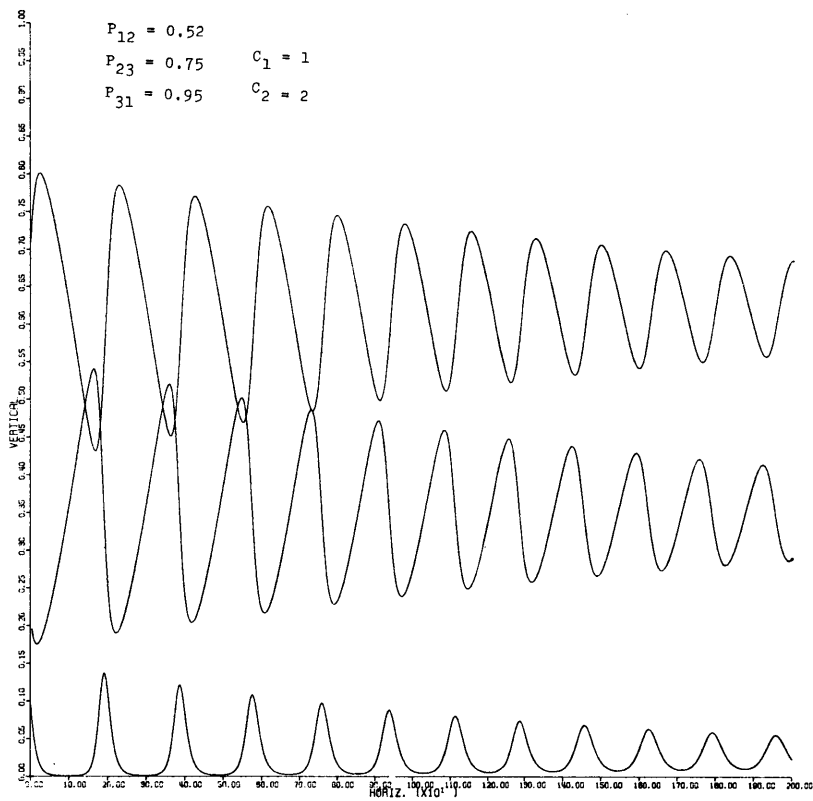


Fig. 7 a

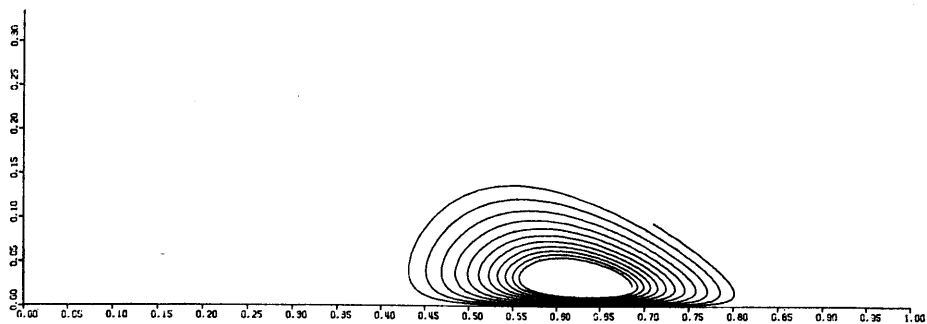


Fig. 7 b

参 考 文 献

- [1] Cohen, E.G.D. (1973). The generalization of the Boltzmann equation to higher densities, The Boltzmann equation (E.G.D. Cohen and W. Thirring, Ed) Springer-Verlag, Wien New York, p 157-176.
- [2] Dorfman, J.R. (1973). Velocity correlation functions for moderately dense gases, The Boltzmann equation (E.G.D. Cohen and W. Thirring, Ed) Springer-Verlag, Wien New York, p 209-222.
- [3] Itoh, Y. (1971) Boltzmann equation on some algebraic structure concerning struggle for existence, Proc. Japan Acad., 47, Supple I.
- [4] Itoh, Y. (1973). On a ruin problem with interaction, Ann. Inst. Math., 25, No. 3.
- [5] 伊藤栄明 (1973) 「生存競争のモデル」日科技連数学計画シンポジウム報文シリーズ No.27, 生態系のモデルと制御.
- [6] Itoh, Y. (1974). A mathematical theory on the struggle for existence, Research Memorandum No. 58, The Institute of Statistical Mathematics.
- [7] Itoh, Y. (1974). Competing species and three-particle collision, Research Memorandum No. 65, The Institute of Statistical Mathematics.
- [8] Kac, M. (1959). Probability and related topics in the physical science, New York.
- [9] Sengers, J.V. (1973). The three-particle collision term in the generalized Boltzmann equation, The Boltzmann equation (E.G.D. Cohen and W. Thirring, Ed) Springer-Verlag, Wien New York.
- [10] Volterra, V. (1931). Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie, Cahiers scientifiques, VII, Gauthier-Villars, Paris.