待ち行列タイプの問題に対する パレート分析

茨城大学 牧　野　都　治

(1975年11月　受付)

Pareto Analysis for a Queueing Type Problem

Toji Makino
(Ibaraki University)

There are many problems that is a convenience to be analysed by queueing theory. However we often meet to problems which have difficulty in finding the solution by the theory. In this note, we shall illustrate that the Pareto Analysis is useful to solve a complicated problem of queueing type.

§1. はじめに

在庫管理の分野では，よくABC分析が用いられる[1].

累積品目数百分率を横軸，累積金額百分率を縦軸にとり，図1のように，

とくに変化のはげしい部分をA（高使用金額），

それにつぐ部分をB（中使用金額），

変化のゆるやかな部分をC（低使用金額）

として管理する，1種のパレート分析である.

小論のねらいは，解析的に面倒な次の待ち行列タイプの問題を1例としてとりあげた場合，このようなパレート分析を施すことによって，実用的な解を容易に求め得ることを提案するところにある.

問題というのは，次のようなものである.

ある写真製版会社で，処理能力が一定の数台の写植機を使用している．表1[2]は2月および3月における受注状況を示す累積百分率であるが，それらのパレート図を同じ図面上にかいてみると，2つの曲線がぴったりと重ってしまうことがわかる．3月は2月に比して受注が多く，金額もかさむが，1件あたりの金額の分布は安定しているとみてよいわけである.

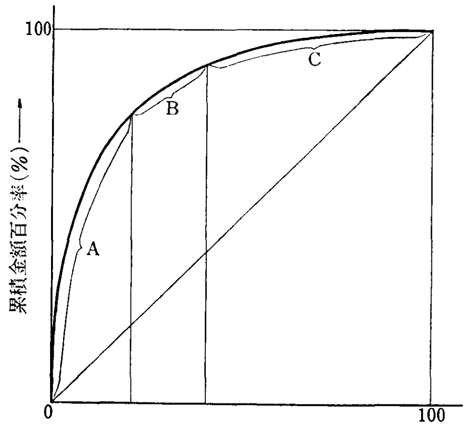


図 1.　ABC分析

ちなみにこのことを，1年間のすべての月について調べてみたが，それらのパレート図が殆んどすべてぴたりと重なりあっている.

さて，過去の経験によれば，作業に要する時間は，1件あたり金額に比例すると考えてよい．したがって個々の仕事は，受注時において，何分を要する仕事であるかがわかっている．この

表1　受　注　状　況

階　　級	2月分 受注件数	2月分 金額	2月分 累積金額百分率	2月分 累積件数百分率	3月分 受注件数	3月分 金額	3月分 累積金額百分率	3月分 累積件数百分率
	件	円	%	%	件	円	%	%
3,900円以上	31	247,700	29.4	4.1	43	308,700	30.4	4.8
3,700～3,900 以上　未満	3	11,300	30.8	4.5	4	15,000	31.9	5.2
3,500～3,700	5	17,800	32.9	5.1	5	17,800	33.6	5.8
3,300～3,500	3	10,200	34.1	5.5	7	23,600	36.0	6.5
3,100～3,300	10	31,900	37.9	6.8	4	12,700	37.2	7.0
2,900～3,100	9	27,000	41.1	8.0	7	20,800	39.3	7.8
2,700～2,900	6	16,700	43.1	8.8	12	33,400	42.5	9.1
2,500～2,700	12	30,500	46.7	10.4	12	30,600	45.6	10.4
2,300～2,500	2	4,800	47.3	10.6	11	26,000	48.1	11.6
2,100～2,300	9	19,400	49.6	11.8	9	19,500	50.0	12.6
1,900～2,100	20	39,800	54.3	14.4	22	43,600	54.3	15.1
1,700～1,900	13	23,000	57.0	16.1	19	33,400	57.6	17.2
1,500～1,700	21	30,700	60.7	18.9	32	48,900	62.4	20.7
1,300～1,500	23	31,200	64.4	21.9	26	35,200	65.9	23.6
1,100～1,300	44	51,100	70.4	27.7	41	47,000	70.5	28.1
900～1,100	47	45,600	75.9	33.8	63	60,500	76.5	35.1
700～　900	73	53,800	82.3	43.4	86	64,000	82.8	44.6
500～　700	123	67,700	90.3	59.5	139	75,550	90.2	60.0
300～　500	155	53,800	96.7	79.8	196	68,050	96.9	81.7
300円未満	154	27,900	100.0	100.0	165	31,000	100.0	100.0
計	763	841,900	—	—	903	1,015,300	—	—

ような状況の下で,「n 台の写植機を，金額のかさむ仕事から順次ふりわけて使うには，どうしたらよいか」が問題になった．もっとも，単に能率上の面からだけ考察すれば，わざわざふりわけないで，どちらの写植機にかけてもよいとしておくのが効果的ではあるが，会社では経営上の都合でふりわけて使いたい事情があった．(注．この問題と切り離して考えると，一般には仕事をふりわけなければならない場面にしばしば遭遇する．たとえば，2つの離れた場所で仕事が行なわれている場合のように.)

以下，説明を簡単にするために，主として $n=2$ の場合について述べる．すなわち，2台の写植機AとBに，金額の小さい方の仕事と大きい方の仕事をふりわけるのに，いくら以下をA，いくら以上をBにまわしたらよいかという問題を扱うことにする．

これについてのパレート分析にもとづく解が，次のようにして容易に求められる．写植機が2台なので，累積金額百分率の50%点でAとBにふりわければよい．(n 台の場合には，累積金額百分率の n 等分点に対応する階級ごとにわければよい.）したがって，大体2100円未満をA，それ以上をBにまわすことにすればよいことが，表1からすぐわかる．これが1つの解である．

これを，格好の待ち行列型の問題だからといって，キチンと解析してみようとすると，$n=2$ の場合ですら簡単にはいかない．次節で，その辺の事情を探ってみることにしたい．

§2.　待ち行列による解析

問題を一層やさしくすることにして，仕事の到着はポアソン分布，サービス時間（写植に要

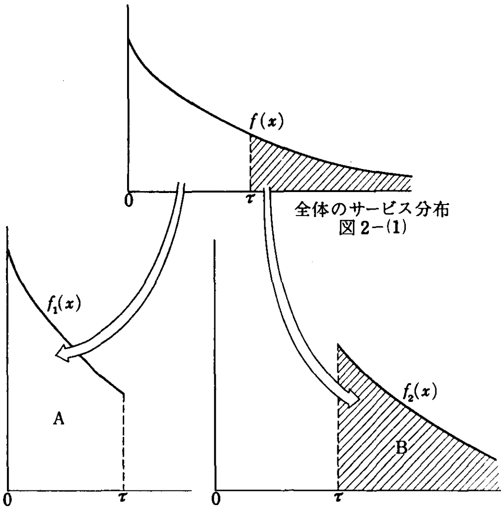
する時間）は指数分布にしたがうものとしてみよう．すなわち，本来のサービス分布は（金額を時間に換算して）図 2-(1) のようになっているとしたとき，これを図 2-(2)，図 2-(3) のように，τ 未満のものとそれ以上のものとにわけて，それぞれ写植機 A, B でサービスしようというわけである．

ここで，写植機 A でのサービス時間を X_1，B でのサービス時間を X_2 とし，それらについての確率密度関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，平均などを，本来の（図 2-(1) に対する）

$\lambda=$ 到着率，$\mu=$ サービス率，

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\text{利用率}$$

をつかって表わしてみると，次のようになる．



全体のサービス分布
図 2-(1)

写植機Aでの
サービス分布
図 2-(2)

写植機Bでの
サービス分布
図 2-(3)

写植機 A について；

$$f_1(x)=\begin{cases}\mu e^{-\mu x}/(1-e^{-\mu\tau}) & (0<x<\tau)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$$E(X_1)=\frac{1}{1-e^{-\mu\tau}}\left\{\frac{1}{\mu}-\left(\tau+\frac{1}{\mu}\right)e^{-\mu\tau}\right\}$$

$$E(X_1{}^2)=\frac{1}{1-e^{-\mu\tau}}\left\{\frac{2}{\mu^2}-\left(\tau^2+\frac{2\tau}{\mu}+\frac{2}{\mu^2}\right)e^{-\mu\tau}\right\}$$

$$\lambda_1=A\text{ への到着率}=\lambda(1-e^{-\mu\tau})$$

$$\rho_1=A\text{ での利用率}=\lambda\left\{\frac{1}{\mu}-\left(\tau+\frac{1}{\mu}\right)e^{-\mu\tau}\right\}$$

写植機 B について；

$$f_2(x)=\begin{cases}\mu e^{-\mu(x-\tau)} & (\tau\leq x)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$$E(X_2)=\tau+\frac{1}{\mu}$$

$$E(X_2{}^2)=\tau^2+\frac{2\tau}{\mu}+\frac{2}{\mu^2}$$

$$\lambda_2=B\text{ への到着率}=\lambda e^{-\mu\tau}$$

$$\rho_2=B\text{ での利用率}=\lambda\left(\tau+\frac{1}{\mu}\right)e^{-\mu\tau}$$

この場合，

$$\rho_1+\rho_2=\frac{\lambda}{\mu}=\rho$$

になっていることは興味深い．どんな τ でふりわけても，それぞれの利用率の和は全体の利用

率に等しいわけであるが，この性質は指数サービスでなく，一般サービスにおいても成り立つこのことを **ρー不変律**とよぶことにしよう．ρー不変律についての証明は次節で与えられる．

さて，どんな τ でふりわけたらよいかを考える1つの尺度として，2つの機械 A, B での系平均人数 L_1, L_2 の和を最小にするような τ を求めることにしてみる．そのために，$M/G/1$ における公式（ポラツェク・ヒンチン・ケンドールの式）

$$L=\rho+\frac{\lambda^2\cdot\nu_2}{2(1-\rho)}$$

を用いる．ただし ν_2 はサービス分布の2次モーメントである．もちろん，

写植機 A では

$$L_1=\rho_1+\frac{\lambda_1{}^2\cdot E(X_1{}^2)}{2(1-\rho_1)}$$

写植機 B では

$$L_2=\rho_2+\frac{\lambda_2{}^2\cdot E(X_2{}^2)}{2(1-\rho_2)}$$

である．したがって

「$\lambda_1+\lambda_2=\lambda$（一定）のとき

$$L_1+L_2=\left\{\rho_1+\frac{\lambda_1{}^2\cdot E(X_1{}^2)}{2(1-\rho_1)}\right\}+\left\{\rho_2+\frac{\lambda_2{}^2\cdot E(X_2{}^2)}{2(1-\rho_2)}\right\}$$

を最小にする τ を求める」ことになる．もっとも，ρ-不変律が成り立つので，$\{L_1+L_2\}$ を最小にする代りに，単に

$$\frac{\lambda_1{}^2\cdot E(X_1{}^2)}{2(1-\rho_1)}+\frac{\lambda_2{}^2\cdot E(X_2{}^2)}{2(1-\rho_2)}$$

を最小にする τ を求めてもよい．（一般に，系平均人数 L と列平均人数 $L(q)$ との間に

$$L=L(q)+\rho$$

という関係が成り立つので，これは系平均人数の和が最小になるように τ を決める代りに，列平均人数の和が最小になる τ を求めてもよいことを意味している．）

しかし，この計算が厄介である．そこで，資料にもとづいて，いろいろなわけ方をした場合の列平均人数を調べ，最適な τ を求めてみる．

表 2-(1) 2月分の資料に基づくふりわけ効果の比較

(λ=0.06358 件/分)

区分	写植機 A			写植機 B			列平均人数の和；$\{L_1(q)+L_2(q)\}$
	ρ_1	$E(X_1{}^2)$	$L_1(q)$	ρ_2	$E(X_2{}^2)$	$L_2(q)$	
① 2500円以上と未満にかけた場合	0.748	275	1.77	0.655	12287	0.78	2.55
② 2300円 〃	0.740	268	1.67	0.663	12040	0.80	2.47
③ 2100円 〃	0.708	247	1.33	0.695	11022	0.98	2.31
④ 1900円 〃	0.641	206	0.85	0.762	9306	1.64	2.49
⑤ 1700円 〃	0.603	185	0.66	0.800	8455	2.22	2.88

表 2-(2)　3月分の資料に基づくふりわけ効果の比較

(λ=0.07525件/分)

区　分	写植機A			写植機B			列平均人数の和；$\{L_1(q)+L_2(q)\}$
	δ_1	$E(X_1^2)$	$L_1(q)$	δ_2	$E(X_2^2)$	$L_2(q)$	
① 2500円以上と未満にわけた場合	0.921	298	8.57	0.771	11440	1.52	10.09
② 2300円 〃	0.878	271	4.91	0.814	10476	2.13	7.04
③ 2100円 〃	0.845	253	3.53	0.847	9797	2.88	6.41
④ 1900円 〃	0.773	215	1.93	0.919	8466	6.71	8.64
⑤ 1700円 〃	0.717	189	1.30	0.975	7580	25.27	26.57

金額のサービス時間への換算は，1000円の仕事が約20分ということになっている．さらに，表1における2月分データでの到着率 λ は大体0.06358（件/分），3月分の λ は0.07525（件/分）と考えてよい．このことを用いて，次の5つのわけ方をした場合の $\{L_1(q)+L_2(q)\}$ の値を求めれば，表2のようになる．

①案‥‥2500円以上と未満でわけた場合
②案‥‥2300円以上と未満　〃
③案‥‥2100円以上と未満　〃
④案‥‥1900円以上と未満　〃
⑤案‥‥1700円以上と未満　〃

ただし，表2-(1)は2月分，表2-(2)は3月分の資料にもとづく値である．

このことから，いずれの場合も③案，つまり2100円以上のものとそれ未満とにふりわけるのがよいことがわかるが，いまの場合，結果的には，パレート分析にもとづく解と同じものになっている．

§3.　パレート分析による解についての評価

一般に，累積金額百分率を $100y\%$（ただし時間に換算しているものとする），累積品目数百分率（いまの場合，累積受注件数百分率）を $100x\%$ とすると，x と y との間に次の関係式が成り立つ．

$$x=\int_t^\infty f(x)\,dx$$

$$y=\mu\int_t^\infty x\cdot f(x)\,dx \qquad (\mu\text{ はサービス率})$$

そして写植機A, Bでのサービス率をそれぞれ μ_1, μ_2 とすると

$$\frac{1}{\mu_1}=E(X_1)=\frac{1}{F(\tau)}\int_0^\tau x\cdot f(x)\,dx \qquad \left(\text{ただし，} F\left(\tau=\int_0^\tau f(x)\,dx\right)\right.$$

$$\frac{1}{\mu_2}=E(X_2)=\frac{1}{1-F(\tau)}\int_\tau^\infty x\cdot f(x)\,dx$$

また，λ_1, λ_2 は

$$\lambda_1 = \lambda \cdot F(\tau)$$
$$\lambda_2 = \lambda \cdot (1 - F(\tau))$$

であるから

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \lambda \cdot \int_0^\tau x \cdot f(x)\,dx$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \lambda \cdot \int_\tau^\infty x \cdot f(x)\,dx$$

したがって

$$\rho_1 + \rho_2 = \lambda \cdot \int_0^\tau x \cdot f(x)\,dx + \lambda \cdot \int_\tau^\infty x \cdot f(x)\,dx$$
$$= \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

これが §2 で述べた ρ-不変律である．

ここで，最適なわりふりを考えるための１つの尺度として，

$$(*) \quad \rho_1 = \rho_2$$

となるようにわけるという政策をとることにしてみると，パレート図の累積金額百分率（いまの場合，累積サービス時間百分率）の 50% 点でふりわけることと一致することが，次のようにしてわかる．式 (*) が成り立つというのは，

$$\lambda \cdot \int_0^\tau x \cdot f(x)\,dx = \lambda \cdot \int_\tau^\infty x \cdot f(x)\,dx$$

にほかならないので，両辺に $\frac{\mu}{\lambda}$ を掛けて

$$\mu \cdot \int_0^\tau x \cdot f(x)\,dx = \mu \cdot \int_\tau^8 x \cdot f(x)\,dx$$

これらがいずれも $\frac{1}{2}$ になることは $\mu \int_0^\infty x \cdot f(x)\,dx = 1$ からわかる．

以上，２分割の場合について考察したが，一般に n 分割であっても，上の議論がそのまま成り立つ．すなわち，$\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_n$ となるようなわけ方を，パレート図の累積金額百分率を n 等分することによって求めることができる．利用率が等しくなるようにわけるこのような分割は，１つの最適なわけ方を意味するものであるが，ここでの方法はその意味での最適解を提供していることになる．また，このようなパレート分析を用いるのであれば，到着分布とかサービス分布にとらわれることなしに解を求めることができて，至って実用的である．これが，この方法の長所ではあるが，分布にとらわれずに解を求め得るということは，解析的に評価した場合，それがまたこの方法の短所でもあるというべきかもしれない．

謝辞　査読者の方々から細部にわたり有益な御助言をたまわりましたことに対し，あつくお礼申します．

文　　献

［1］ 日本工業規格「オペレーションズリサーチ用語」 日本規格協会（1967）
［2］ 拙著 「OR する技術」 日本経営出版会（1971）