

# 動く調査対象集団に対する標本調査について—IX

—一方探測定誤差に基く位置決定誤差：小型無線機を  
装着した野兎の行動範囲決定のための基礎—

林 文

(1974年11月 受付)

Estimation of the Size of Mobil Population—IX  
—Statistical Treatment of Error on the Positional  
Determination of a Hare in a Field by Telemetry—

Fumi Hayashi

The exact and approximate formulae to evaluate statistically error on the positional determination of a hare in a field are given with examples. The conditions under the approximate method being applied are investigated with the compositions of the results by computer simulation.

The Institute of Statistical Mathematics

## 1. 問題の設定

野兎の行動範囲を知るために、野兎に小型発信機をつけて放し、これを方向探知機で追跡する方法がある。2点に置かれた2つの方探の読みから地点（発信機の位置）を決定することになるのであるが、方向の読みには誤差があり、それによる地点測定にも誤差が出てくる。そこで、測定誤差によるこの地点の分布（少くとも平均と分散）がどうなるかを考えておく必要がある。ここでは、読みの誤差の確率に2つのモデルを考えて計算してみた。又、この結果から野兎を追跡して順次得られた点を結んだ長さ、野兎の走行距離の平均二乗誤差がどうなるかを計算した。まず、方探の位置、測定角度と交点（地点）の座標との関係をみよう。

$A_1, A_2$  に方向探知機を置いて  $P_0$  を観測する。その読みを誤差を含めて、 $\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta$  とする。これによって決定される点を  $P_1$  とする。

直交座標を  $A_1A_2$  を  $X$  軸に、 $A_1$  を原点にとる。

$A_1A_2$  の距離を  $D$  とする。

$A_1P_1, A_2P_1$  の式は

$$y = \tan(\alpha + \Delta\alpha) \cdot x$$

$$y = \tan(\beta + \Delta\beta) \cdot (x - D)$$

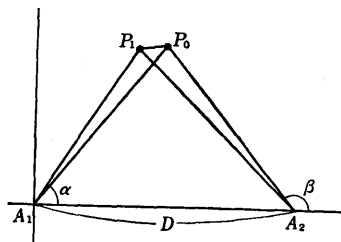


図 1

本論文の骨子は「野兎統報 No. 4, 45年5月, 統数研・新大農野兎研究グループ」に発表したものである。2(i) 厳密な計算は山田(大石)典子(統数研)によるものである。また、5. のこの方法の使用上の問題点は石田正次先生(統数研)によって指摘され、これにもとづいて検討しなおすことによって書きあらためられた。石田先生にはシミュレーションに関しても全面的に御指導をいただいた。なお本論文全般にわたって林知己夫先生(統数研)の御指導を仰いだ。ここに深く感謝の意を表するものである。

この交点  $P_1$  の座標

$$x = \frac{D \cdot \tan(\beta + \Delta\beta)}{\tan(\beta + \Delta\beta) - \tan(\alpha + \Delta\alpha)}$$

$$y = \frac{D \cdot \tan(\alpha + \Delta\alpha) \tan(\beta + \Delta\beta)}{\tan(\beta + \Delta\beta) - \tan(\alpha + \Delta\alpha)}$$

となる。

2. モデル 1 (tangent を等確率とした場合)

$$\tan \alpha = a, \tan(\alpha + \Delta\alpha) - \tan \alpha = \varepsilon$$

$$\tan \beta = b, \tan(\beta + \Delta\beta) - \tan \beta = \eta$$

としたとき,  $\varepsilon, \eta$  がそれぞれ独立に  $[-L, L], [-M, M]$  で一様分布をとする。

i) 厳密な計算

$$A_1P, A_2P \text{ の式は } y = (a + \varepsilon)x$$

$$y = (b + \eta)(x - D)$$

$$\varepsilon, \eta \text{ の同時分布の確率要素は } \frac{d\varepsilon d\eta}{4LM}.$$

$x$  座標の平均は

$$E(x) = \frac{1}{4LM} \int_{-M}^M \int_{-L}^L x d\varepsilon d\eta.$$

$$\frac{d\varepsilon d\eta}{4LM} = \frac{1}{4LM} \left| \frac{\partial(\varepsilon, \eta)}{\partial(x, y)} \right| dx dy = \frac{1}{4LM} \frac{Dy}{x^2(x-D)^2} dx dy$$

$$= \frac{1}{4LM} f(x, y) dx dy$$

但し

$$f(x, y) = \frac{Dy}{x^2(x-D)^2}$$

であるから,

$$E(x) = \frac{1}{4LM} \iint_{\mathcal{G}} x f(x, y) dy dx$$

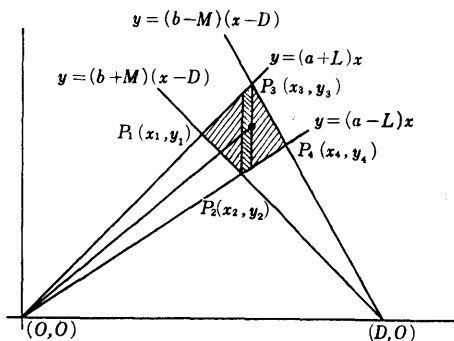


図 2

で計算される。積分領域  $\mathcal{G}$  は図 2 の斜線部分, 3つの部分に分けて積分する。

$P_1, P_2, P_3, P_4$  の  $x$  座標は

$$x_1 = \frac{b + M}{b + M - (a + L)} D$$

$$x_2 = \frac{b + M}{b + M - (a - L)} D$$

$$x_3 = \frac{b - M}{b - M - (a + L)} D$$

$$x_4 = \frac{b - M}{b - M - (a - L)} D$$

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \frac{1}{4LM} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \int_{(b+M)(x-D)}^{(a+L)x} xf(x, y)dy dx + \int_{x_3}^{x_4} \int_{(a-L)x}^{(a+L)x} xf(x, y)dy dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{x_1}^{x_4} \int_{(a-L)x}^{(b-M)(x-D)} xf(x, y)dy dx \right\} \\
 &= \frac{D}{8LM} \left\{ (a+L)^2 \left( \log \frac{D-x_3}{D-x_1} + \frac{D}{D-x_3} - \frac{D}{D-x_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (a-L)^2 \left( \log \frac{D-x_2}{D-x_4} + \frac{D}{D-x_2} - \frac{D}{D-x_4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (b+M)^2 \log \frac{x_1}{x_2} + (b-M)^2 \log \frac{x_4}{x_3} \right\}
 \end{aligned}$$

これに上の  $x_1, x_2, x_3, x_4$  の値を代入すると,

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \frac{D}{8LM} \left\{ (a+L)^2 \log \frac{a+L-(b+M)}{a+L-(b-M)} + (a-L)^2 \log \frac{a-L-(b-M)}{a-L-(b+M)} \right. \\
 &\quad \left. + (b+M)^2 \log \frac{a-L-(b+M)}{a+L-(b+M)} + (b-M)^2 \log \frac{a+L-(b-M)}{a-L-(b-M)} \right\} + \frac{D}{2}
 \end{aligned}$$

となる.

分散は  $\sigma_x^2 = E(x^2) - \{E(x)\}^2$ ,  $E(x^2)$  は

$$\begin{aligned}
 E(x^2) &= \frac{1}{4LM} \iint_{\mathcal{G}} x^2 f(x, y) dy dx \\
 &= \frac{D^2}{4LM} \left\{ (a+L)^2 \log \frac{a+L-(b+M)}{a+L-(b-M)} + (a-L)^2 \log \frac{a-L-(b-M)}{a-L-(b+M)} \right\} + D^2
 \end{aligned}$$

又,  $y$  の平均は

$$E(y) = \frac{1}{4LM} \iint_{\mathcal{G}} y f(x, y) dy dx$$

分散は

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^2 &= E(y^2) - \{E(y)\}^2 \\
 &= \frac{1}{4LM} \iint_{\mathcal{G}} y^2 f(x, y) dy dx - \{E(y)\}^2
 \end{aligned}$$

で計算される.

$$\begin{aligned}
 E(y) &= \frac{D}{12LM} \left\{ (a+L)^3 \log \frac{a+L-(b+M)}{a+L-(b-M)} + (a-L)^3 \log \frac{a-L-(b-M)}{a-L-(b+M)} \right. \\
 &\quad \left. + (b+M)^3 \log \frac{a-L-(b+M)}{a+L-(b+M)} + (b-M)^3 \log \frac{a+L-(b-M)}{a-L-(b-M)} \right\} \\
 &\quad + \frac{2}{3} (a-b)D
 \end{aligned}$$

$$E(y^2) = \frac{D^2}{8LM} \left\{ (a+L)^4 \log \frac{a+L-(b+M)}{a+L-(b-M)} + (a-L)^4 \log \frac{a-L-(b-M)}{a-L-(b+M)} \right\}$$

$$-(b+M)^4 \log \frac{a-L-(b+M)}{a+L-(b+M)} - (b-M)^4 \log \frac{a+L-(b-M)}{a-L-(b-M)} \Big| \\ + \frac{D^2}{2} \{3(a^2+b^2) + 2ab + L^2 + M^2\}$$

## (ii) 簡便法

モデル1で簡便法で計算してみる.

$a, b$  を誤差を含めた変数とすれば,  $P$  の座標は

$$x = \frac{b}{b-a} D$$

$$y = \frac{ab}{b-a} D$$

$a, b$  の誤差  $\Delta a, \Delta b$  が等確率, 平均0であるから  
 $x$  の変化

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial x}{\partial b} \Delta b$$

の平均は

$$E(dx) = E\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) E(\Delta a) + E\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right) E(\Delta b) = 0$$

となる.

平均二乗誤差  $\tau_x^2$  に

$$\tau_x^2 = E(dx^2) = E\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial x}{\partial b} \Delta b\right)^2\right\} \\ = E\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \Delta a\right)^2\right\} + E\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \Delta a\right)\left(\frac{\partial x}{\partial b} \Delta b\right)\right\} + E\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial b} \Delta b\right)^2\right\}$$

第1項は

$$E\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \Delta a\right)^2\right\} = E\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2\right\} E\{(\Delta a)^2\} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2\right]_0 \sigma_a^2$$

但し  $[\ ]_0$  は  $a=a_0, b=b_0$  を代入したもの,  $a_0, b_0$  は  $a, b$  の正しい値とする.

第2項は  $\Delta a, \Delta b$  が独立だから

$$E\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \Delta a\right)\left(\frac{\partial x}{\partial b} \Delta b\right)\right\} = E\left(\frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial x}{\partial b}\right) E(\Delta a \cdot \Delta b) = 0$$

従って

$$\tau_x^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2\right]_0 \sigma_a^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2\right]_0 \sigma_b^2.$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{b}{(b-a)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{a}{(b-a)^2}$$

だから

$$\tau_x^2 = \left(\frac{b_0}{(b_0-a_0)^2} D\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{a_0}{(b_0-a_0)^2} D\right)^2 \sigma_b^2$$

同様に  $\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{b^2}{(b-a)^2}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial b} = \frac{a^2}{(b-a)^2}$  を用いて

$$\tau_y^2 = \left( \frac{b_0^2}{(b_0 - a_0)^2} D \right)^2 \sigma_a^2 + \left( \frac{a_0^2}{(b_0 - a_0)^2} D \right)^2 \sigma_b^2$$

(iii) 厳密な計算と簡便法の比較

(i), (ii) の結果を実際に計算した結果で比較してみる (表 1). ここに  $D=1000\text{m}$   
 $L = \tan \alpha - \tan(\alpha - 2^\circ)$ ,  $M = \tan \beta - \tan(\beta + 2^\circ)$ .

表 1.  $x, y$  の平均, 分散 (平均二乗誤差) の厳密な計算と簡便法の比較 (tangent 等確率)

$\alpha$	$\beta$	厳密な計算				簡便法			
		$E(x)$	$E(y)$	$\sigma_x^2$	$\sigma_y^2$	$E(x)$	$E(y)$	$\tau_x^2$	$\tau_y^2$
5	175	500.0	424	6928.9	54.4	500.0	437	6698.8	51.3
10	170	500.0	87.6	1730.9	54.2	500.0	88.2	1716.6	53.4
20	160	500.0	181.6	480.7	63.7	500.0	181.9	479.3	63.5
30	150	500.0	288.4	259.7	86.4	500.0	288.7	259.4	86.5
45	135	500.0	499.6	189.9	189.4	500.0	500.0	189.7	189.7
60	120	500.0	865.2	241.3	722.6	500.0	866.0	241.0	723.1
30	120	749.8	432.7	141.1	432.7	750.0	433.0	140.7	241.4
45	120	633.8	633.5	185.9	348.3	634.0	634.0	185.6	349.0

(ii) の  $\sigma_a^2, \sigma_b^2$  は  $\sigma_a^2 = \frac{(2L)^2}{12} = \frac{L^2}{3}$ ,  $\sigma_b^2 = \sigma_a^2$  として計算した.

簡便法によっても, 平均, 分散 (平均二乗誤差) に関し, ほとんど差がないということがわかった.

簡便法による計算で十分間に合うことが知られる.

### 3. モデル 2 (角度を等確率とした場合)

今度は角度を等確率とした場合を簡便法でもとめる.

$\alpha, \beta$  を誤差を含めた変数として,  $P$  の座標は

$$x = \frac{\tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha} D$$

$$y = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha} D$$

誤差  $\Delta\alpha, \Delta\beta$  が等確率, 平均 0, 互に独立だから  $\tau_x^2, \tau_y^2$  は 2(ii) と同様に計算される.

$$\begin{aligned} \tau_x^2 &= \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \right]_0 \sigma_a^2 + \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 \right]_0 \sigma_b^2 \\ &= \frac{D^2}{(\tan^0 \beta - \tan^0 \alpha)^4} \left\{ \frac{\tan^{2^0} \beta}{\cos^4 \alpha} \sigma_a^2 + \frac{\tan^{2^0} \alpha}{\cos^4 \beta} \sigma_b^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_y^2 &= \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 \right]_0 \sigma_a^2 + \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 \right]_0 \sigma_b^2 \\ &= \frac{D^2}{(\tan^0 \beta - \tan^0 \alpha)^4} \left\{ \frac{\tan^{4^0} \beta}{\cos^4 \alpha} \sigma_a^2 + \frac{\tan^{4^0} \alpha}{\cos^4 \beta} \sigma_b^2 \right\} \end{aligned}$$

表 2.  $x, y$  の平均二乗誤差のモデル 1, モデル 2 の比較

$\alpha$	$\beta$	モデル 1 (tangent 等確率)		モデル 2 (角度等確率)	
		$\tau_x^2$	$\tau_y^2$	$\tau_x^2$	$\tau_y^2$
5	175	6698.8	51.3	6734.6	54.0
10	170	1716.6	53.4	1734.7	53.9
20	160	479.3	63.5	490.9	65.0
30	150	259.4	86.5	270.8	90.3
45	135	189.7	189.7	203.1	203.1
60	120	241.1	723.1	270.8	812.3

たとえば  $D=1000$ ,  $\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2$  は  $\alpha, \beta$  が等確率で  $\pm 2^\circ$  動くとして  $\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = (4^\circ)^2/12 = 0.000406156$  で計算した結果表 2 のようになった。

4. 走行距離測定 (モデル 2 による簡便法)

いままでは各測定地点の誤差をみてきたが, ここでは地点をつないだ距離の誤差がどうなるかを計算してみる。モデル 2 による簡便法によって計算してみよう。簡便法によっても大過のないことがこれまでに示されてきたからである。

(i) 2 点間の距離

まず 2 点  $P_i, P_{i+1}$  のきよりについて計算する。

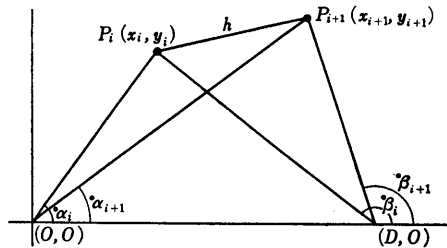


図 3

$$x_i = \frac{\tan \beta_i}{\tan \beta_i - \tan \alpha_i} D \qquad y_i = \frac{\tan \alpha_i \tan \beta_i}{\tan \beta_i - \tan \alpha_i} D$$

$$x_{i+1} = \frac{\tan \beta_{i+1}}{\tan \beta_{i+1} - \tan \alpha_{i+1}} D \qquad y_{i+1} = \frac{\tan \alpha_{i+1} \tan \beta_{i+1}}{\tan \beta_{i+1} - \tan \alpha_{i+1}} D$$

$P_i P_{i+1}$  の距離  $h$  は

$$h = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial h}{\partial x_{i+1}} dx_{i+1} + \frac{\partial h}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial h}{\partial y_{i+1}} dy_{i+1}$$

$\alpha, \beta$  の測定誤差は確率的に独立におこるものとしよう。

$$\tau^2 = E\{(dh)^2\}$$

$$= E \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial x_{i+1}} dx_{i+1} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial y_i} dy_i \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial y_{i+1}} dy_{i+1} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \right) \left( \frac{\partial h}{\partial x_{i+1}} dx_{i+1} \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \right) \left( \frac{\partial h}{\partial y_i} dy_i \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \right) \left( \frac{\partial h}{\partial y_{i+1}} dy_{i+1} \right) \right. \\
 &+ \left( \frac{\partial h}{\partial x_{i+1}} dx_{i+1} \right) \left( \frac{\partial h}{\partial y_i} dy_i \right) + \left( \frac{\partial h}{\partial x_{i+1}} dx_{i+1} \right) \left( \frac{\partial h}{\partial y_{i+1}} dy_{i+1} \right) \\
 &\left. + \left( \frac{\partial h}{\partial y_i} dy_i \right) \left( \frac{\partial h}{\partial y_{i+1}} dy_{i+1} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

ところで、

$$E \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \right)^2 \right\} = \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 \right]_0 E [(dx_i)^2] = \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 \right]_0 \tau_{x_i}$$

$$E \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \right) \left( \frac{\partial h}{\partial x_{i+1}} dx_{i+1} \right) \right\} = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_i} \right]_0 \left[ \frac{\partial h}{\partial x_{i+1}} \right]_0 E(dx_i dx_{i+1})$$

ここに、独立から  $E(dx_i dx_{i+1}) = 0$ 、 $E(dx_i dy_{i+1})$ 、 $E(dx_{i+1} dy_i)$ 、 $E(dy_i dy_{i+1})$  も 0 となるから

$$\begin{aligned}
 \tau^2 &= \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^2 \right]_0 \tau_{x_i}^2 + \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x_{i+1}} \right)^2 \right]_0 \tau_{x_{i+1}}^2 + \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial y_i} \right)^2 \right]_0 \tau_{y_i}^2 + \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial y_{i+1}} \right)^2 \right]_0 \tau_{y_{i+1}}^2 \\
 &+ 2 \left[ \frac{\partial h}{\partial x_i} \right]_0 \left[ \frac{\partial h}{\partial y_i} \right]_0 E(dx_i dy_i) + 2 \left[ \frac{\partial h}{\partial x_{i+1}} \right]_0 \left[ \frac{\partial h}{\partial y_{i+1}} \right]_0 E(dx_{i+1} dy_{i+1})
 \end{aligned}$$

但し、 $[ ]_0$  は微分したあと  $x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}$  に  ${}^0x_i, {}^0x_{i+1}, {}^0y_i, {}^0y_{i+1}$  を代入したもの。 ${}^0x_i, {}^0x_{i+1}, {}^0y_i, {}^0y_{i+1}$  は  $x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}$  の測定誤差のないときの値（測定誤差のないときの角度  ${}^0\alpha_i, {}^0\alpha_{i+1}, {}^0\beta_i, {}^0\beta_{i+1}$  に相当する）とする。

さて、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial x_i} &= -\frac{x_{i+1} - x_i}{h}, & \frac{\partial h}{\partial x_{i+1}} &= \frac{x_{i+1} - x_i}{h}, \\
 \frac{\partial h}{\partial y_i} &= -\frac{y_{i+1} - y_i}{h}, & \frac{\partial h}{\partial y_{i+1}} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h}
 \end{aligned}$$

また、 $\tau_{x_i}^2, \tau_{y_i}^2$  は 3 で求められた。すなわち

$$\tau_{x_i}^2 = \frac{D^2}{\sigma_i^4} \left\{ \frac{\tan^2 {}^0\beta_i}{\cos^2 {}^0\alpha_i} \sigma_{\alpha_i}^2 + \frac{\tan^2 {}^0\alpha_i}{\cos^4 {}^0\beta_i} \sigma_{\beta_i}^2 \right\}$$

$$\tau_{y_i}^2 = \frac{D^2}{\sigma_i^4} \left\{ \frac{\tan^4 {}^0\beta_i}{\cos^4 {}^0\alpha_i} \sigma_{\alpha_i}^2 + \frac{\tan^4 {}^0\alpha_i}{\cos^4 {}^0\beta_i} \sigma_{\beta_i}^2 \right\}$$

但し  $t_i = \tan \beta_i - \tan \alpha_i$

また、 $E(dx_i dy_i)$  はつぎのように求められる。

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_i} d\beta_i$$

$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial y_i}{\partial \beta_i} d\beta_i$$

$d\alpha_i, d\beta_i$  は独立だから

$$\begin{aligned}
 E(dx_i dy_i) &= E \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_i} (d\alpha_i)^2 + \left( \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} \frac{\partial y_i}{\partial \beta_i} + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_i} \right) d\alpha_i d\beta_i \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_i} \frac{\partial y_i}{\partial \beta_i} (d\beta_i)^2 \right\} \\
 &= \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} \right]_0 \left[ \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_i} \right]_0 \sigma_{\alpha_i}^2 + \left[ \frac{\partial x_i}{\partial \beta_i} \right]_0 \left[ \frac{\partial y_i}{\partial \beta_i} \right]_0 \sigma_{\beta_i}^2
 \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} &= \frac{\tan \beta_i}{t_i^2 \cos^2 \alpha_i} D \\
 \frac{\partial x_i}{\partial \beta_i} &= -\frac{\tan \alpha_i}{t_i^2 \cos^2 \beta_i} D \\
 \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_i} &= \frac{\tan^2 \beta_i}{t_i^2 \cos^2 \alpha_i} D \\
 \frac{\partial y_i}{\partial \beta_i} &= -\frac{\tan^2 \alpha_i}{t_i^2 \cos^2 \beta_i} D
 \end{aligned}$$

従って

$$E(dx_i dy_i) = \frac{D^2}{t_i^2} \frac{\tan^3 \beta_i}{\cos^4 \beta_i} \sigma_{\alpha_i}^2 + \frac{D^2}{t_i^4} \frac{\tan^3 \alpha_i}{\cos^4 \beta_i} \sigma_{\beta_i}^2$$

これで  $\tau^2$  が  $\sigma_{\alpha_i}^2$  と  $\sigma_{\beta_i}^2$  で書ける。

$$\tau^2 = A_1^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + A_2^2 \sigma_{\alpha_{i+1}}^2 + B_1^2 \sigma_{\beta_i}^2 + B_2^2 \sigma_{\beta_{i+1}}^2$$

但し、

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{D}{0h} \frac{\tan^0 \beta_i}{t_i^2 \cos^2 \alpha_i} ({}^0u_i + {}^0v_i \tan^0 \beta_i) \\
 A_2 &= \frac{D}{0h} \frac{\tan^0 \beta_{i+1}}{t_{i+1}^2 \cos^2 \alpha_{i+1}} ({}^0u_i + {}^0v_i \tan^0 \beta_{i+1}) \\
 B_1 &= \frac{D}{0h} \frac{\tan^0 \alpha_i}{t_i^2 \cos^2 \beta_i} ({}^0u_i + {}^0v_i \tan^0 \alpha_i) \\
 B_2 &= \frac{D}{0h} \frac{\tan^0 \alpha_{i+1}}{t_{i+1}^2 \cos^2 \beta_{i+1}} ({}^0u_i + {}^0v_i \tan^0 \alpha_{i+1}) \\
 {}^0u_i &= {}^0x_{i+1} - {}^0x_i \\
 {}^0v_i &= {}^0y_{i+1} - {}^0y_i
 \end{aligned}$$

$\alpha, \beta$  が  $\frac{\pi}{2}$  に非常に近いとき、 $\tan \alpha = \infty, \cos \alpha = 0$  となるので、 $A_1, A_2, B_1, B_2$  は次のようになる。

$$a_i = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$A_1 = \frac{D}{0h} \tan^0 \beta_i ({}^0u_i + {}^0v_i \tan^0 \beta_i)$$



$$B_1 = \frac{D}{0h} \frac{{}^0v_i}{\cos^2 {}^0\beta_i}$$

$\alpha_{i+1} = \frac{\pi}{2}$  のとき

$$A_2 = \frac{D}{0h} \tan {}^0\beta_{i+1} ({}^0u_i + {}^0v_i \tan {}^0\beta_{i+1})$$

$$B_2 = \frac{D}{0h} \frac{{}^0v_i}{\cos^2 {}^0\beta_{i+1}}$$

$\beta_i = \frac{\pi}{2}$  のとき

$$A_1 = \frac{D}{0h} \frac{{}^0v_i}{\cos^2 {}^0\alpha_i}$$

$$B_1 = \frac{D}{0h} \tan {}^0\alpha_i ({}^0u_i + {}^0v_i \tan {}^0\alpha_i)$$

$\beta_{i+1} = \frac{\pi}{2}$  のとき

$$A_2 = \frac{D}{0h} \frac{{}^0v_i}{\cos^2 {}^0\alpha_{i+1}}$$

$$B_2 = \frac{D}{0h} \tan {}^0\alpha_{i+1} ({}^0u_i + {}^0v_i \tan {}^0\alpha_{i+1})$$

(ii)  $n$  個の地点間の距離

次ぎに,  $P_1 P_2 \cdots P_n$  の距離  $h = h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1}$  について平均二乗誤差  $\tau^2$  を求める.  
( $h_i$  は  $P_i$  と  $P_{i+1}$  の距離)

$$dh_i = \frac{x_i - x_{i+1}}{h_i} dx_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i} dx_{i+1} + \frac{y_i - y_{i+1}}{h_i} dy_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} dy_{i+1}$$

$h_i$  と  $h_j$  は  $i-1 \leq j \leq i+1$  以外はほとんど独立と考えられるから

$$\begin{aligned} \tau^2 &= E \{ (dh_1 + dh_2 + \cdots + dh_{n-1})^2 \} \\ &= E \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (dh_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} (dh_i dh_j) \right\} \\ &\doteq \sum_{i=1}^{n-1} E \{ (dh_i)^2 \} + 2 \sum_{i=1}^{n-2} E (dh_i dh_{i+1}) \end{aligned}$$

$$E \{ (dh_i)^2 \} = \tau_i^2$$

$$= A_{i1}^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + A_{i2}^2 \sigma_{\alpha_{i+1}}^2 + B_{i1}^2 \sigma_{\beta_i}^2 + B_{i2}^2 \sigma_{\beta_{i+1}}^2$$

但し  $A_{i1}, A_{i2}, B_{i1}, B_{i2}$  は (i) の最後の  $A_1, A_2, B_1, B_2$  である.

$$E (dh_i dh_{i+1})$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{({}^0x_{i+1} - {}^0x_i) ({}^0x_{i+2} - {}^0x_{i+1})}{{}^0h_i {}^0h_{i+1}} \tau_{x_{i+1}}^2 - \frac{({}^0y_{i+1} - {}^0y_i) ({}^0y_{i+2} - {}^0y_{i+1})}{{}^0h_i {}^0h_{i+1}} \tau_{y_{i+1}}^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{({}^0x_{i+1} - {}^0x_i) ({}^0y_{i+2} - {}^0y_{i+1})}{{}^0h_i {}^0h_{i+1}} + \frac{({}^0x_{i+2} - {}^0x_{i+1}) ({}^0y_{i+1} - {}^0y_i)}{{}^0h_i {}^0h_{i+1}} \right\} E (dx_{i+1} dy_{i+1}) \end{aligned}$$

$\tau_{x_{i+1}}^2, \tau_{y_{i+1}}^2, E(dx_{i+1}dy_{i+1})$  はそれぞれ前に  $\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2$  であらわした。  
これを代入して計算すると、

$$E(dh_i dh_{i+1}) = -A_{i2} A_{i+1} \sigma_{\alpha_{i+1}}^2 - B_{i2} B_{i+1} \sigma_{\beta_{i+1}}^2$$

となる。

従って  $\tau^2$  は

$$\tau^2 = \sum_{i=1}^{n-1} A_{i1}^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} A_{i2}^2 \sigma_{\alpha_{i+1}}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} B_{i1}^2 \sigma_{\beta_i}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} B_{i2}^2 \sigma_{\beta_{i+1}}^2 - 2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} A_{i2} A_{i+1} \sigma_{\alpha_{i+1}}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} B_{i2} B_{i+1} \sigma_{\beta_{i+1}}^2 \right\}$$

$\sigma_{\alpha_i} = \sigma_{\beta_i} = \sigma^2$  とすれば

$$\tau^2 = \sigma^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + B_{i1}^2 + B_{i2}^2) - 2 \sum_{i=1}^{n-2} (A_{i2} A_{i+1} + B_{i2} B_{i+1}) \right\}$$

但し

$$A_{i1} = \frac{D}{\sigma h_i} \frac{\tan \alpha_i}{\sigma t_i^2 \cos^2 \alpha_i} (\sigma u_i + \sigma v_i \tan \alpha_i)$$

$$A_{i2} = \frac{D}{\sigma h_i} \frac{\tan \beta_{i+1}}{\sigma t_{i+1}^2 \cos^2 \beta_{i+1}} (\sigma u_i + \sigma v_i \tan \beta_{i+1})$$

$$B_{i1} = \frac{D}{\sigma h_i} \frac{\tan \alpha_i}{\sigma t_i^2 \cos^2 \alpha_i} (\sigma u_i + \sigma v_i \tan \alpha_i)$$

$$B_{i2} = \frac{D}{\sigma h_i} \frac{\tan \beta_{i+1}}{\sigma t_{i+1}^2 \cos^2 \beta_{i+1}} (\sigma u_i + \sigma v_i \tan \beta_{i+1})$$

$$u_i = x_{i+1} - x_i$$

$$v_i = y_{i+1} - y_i$$

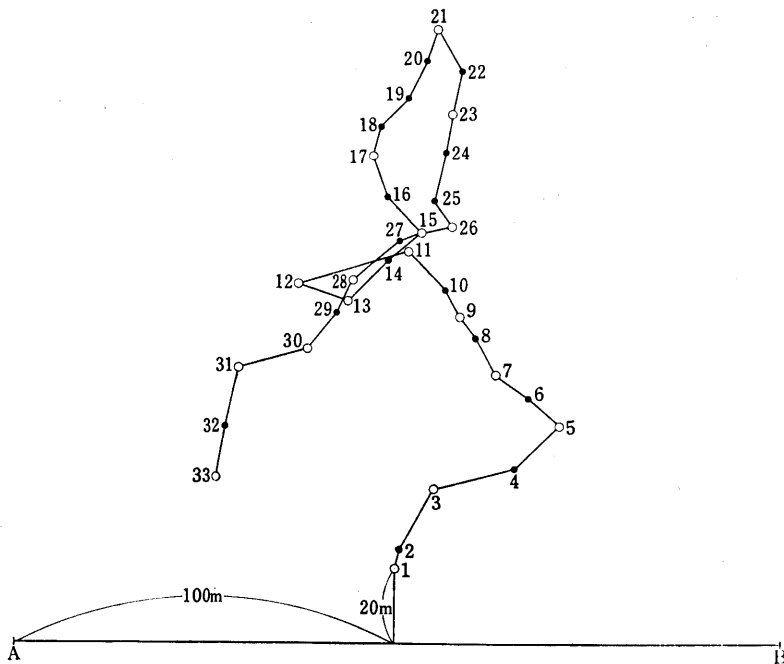


図 4

5. この方法の使用上の問題点

(i) 実際の例を用いて

足跡のデータとして、佐渡において実際に追跡し得たもの（豊島重造他、佐渡における野兎の生息数の推定、新大農学部農林研究、第21号にあるNo.1のデータ、第5図）をもとにし、 $D=200\text{m}$ として計算してみた。出発点  $P_1$  の位置は  $AB$  の垂直二等分線上  $20\text{m}$  のところとする。しかし測定上はこの  $P_1$  にも当然誤差はあるので、これを見込んで計算してある。

データは図4に示す通りとする。総延長は  $412.4\text{m}$  である。角度の誤差としてレンジ  $4^\circ$  の場合（誤差  $\pm 2^\circ$ ）、 $10^\circ$  の場合（誤差  $\pm 5^\circ$ ）をとりあげた。分散はこの間の一様分布として算出した。

表 3

$h_i$	角度の誤差 $\pm 2^\circ$ のとき				角度の誤差 $\pm 5^\circ$ のとき				
	$r_i^2$		COV ( $h_i, h_{i+1}$ )		$r_i^2$		COV ( $h_i, h_{i+1}$ )		
	簡便法	シミュレーション	簡便法	シミュレーション	簡便法	シミュレーション	簡便法	シミュレーション	
1	4.4	9.8	53.7			64.4	481.7		
2	18.2	16.1	16.6	- 6.5	3.8	100.1	154.9	- 41.9	146.7
3	21.5	24.9	22.6	- 7.2	6.2	155.5	123.7	- 44.6	- 1.7
4	16.5	6.8	7.7	- 5.6	- 4.7	42.0	65.2	- 34.9	- 10.2
5	10.7	22.8	20.0	1.4	1.0	142.5	88.8	8.6	25.5
6	10.0	20.9	28.9	-10.8	- 8.7	130.7	85.3	- 67.8	0.9
7	11.3	16.5	15.2	- 8.6	- 7.6	103.3	81.8	- 54.1	0.3
8	7.2	17.3	14.4	- 8.4	- 6.1	107.7	83.6	- 52.3	15.3
9	8.1	16.2	15.3	- 8.1	- 5.7	101.8	90.6	- 50.8	31.8
10	13.8	17.4	16.4	- 8.2	- 5.6	108.5	87.9	- 51.1	7.7
11	30.6	16.8	17.0	- 4.0	- 3.2	104.7	110.8	- 24.9	- 12.7
12	13.9	13.6	13.5	6.0	6.5	84.9	82.3	37.7	34.2
13	15.3	16.9	16.1	- 4.3	- 3.1	105.9	90.5	- 27.0	0.5
14	11.5	16.5	16.0	- 8.3	- 6.9	103.2	92.0	- 51.8	- 4.2
15	13.3	19.1	17.5	0.1	0.2	119.5	98.1	0.9	26.6
16	10.9	24.2	21.0	- 9.5	- 7.2	150.9	118.6	- 59.7	11.8
17	8.6	29.9	24.8	-12.0	- 7.3	186.7	148.5	- 74.7	47.5
18	10.5	26.8	22.7	-13.0	- 7.3	167.3	156.2	- 81.4	58.7
19	11.5	38.2	34.8	-14.7	- 9.4	238.8	189.3	- 91.9	56.5
20	8.1	46.6	32.4	-21.2	- 8.3	291.5	263.5	-132.8	88.6
21	12.9	42.0	35.2	20.4	14.9	262.9	212.9	127.6	150.3
22	11.3	38.8	33.2	-18.0	-11.6	242.9	178.3	-113.1	57.4
23	10.7	31.9	30.6	-17.4	-12.9	199.3	151.3	-109.2	41.3
24	13.1	24.7	23.3	-14.0	-12.0	154.6	115.5	- 87.9	16.4
25	8.0	21.3	18.5	- 8.0	- 5.5	133.6	116.0	- 50.6	30.9
26	14.2	15.8	15.9	3.0	2.4	98.9	93.3	18.6	46.2
27	16.2	17.2	17.7	- 7.4	- 7.1	107.7	89.2	- 46.0	- 0.3
28	9.4	16.6	15.5	- 8.3	- 7.0	104.2	90.1	- 51.6	- 0.4
29	11.9	17.5	17.6	- 8.3	- 7.5	109.3	81.6	- 52.0	6.8
30	19.2	18.3	17.8	- 8.2	- 7.6	114.4	95.2	- 51.1	- 18.5
31	15.9	17.1	17.2	- 7.1	- 6.7	106.9	89.3	- 44.6	- 19.9
32	13.7	16.6	15.1	- 8.3	- 8.1	103.6	90.3	- 51.7	- 13.0
$\sqrt{m. s. e}$		15.7	34.1			39.2	195.1		
シミュレーションによる 総延長平均		442.3				602.2			

(ii) シミュレーションとの比較

(i) のデータについてシミュレーションによって平均二乗誤差を出してみたところ、かなりくいちがうことがわかった。角度の読みの誤差を  $\pm 5^\circ$  としてシミュレーションを行なったところ、総延長の平均が 602m,  $\sqrt{\text{平均二乗誤差}}$  が 195, 標準偏差が 45 となり、バイアスの大きいことが知れる。誤差を  $\pm 2^\circ$  としても平均 442m,  $\sqrt{\text{平均二乗誤差}}$  34, 標準偏差 16.5 である。表 3 は各点間のきよりについで簡便法とシミュレーションの比較である。

これは簡便法による計算に無理があるためである。そこで、小さな例によって計算してみよ

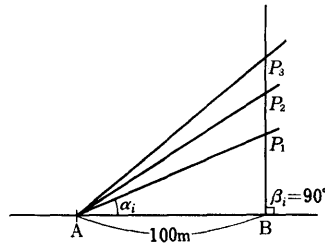


図 5

表 4

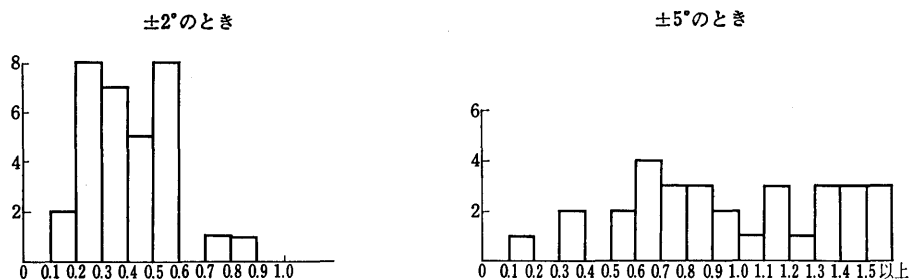
	$\alpha_i$	$\beta_i$	$h_i$	$\tau_i^2$		$cv^*$	
				簡便法	シミュレーション		
例 1	$P_1$	$30^\circ$	$90^\circ$				
	$P_2$	$40^\circ$	"	26.2	134.3	132.2	$\frac{116}{26.2} = 0.44$
	$P_3$	$50^\circ$	"	35.3	286.2	282.8	$\frac{16.9}{35.3} = 0.48$
	covariance				-86.3	-80.5	
	$\sqrt{m. s. e}$				16	17	
例 2	$P_1$	$30^\circ$	$90^\circ$				
	$P_2$	$40^\circ$	"	26.2	134.3	133.7	$\frac{116}{26.2} = 0.44$
	$P_3$	$45^\circ$	"	16.1	213.2	159.9	$\frac{14.6}{16.1} = 0.91$
	covariance				-86.3	-60.2	
	$\sqrt{m. s. e}$				13	13	
例 3	$P_1$	$30^\circ$	$90^\circ$				
	$P_2$	$35^\circ$	"	12.3	110.4	81.2	$\frac{10.5}{12.3} = 0.85$
	$P_3$	$45^\circ$	"	30.0	189.4	174.6	$\frac{13.8}{30.0} = 0.46$
	covariance				-62.5	-39.1	
	$\sqrt{m. s. e}$				13	13	
例 5	$P_1$	$30^\circ$	$90^\circ$				
	$P_2$	$35^\circ$	"	12.3	110.4	81.2	$\frac{10.5}{12.3} = 0.85$
	$P_3$	$40^\circ$	"	13.9	148.8	105.4	$\frac{12.2}{13.9} = 0.88$
	covariance				-62.5	-25.7	
	$\sqrt{m. s. e}$				12	12	

\* CV' は変位係数に相当するもので  $\sqrt{\text{平均二乗誤差}} / \text{平均値}$  としておく。

表 5

	角度の誤差 $\pm 2^\circ$ のとき					角度の誤差 $\pm 5^\circ$ のとき			
	$h_i$	$\tau_i^2$		COV( $h_i, h_{i+1}$ )		$\tau_i^2$		COV( $h_i, h_{i+1}$ )	
		簡便法	シミュレーション	簡便法	シミュレーション	簡便法	シミュレーション	簡便法	シミュレーション
1	22.5	17.5	19.4	-6.3	-6.3	109.1	205.0	-39.2	-20.1
2	36.8	16.5	18.4	4.9	4.9	103.2	89.5	30.9	13.3
3	20.7	21.5	23.6	-9.0	-7.8	137.2	110.1	-56.4	-38.5
4	18.5	17.0	13.7	-8.4	-4.9	106.0	96.6	-52.3	-34.6
5	21.7	17.2	16.0	-3.1	-3.4	107.4	105.0	-19.1	-16.7
6	30.6	16.8	16.0	6.0	6.7	104.8	106.8	37.8	22.0
7	13.9	13.6	13.5	-4.6	-2.7	85.0	69.3	-28.7	-15.7
8	26.8	16.9	14.2	-2.0	-5.1	105.8	117.4	-12.6	-16.9
9	23.6	21.7	20.2	-8.5	-9.0	135.4	122.7	-53.0	-46.4
10	37.8	36.6	41.3	22.6	27.8	228.7	180.5	141.4	105.8
11	22.7	44.0	49.0	-17.7	-16.0	274.7	207.8	-110.7	-83.4
12	29.8	28.1	27.8	-4.1	-4.5	175.4	169.4	-25.6	-20.3
13	29.5	16.4	13.6	-7.9	-3.9	102.3	106.6	-49.7	-43.2
14	21.4	17.3	13.2	-7.9	-6.5	108.2	104.7	-49.3	-44.5
15	19.1	18.3	16.9	-7.1	-5.4	114.2	96.6	-44.1	-25.5
16	29.6	17.2	15.1			107.3	104.4		
$\sqrt{m.s.e}$		15.2	16.1			38.0	52.8		
シミュレーションにより総延長平均		409.6				446.5			

測点33点のとき



17点にしたとき

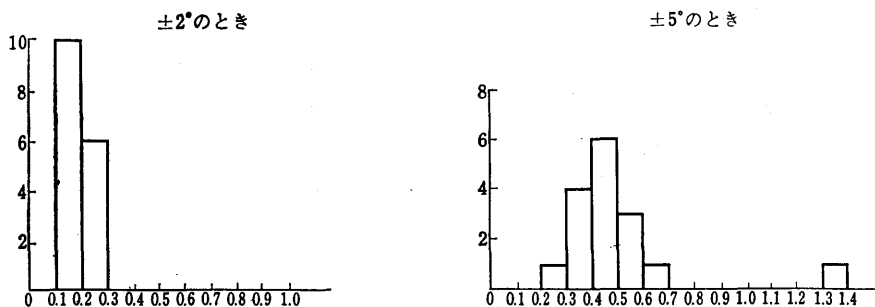


図 6 CV' の分布

う。AB間は100m, 測定点は $P_1, P_2, P_3$ の3点とし, いずれもBからABに垂直な線上にあるものとする(図5参照)。角度の誤差は $\pm 5^\circ$ とする。表4をみよう。いずれも平均二乗誤差は合っているが, 例2以降では $\tau_1^2, \tau_2^2$ , covarianceを各々比べてみると差異が出ている。そこで $CV'(\sqrt{\tau_i^2}/h_i)$ を見てみると, これがだいたい0.5より小さいところでは合っているとみてよい。従って $CV'$ が0.5以下におさえられれば簡便法が用いられるとみてよいであろう。

(iii) 簡便法の使用上の注意

以上のことから(i)の実際のデータはこのままでは $CV'$ が大きすぎたため誤差が大きくなったとみられるので, 間の点をいくつか省略して17点としてみた(図4で丸印の点)。結果を表5に示す。

誤差が $\pm 2^\circ$ のときは簡便法では $\sqrt{\text{平均二乗誤差}}$ が15.2, シミュレーションでは16.1(標準偏差15.5)となつてぴったり合っている。総延長は点を間引いたので404.9mとなるが, シミュレーションで平均409.6である。ここで間引かない時の総延長距離は412mなので17点による推定405, 410mとの差はせいぜい7mで相対誤差は1, 2%となりほとんど問題でない。誤差が $\pm 5^\circ$ のときは $\sqrt{\text{平均二乗誤差}}$ が簡便法で38.0, シミュレーションで52.8, 総延長はシミュレーションで平均446.5である。

なおこれらの場合, 各点間の距離の $CV'$ の分布を図6に示す。

17点で誤差が $\pm 5^\circ$ のときや $\times$ 誤差があるが, これは $CV'$ の分布に見られるように大きな値があるためである。 $\pm 2^\circ$ としたものは $CV'$ が全て0.3以下であり, 結果的にうまくいっていることがわかる。この様に考えてみると $CV'$ が一応0.5以下になる様に点をとれる場合には簡便法がうまく使えることがわかる。

この $CV' < 0.5$ が満たされる場合が簡便法の使える目安と考えられるので, この限りにおいて——つまりこのように点を間引くことによって——使えることになる。但し, 間引くことによっておこる本来の距離との差はやはりバイアスとなって残ることになる。

なおこのとき距離推定に対する相対誤差は角度の誤差 $\pm 2^\circ$ のとき $16/412=0.039$ ,  $\pm 5^\circ$ のとき $53/412=0.129$ である。

統計数理研究所

動く調査対象集団に対する標本調査について-Ⅱ及びⅢ訂正  
(統計数理研究所彙報 第17巻 第2号(1969), 第19巻 第2号(1972))

	誤	正
第17巻 第2号 98頁 15行目	k=3のときこの値は2.3, ...	.....2.2, ...
第19巻 第2号 157頁 11行目	...上記の値は2.3となる...	.....2.2.....
" " 第3表	...野兎の数は2.3	.....2.2
	1ヘクタール当り密度	1ヘクタール当り密度
	1.04	0.98
	0.47	0.45
	0.34	0.32
	0.16	0.15
	3.18	3.00
	0.88	0.84
" " 表の下2行目~3行目	...それぞれ, 1.32, 0.35, 0.16となる	...それぞれ, 1.43, 0.37, 0.17となる