社会調査における回答変動の解析

鈴木達三・高橋宏一

(1973年6月 受付)

Mathematical Models for the Interpretation of Response Uncertainty and Their Applications

Tatsuzo Suzuki and Koiti Takahasi

When individuals are asked the same questions repeatedly over time, some of them respond differently, but the aggregate response of all individuals may not change. For example, in the data of Table 1, the marginal frequencies of responses remain about the same on the second trial as on the first even though a large proportion of respondents gives different responses on the two occasions.

Looking over the three or four wave panel data from our studies in 1970, we observed that this phenomenon occurred fairly often. Therefore, we decided to construct a working model to account for this phenomenon. This model assumes that the opinion at the time of inquiry is not static but only latent probability is determined. Using a dichotomous item from our survey (e.g. yes-no response) we may assign the positive probability of p to an individual. This probability varies with individuals.

Under the assumptions mentioned above, let p_k be the proportion of respondents who respond k times positively in n repeated surveys. Then p_k may be written as

$$p_k=\int_0^1 \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\,d\,\Lambda(p)$$

where $\Lambda(p)$ denotes the population distribution function of p.

Thus, the problem can be defined by the compound binomial distribution and the object of the study will be to determine the distribution function $\Lambda(p)$.

Conceptually this model is closely related to the Lazarsfeld Latent Structure Model and the Wiggins Models. Lazarsfeld's model, however, deals with responses to many items taken at one point in time whereas the Wiggins model and ours deal with responses to one item over many points in time. These three models use the concepts of latent probabilities and local independence but develop in different directions.

Our data indicate that analysis based on a compound binomial distribution is possible although revisions and innovations on existing approaches had to be made. The Markovian Model seems inadequate for our data. Moreover, the Latent Class Model (e.g. Wiggins) also does not appear to be useful for analysis of our data.

Since the number of repetitions was too small to delineate a well defined distribution, we estimated the minimum and maximum size of the "stable" group $[0, 0.1] \cup [0.9, 1]$. Likewise, the study estimated the minimum and maximum size of the "mobile" group $[0.4, 0.6]$.

To determine the number of "stable" and "mobile" groups in any inquiry would be useful for the proper interpretation of any survey data in a complex society in which attitudes are constantly in flux.

As mentioned, ideally three categories were sought (two stable, one mobile). However, some items disproved the validity of such delineation. In those cases the beta distribution was utilized.

The Institute of Statistical Mathematics

目次

§1 はじめに

社会の現象に対する科学的な情報収集の有力な手段の1つとして，現在では社会調査の手法が広く利用されている．社会調査といっても範囲が広いのでここでは現在一般に利用されている社会調査（世論調査，意見態度調査等）を考えていくが，社会調査の基本的な方法は調査の対象を一定の測定操作（主として質問に対する回答）により分類し，各分類カテゴリに記録された対象者の数を数えるという方法である（人を対象にする場合は人数，事例の場合は事例数）．

ここで，この方法が科学的に客観性を保ちうるかどうか？あるいはこの調査から得られた結果（情報）が社会の現象に対する実証的な研究における情報として役立つ（すなわち，調査の手法が情報収集の手段として有効である）かどうかということは，調査における操作上の各段階がどのような性質をもっているか，今手中にしている情報が実際の社会の現象とどのような関係にあるかということに関してきまってくる．さらに，現在問題にしている社会現象の解明に対する情報として，調査結果を利用したとき，誤りを生じないかどうかということに関係して評価されるだろう．

したがって，このような操作上の各段階について，問題点がないと考えられる場合あるいは問題は解決されたと考えられる場合でなければ，社会調査の方法を用いて得られた情報は研究上の資料として確度の高いものとはならないといえる．

歴史的にみても，社会調査のはじまりは人口調査（人の出生死亡数等）であるとされ，操作上の問題点もそれほどないようなものである．それ以降，限られた対象（刑務所，工場労働者，一定地域の住民等）に関する調査へと発展し，調査内容も比較的測定操作上の問題のおこり難い（分類の容易な）事実項目を主としたものが広く実施されるようになった．その後，大規模な調査が実施されるようになって始めて調査対象の選定（サンプリング）の問題がおこり，さらに多種多様な調査項目の出現により，測定操作も複雑になり，態度分析尺度の構成等種々の手法が考えられてきた．ここで，測定操作の多様性にもとずくデータの信頼性の問題が生じてくる．すなわち，多種多様な調査結果を比較分析するためにも比較可能な測定手法が必要になってきたわけである．

このような社会調査が社会の事象に関する組織的な情報収集の手段として一定水準に達したのはここ20～30年のことである．そして，計量的な測定に利用し得る段階に達するには少くともつぎの3つの面における進歩があげられる（[25]）．

①人を調査対象とする集団から，確率サンプルをとる手法が確立したこと

②個人から情報を収集する手法として一定水準の資料が得られる手法が確立してきたこと

③データ処理の手法が進歩したこと，および各種の分析手法が進歩したこと

①については，J. Neyman に発する統計的な標本抽出論が発展して，確率サンプルを選び出す手法が完成したということに限らず，調査の実際上の諸条件にてらしてみても実用になる諸方法が統計的な理論の裏打ちをされ，「調査におけるサンプリング」の理論として実際に用

いられるようになったということである．現在では，人を対象とする社会調査のサンプリングに関して標準的な手法は確立しているといえる（[7], [10], [15], [17], [24], [48] など参照）．

②については，現在でもまだ現実的な問題として，研究が進められているところであり，必ずしも満足のいくものではない．しかし，社会調査の発展の過程で各種の改善がおこなわれており，とくにデータの質を（計量的な信頼性のあるものに）改善する上で大きく影響したことは，測定方法（回答者に与える刺激および回答者の回答を記録する方式）を標準化してきたことがあげられる．

たとえば，Cantril, H. の「世論の測定」[6] には質問項目の作成，回答記録の様式，面接調査に関する各種の問題点がのべられており，同様の研究としては Payne の「質問の諸技法」[35], Hyman, H. H. (et al) の「社会調査における面接法」[22] 等があり，測定操作が異なると結果に何らかの影響が出てくることが示されている．

とくに，われわれがここでとりあげる世論調査形式のものは行政当局が行う調査と異なり，事実（実態）よりも人々の意見（態度）を扱うので，測定過程の考察がとくに重要になってくる．Stephan, F. F. and P. J. M carthy [38] の p. 81 にも「一般に測定過程の重要性は認識されていない‥‥実際に実態に関することはかなり完全に測定が可能ではあるが，意見とか態度では，これらは単純な仮定にすぎない‥‥」ということがのべられている．

しかし，調査における測定の過程は単純ではなくいろいろの段階を含むものであるから，どのようにすれば“よい調査”がおこなえるか？ということは，それぞれの測定の各段階における測定操作の仕方に関係してくるので，ここでは多少問題を簡単化して，一定の標準化された測定方式の下で得られるデータの性質について考察することにする．

§2 測定の問題と回答の性質（測定過程）

2.1 標準的な調査方式

ここでは標準的な調査といっても理想的な調査という意味ではなく，通常一般に広く実施されている調査方式について考える．また，標準化の仕方については別の機会に考察することにし，ここでは，われわれが用いた方式について若干のべる．

まず，調査の手順は大きくわけると3つになる．1つは使用する調査票（質問項目および回答記録様式）の作成，いま1つは実際の調査にあたる調査員の問題（質問項目の与え方，回答の記録の仕方等），それに調査対象者の選定（サンプリング）の問題である．これらの諸段階はこれまでも妥当性とか信頼性とか調査誤差とかに関連して種々の文献にのべられているので詳しくはのべないが，これまでの調査資料を検討してみると，サンプリング誤差および調査に付随する各種の誤差（事務的誤り・分類の誤り等）の他に，同一人に対し同一質問をくり返し調査（パネル調査）した時の回答変動が相当大きいことが分ってきた[1,2]．

このため，回答変動の実態に関する情報を組織的に収集することにし，調査のくり返し（前後調査）の過程において入りこむ回答変動の原因と考えられるものを出来るだけ排除するような調査計画をたてて，4回パネル調査を実施した．まず，調査をくり返すとき，各回の調査条件の差異を減少させるため，調査員による面接調査の方式をやめ，調査員は回答者に調査票を手渡し，記入要領を説明して，回答者が質問に対する回答を記入し終るまで待ち，回答者の記入が終り次第調査票を回収する方式をとった．すなわち自記式調査の方式である[3]．

また，質問項目の選定はこれまでの調査に何回も利用され，回答結果の模様がよく分っている項目を利用し，とくに調査をくり返す期間（4ヶ月間隔で4回，合計1年）において客観情勢の変化が少く，それによる影響が無視できるような項目をえらんだ．さらに，調査をくり返す過程で生じる前後同一人でないために起る回答変動を除くため，同一人であることを確認す

---

1) ［40］参照

2) また，事務的誤り，その他については，たとえば［33］，［39］，［43］参照

3) 自記式と面接方式とを比較検討した結果はたとえば［42］，［46］を参照

る手段として筆跡判定の方法を採用した（[40], [41], [46] 参照）.

このように，調査は一定の形式でくり返し実施できるようにし，調査票も質問項目に対する回答を一定の形式で収集できるようにし，回答記入欄に回答選択肢を列記し（分析上2項選択の方式を主として採用している）強制選択方式を採用した（第1表参照）.（調査実施の詳細および面接方式との比較については [46] を参照のこと）

2.2 測定の実際

調査対象となった人から情報を収集する手段としていろいろの方法が考えられる．しかし，収集する過程を考えると，これは電子計算機に収納してある情報を取り出す場合とは大変異なっている．形式的に考えるとき，あるいは概念化して統計的にあつかうとすれば，人から情報を得る場合でも，電子計算機に収納された情報をとる場合でも，両者は類似した取扱いをうけるだろうが，調査の過程においては，何らかの形で人と人との間の会話あるいは言語や動作によるコミュニケーションが入りこむ．とくに面接調査の場合は全面的に言葉のやりとりから成り立っているし，ここで用いた自記式調査においても殆んど同様である．すなわち，回答者は質問票に盛り込まれた質問文と回答選択肢を読み，調査員が前もって説明した記入方法に従って回答を記入していく．調査手順は形式上統一されたものになっているのであるが，調査票の作り方や回答者の回答しようという意欲とか調査項目に対する理解の程度とかが，調査の結果得られるデータに影響するし[1,2]，調査員の一寸した言動が回答に影響する場合もある（[32], [34]）ので実際の調査場面においても何らかの標準化が必要になる．われわれは回答者に対して，調査票に盛り込まれた情報以外には何もつけ加えないようにし，調査票も質問文とその回答選択肢（ほとんど2項選択および3項選択）から成り立っているので回答者が実際の回答にあたっておこなうことは，ある特定の質問項目に対して，あらかじめ設定されている分類（回答選択肢）に回答者自身（あるいは回答者の考えや意見）が該当するかしないかを判断して記入することが基本的なことになる．調査項目が質的なものを対象にしていればもちろんであるが，量的なものを対象にしている場合にも殆んど同様と考えられる．

一般に社会科学においては，種々の概念を用いて社会現象の諸側面を記述する．それらの概念構成の是非は別として，ある社会現象を記述するため適当な概念が構成されたとしよう．通常これらの概念を適当ないくつかの変数を用いて測定することになる．この際とられる手段は，測定しようとする変数が量に関係する場合には，適当な数値を目盛った尺度のどの数値と一致するか，あるいはどの数値のカテゴリに入るかをしらべその対応関係により測定値を得る．さらに，測定しようとする変数が特定の分類カテゴリにより示される（多くの場合質問文とこれに対する回答選択肢によって示される）場合も多い．このとき回答者は特定の回答カテゴリによりそれに入るか入らないかで分類される．

このように特定のカテゴリに注目すれば，ここで用いられる測定方法は，あるカテゴリに入るか，入らないかということが基本的な測定操作といえる．

上でのべた数量的なものを対象とする場合，それを測定するために構成した尺度（あるいは分類のカテゴリ）は，たとえば，<u>長さの測定</u>の場合における尺度とは異質な数量の対応関係を基礎にするものであるから，数といい，質といいどちらでも測定操作はある分類カテゴリに<u>入るか入らないか</u>が本質的である．さらに特定の回答選択肢を利用しないような調査方法の場合にも，結局最終的には回答内容が（ある特定の分類基準をとった時）どの分類カテゴリに入るかどうか，あるいは特定の性質をもつか，もたないかにより分類される．したがって，どの場合にもどの分類に入るかどうかをきめるために回答者の判断，調査員の判断，コーディング担当者の判断が必要である．そして，その分類に入るものの個数を数えることが測定操作の基本になる．

---

1) 調査方法と回答分布の関係についてはたとえば [42], [46]

2) 面接調査についてはたとえば [5]

このような測定操作により得られたデータがどのような性質をもっているかが分れば，実際にこのような測定操作を利用する場合に非常に有効である．たとえば，物理的な量として長さを測定する例を考えると，唯一回の観測値がその対象の長さを示すとは限らない．通常同じ対象を何回かくり返して測定してみると，まちまちの値が得られる．しかも，測定条件（温度等）を一定に保つようなことも必要になる．(条件が異なるときは適当な補正が必要)．物理の場合においても，われわれが実験によって得た長さの観測値の組は，本来の対象物の長さ（これも真の値が１つあるというわけではなく，測定時の条件により，たとえば温度等によりたえず変化している）を示す１組の真の値の集団に対する一つの指示量（あるいは数量的な素材）と考えられ，われわれは，この観測値と本来の値との間の対応関係を，対象物の本来の性質および用いた測定操作に基ずいて，物理の理論を用いて考えることになる．いくつかの仮定をおけば，一番確度の高い測定値として，各観測値の平均値が用いられ，観測誤差として適当な量が計算されることになる ([47])．もっとも簡単な同種のものの間の測定（長さ等）に関しても，具体的に測定を実行して対象物の長さの推定値を得ようとすれば最小限上にのべたような考えが必要になる．

われわれが社会現象に対して適用しようと考えている測定操作は，簡単な例をとってみるとつぎのようになる．たとえば，ある人の身長を知る場合，物理的に測定するわけではなく，「あなたの身長はどのくらい（何センチあるいは何センチから何センチまでという分類カテゴリを示して）ですか？」という質問に対する回答をこの場合の測定値とするようなことがほとんどである．この測定方法の妥当性の程度は実際に身長を測定してみればある程度判断することが可能である．また信頼性や妥当性は各人が自分の身長についてどのくらい正確な知識をもっているかということにも関係する．この場合，分類カテゴリの巾を広くすれば信頼度の高い測定結果が得られるだろうと考えられるが極端に広くなれば測定操作は妥当なものとはいいがたい．また何人かの人があいまいな知識しか持っていなければかなり結果が損われるだろう．この例の場合は異った測定方法を用いて信頼性および妥当性等を検討できるが，一般の調査項目ではこうならない．

もちろん，年齢，学歴，職業等のように調査時点においてどの分類カテゴリに入るかが原理的には定まっていると考えられるもの（実態調査の項目等）では，くり返し調査で実際に観測された不一致は測定操作上の問題として処理される．しかしこの場合測定操作上分類が容易な場合とそうでない場合が考えられ，これは質問の仕方および分類基準の設定の仕方とも関係してくる（たとえば年齢では満年齢と数え年で混乱するので分類カテゴリの切れ目で１段階の誤差を生じる可能性がある．学歴では，新制と旧制との違い，あるいは 6, 3, 3, 4 制にはずれた学歴の場合に混乱が生じる）．従って，今用いている測定操作でどのくらいの範囲はほぼ確実にとらえることが出来るかどのくらいの範囲ではあいまいになるかということが具体的に分れば非常に好都合となる．

意見や態度の場合も形式的に考えればいまのべたことと殆んどかわらない．ただこの場合は，回答者の考え方は調査時点において定まっていていつも同じ意見であるが，調査の仕方によって（測定操作上）不一致が生じてくるとも考えられるし，測定操作上の問題はほとんどないが，回答者の意見がいつも変動して不一致があらわれるというようにも考えられ，また，前後調査の回答不一致はその期間において回答者が意見をかえたためであるという考え方も出来る．どのようにも考えることが出来るが実際の調査結果をみると実態調査の諸項目にくらべ不一致の割合がかなり高くなるのが普通であり，しかも意見の項目の中では比較的簡単な質問文と回答選択肢から構成されている項目の方がそうでない項目よりも不一致の割合は低い．さらに，実際に何らかの原因で意見が変ったと考えられる場合には回答分布が変ってくる．したがって，回答者の回答は何らかの意味で確率的である可能性が強いと考えられる[1]．

つぎにパネル調査の実例を示し，回答変動を処理するためのモデルを考える．

---

1) 実態調査の項目等がどの程度一致するか等の資料は [40], [42], [46] 等参照

§3 パネル調査

3.1 パネル調査

Lazarsfeld らによって開発されたパネル調査（ここでは同一対象に対して，一定期間をおき同一質問をくり返す調査法をいう [26]）の手法は，時間的経過における対象の変化をダイナミックにとらえることが出来るとして，社会現象の研究において広く用いられている．さらに，利点として，くり返し調査の過程で再訪問しやすくなり一般に調査員と回答者の間の関係（調査時の関係，rapport）が改善され，データの質がよい方に向うと信じられており，くり返しの過程で情報がふえるので，前後調査の関係からデータのチェックが可能であり，データの一貫性や正確さに対してもよい影響を及ぼすといわれる（[25] の p. 28 参照）．すなわち，パネル調査は意見，態度，期待感等に対する変化のデータを得る場合，あるいは，回答結果が時間的影響をうけないような項目をえらんで信頼性の研究をする場合および回答が変らないような質問をもとにして測定操作の妥当性の研究等に利用される．しかし，すでにのべたように測定操作上の問題も大きいが，回答者個人の意見も不安定な面が深いので，時間的経過における対象の変化を直接とらえることが出来るとは考えられない．（もちろん，適当な仮定をおき，くり返しのデータを利用して，意見の変化と回答の不確定性を求めるという考え方もある ([8], [9])．このような外的影響による変化は各個人の意見の動きとして直接とらえるというよりは，各個人の意見の複雑な動きを通して得られる全体の回答分布における変化として間接的にとらえられるのではないかと考えられる）

ここでは，パネル調査の手法が適当な測定手段を用いれば，測定操作上の問題あるいは回答者個人の回答の不安定性にもとずく変動をダイナミックにとらえることが出来ることに注目して，変化をみるということに重点をおかず，調査データの性質を調べることに重点をおき，この立場から分析を進める．

3.2 パネル調査の実例

まず，いろいろな立場から実施されたパネル調査のデータが実際にどのような結果を示しているかをいくつかの例をあげて示してみよう．

第1表 入社試験（親戚の場合）（[46] 参照）

問 あなたが，ある会社の社長だったとします．その会社で，新しく職員を一人採用するために試験をしました．入社試験をまかせておいた課長が「社長のご親戚の方は2番でした．しかし私としましては，1番の人でもご親戚の方でも，どちらでもよいと思いますがどうしましょうか」と社長のあなたに報告しました．あなたはどちらをとれ（採用しろ）といいますか？

1. 1番の人を採用するようにいう
2. 親戚を採用するようにいう

a)

I＼II	1	2	計
1	183	15	198
2	16	36	52
計	199	51	250

b)

I＼III	1	2	計
1	180	18	198
2	18	34	52
計	198	52	250

c)

I＼IV	1	2	計
1	179	19	198
2	17	35	52
計	196	54	250

I，II，III，IV はそれぞれ1回目，2回目，3回目，4回目の調査の結果を示す．
調査間隔4ヶ月，面接自記式．

第2表　トルーマンは勇気があるか？

I回目 ＼ II回目	1	2	計
1.　トルーマン勇気あり	87	71	158
2.　そう思わない	79	500	579
計	166	571	737

（[22] の p. 249 の Table 62 より作成）

第3表　選挙における候補者に対する態度

I回目 ＼ II回目	1	2	計
1.　支　　持	142	16	158
2.　反　　対	14	93	107
計	156	109	265

（[31] より作成）

第4表　雑誌をよむかどうか

1　回　目		よ　む		よ　ま　ぬ	
2　回　目		よ　む	よまぬ	よ　む	よまぬ
3回目	よ　む	30	11	17	64
	よまぬ	14	60	56	734
計		44	71	73	798

（[49] の p. 46 の Table 2）

第1表は，われわれの調査から得られたデータの1例である．（4回パネル調査の データは数研研究リポート 26 [46] にすべてのせてある）．後節における解析では他の項目も含めている．特徴としては各回の回答分布がほとんど変化しないこと，また調査間隔がひらいても前後調査のクロス表はほとんど変わらないことがあげられる（二項選択であるから周辺分布が変わらなければ主対角線に対して対称であるのはもちろんであるが，三項選択の場合にもほぼ同じようなデータが得られている．ここでは以下の分析が2項選択を主とするので二項の例をあげた）．

このような例はわれわれのデータばかりでなく，全然別の目的でおこなわれた第2表のような例もある．第3表は政治問題の例である．これは有名な 1940 年の Erie 郡（Ohio 州）におけるパネル調査の中の1つである1)．これと類似のデータは「選挙運動の情報を主にラジオから得るか新聞から得るか」という調査項目に対する回答結果でも得られている．

第5表　選挙運動の情報を主にどこから得るか

a)

5月 ＼ 8月	ラジオ	新聞	計
ラジオ	156	117	273
新　聞	114	174	288
計	270	291	561

b)

5月 ＼ 10月	ラジオ	新　聞	計
ラジオ	162	111	273
新　聞	122	166	288
計	284	277	561

c)

8月 ＼ 10月	ラジオ	新　聞	計
ラジオ	168	102	270
新　聞	116	175	291
計	284	277	561

（データの出所は [49] の p. 173 の Table 17. 元のデータは 1940 の Erie 調査）

（この場合は2回目，3回目の間のデータはやや意見をかえる割合が少くなり周辺分布にもわずかの動きがみられるのでこれらに注目すれば変化モデルを考えることも出来るので Wiggins は変化モデルにより解析している（たとえば [49] p. 173-75））．

第4表は雑誌をよむかどうかの3回パネルのデータである．調査時期により「よんだり，よまなかったり」という個人の変動がかなりみられるが全体としての読者の割合は安定しているようにみえる．

1）選挙の調査であるから選挙キャンペーンによって他の項目では投票が近ずくにつれて回答が変ってくるものもある．
[1] はマルコフ連鎖を解析に用いてデータの変化を説明している．また，Wiggins も [49] で，各種の変化モデルをあつかっている．第5表にあげたものはその1例である．

これらのデータをみて，まず気のつくことは，各方面においで色々の目的のためにおこなわれた調査のデータがわれわれの回答変動に重点をおいて収集したデータとよく似ているということである．さらに時間的経過における変化をみるために計画された調査，あるいは，くり返し調査の経過中に生じた何かの影響をみるために実施された調査，あるいは，調査状況の信頼性をみるために調査実施後におこなわれた再調査等において，通常，上にあげたような諸データに類似したデータが得られるということに注目しよう（[2]）．

すなわち，

①回答分布が調査時期にかかわらず安定している（ただし前後1年くらいのそれ程長期ではない期間）．

②前後調査のクロス表は調査時期にかかわらずほぼ安定している．

③前後クロス表は主対角線に対してほぼ対称になる．

④調査状況をかなり厳密にチェックしても前後調査における不一致の割合はそれほど減少しない．

§4　回答確率モデル

4.1　回答確率モデル

前項でみたように，同一個人に一定期間をおき同一質問をくり返し質問してみると，全体の回答分布は変らないのに，異なる回答をする人が相当数存在する．さらに，いつも同じような回答結果が期待され，客観的にみてもほとんど変化の考えられないような項目では，第1回目と第2回目の調査の間における回答不一致の数と，時間間隔の大きい第1回目と第3回目の間の回答不一致の数がそれ程変らないようにみえる．われわれの調査結果でもこのような例は屢々見られるし，他の場合にもそうであることが報告されている（[49]）．

調査項目が年齢，学歴，職業のような場合にはすでにふれたように調査対象が特定の性質を有するか否かは調査時点では確定している筈であり，くり返しの調査の過程においても，職業における転職（これは不一致の原因がはっきりとらえられるだろう）を除いて，原因の分らない不一致は測定操作上の誤差（measurement error）であると考えられ，この面から処理される．しかし，調査項目が個人の意見や態度という場合を考えると，たとえばある意見に賛成か反対か？というとき，各回答者は，調査時点でいつでも“賛成”と回答するか“反対”と回答するかが定まっているとは必ずしもいえないだろう．

たとえば，保守的な考えをもつ個人は，多くの場合保守的な意見に傾くだろうと考えられるが，くり返して観察してみた場合，いつも必ず保守的な意見に賛成するとは限らない．このような点からみて，次のような考え方が現実のデータを処理する場合の積極的な作業仮説として考えられる：

> 調査対象者 (i) は，特定の調査時点において，質問に対して“賛成”とかあるいは“反対”とかのどちらかに確定した回答をする状態ではなく，“賛成”に回答する確率 $(P(i))$（したがって“反対”に回答する確率 $(1-P(i))$ も）だけが定まっている．すなわち，各個人は確定した標識“賛成”“反対”のかわりに「“賛成”と回答する確率」(0, 1 の間のいろいろの値をとる）を標識としてもっている（回答確率と略称する）[1]．

この仮説のもとでは，各個人の回答は本質的に確率的なものとなり，概念的に同一条件下で調査のくり返しを行ったときにおける，同一調査対象の回答の変動は前にのべたような測定誤差とはいい難く“回答変動”と考えておく．また，回答確率 $P(i)$ の母集団分布（分布関数を $\Lambda(p)$，また $\int_S d\Lambda(P)$ を $\Lambda(S)$ と書くことにする）は表面には現われず潜在的なものである．

1)　回答が確率的になるという考えの数学モデルは Lazarsfeld [27, 28, 29, 30]，Wiggins [49]，林 [18] および [19]，[20]，Coleman [8] 等がある．

したがって潜在構造型モデルともいえる．このような回答確率を標識とする場合には，各回答者が確定した標識をもつ場合とくらべて，調査の目的が広がってくる．すなわち，確定した標識をもつときには，その特定な標識をもつものの比率を推定することが，母集団の分布を推定することと同じことになる（回答確率モデルの特別な場合）．

もちろん，特定の回答がどのくらいの比率を占めるかということは，回答確率の母集団分布の平均値の推定として主要な目的の1つであることに変りはない．しかし，この他に母集団分布の分散や，“賛成”と回答する可能性が“反対”と回答する可能性より高い人はどのくらい存在するか（“賛成”の回答確率が1/2より大きいグループの割合，すなわち $\Lambda\{p|p>1/2\}$）あるいは，「意見の固いグループの割合（たとえば，9割以上の確率で“賛成”あるいは“反対”と回答するグループの割合，すなわち $\Lambda\{p|p\in[0, 0.1]\cup[0.9, 1.0]\}$）等，分布の特性値を推定することが，重要な目的になってくる．

また，簡単な考察により，このような仮説のもとで得られる調査結果は，調査のくり返しの期間各人の回答確率の変化がなければ（すなわち，母集団分布が時間的に安定しておれば），平均的にみて

①周辺分布はいつも安定（同じ）

②前後調査のクロス表は主対角線に対して対称

③前後クロス表は前後調査の時間間隔にかかわらず安定

ということになる[1]．

4.2 調査（測定）のくり返し過程[2]

実際に測定をくり返して，母集団分布（潜在的な）に対する情報を得ようとする場合，調査が必ずしも理想的には実施できないので，つぎのような点に問題が生じてくるだろう．すなわち，実際に調査をくり返して得られた回答の動きは，

①調査くり返しの時間的経過による外的な影響

②測定誤差

③[a]個人が特定の理由で回答を変えた（あるいは[b]特定の理由で回答を変えなかった．たとえば，前回調査の回答を記憶していて同じ回答を意識的にした）

④個人の確率的回答によるもの

がつみ重なって生じたものといえる．

くり返しの過程においてはまず①の時間的経過による影響が問題となる．できるだけ時間間隔が短い方が外的影響を受けにくいのであるが反面記憶等の要因の影響をうけることになる．したがって，調査の間隔は近似的に Lazarsfeld が [29] の p. 355 でのべているように回答者が洗脳された状態になるようにしておく必要があり，最低 2, 3 ケ月は間隔をあけることになる．（理想的な場合は瞬間的に回答を忘れ，回答前の状態に戻ると考える）
このため，調査項目の方もある程度限定して，くり返し調査の期間が多少長くなっても外的な影響を受ける可能性の少い項目を選ぶ必要がある[3]．これによって①の問題は一応解決がつくように思われる．ところが②は同一水準の測定操作をくり返している限り④とは区別ができない．同一項目について測定操作の水準をかえたパネル調査をくり返して実施してみれば，測定誤差の大きさを近似的にとらえることが出来る可能性はあるが，逆に測定操作の水準をかえることが測定の対象となっているものをかえてしまう可能性も考えられる．

---

1) 定常マルコフ連鎖モデルでも前後クロス表の対称性など満たすものがあるから実際には3回くり返しのデータによりたしかめる必要がある．

2) 実際にくり返し調査を実施すれば，くり返しの都度，non-response が生じる．これが重大な偏りを生じる可能性もあるが，ここでは実際に調査できた回答者の回答を問題にして，non-response の問題は別に考える．
non-response による問題を論じたものとして [50]．

3) くり返しの間隔について（ただし Census の実態項目）の研究が Bailar, B. A.: [4] でおこなわれている．

したがって，ここでは「個人が測定される時，その測定操作において個人の回答が回答の分類としては確率的になる」という場合も含めて考えておくことにする（[20]）．すなわち，回答が確率的に起るとした「回答確率モデル」は測定操作の信頼性の問題と非常に密接に結びついている[1]．

Hansen (et. al) が「調査における測定誤差」[14] で示したモデルは，調査の対象となる項目が事実に関すること（あるいは実態に関すること）であり，調査結果の不一致が主として調査員（測定する側）の判断あるいは分類操作の誤りにもとずくものと考えられる場合のものであるが，形式的には全く同じものになっている．したがって，Hansen らが示した回答分散 (response variance) の考え方および [16] の不一致（性の）指数は分析上有用である．

4.3 実際の変化と測定操作による誤差に対する考え方

実際の調査から得られたデータは前項でのべたように時間的影響あるいはくり返しの影響をうけていると考えられる．これらは実際に得られるデータにはどのように反映しているかということを考えてみると，まず，時間的経過にもとずく外的影響は恐らく一定の傾向をもつことが多いと思われるので回答分布がだんだん一方に傾いてくる等の変化が回答結果にあらわれると考えられる．前後調査のクロス表も主対角線に対して対称ではなくなり一定の方向にズレてくるとみられ，時間間隔の大きい前後クロス表では対称からのズレも大きくなると考えられる．一方，記憶あるいは調査のくり返しの影響で段々特定の回答をする可能性が強くなるような時，あるいはランダムな誤差の影響で本来の回答確率からズレるような場合には，前後クロス表の性質として主対角線に対してほゞ対称ではあるが，時間間隔のはなれたものでは前後クロス表の不一致の割合が段々大きくなってくる（後者の場合）[2] か，あるいは引つづく前後２回のクロス表を考えた場合，調査のくり返しが後になる程，前後クロス表の不一致の割合が少くなる（第１回目と２回目より２回目と３回目の方が不一致の割合が少くなる等のこと）傾向を示すのではないかと考えられる．

したがって，このような傾向的な動きがはっきりと認められるようになり，くり返しの調査期間中を通して安定した潜在構造を仮定することが困難になって，始めて変化ということが問題になると考えられる．すなわち，安定した潜在構造を仮定して得られる回答パターンの対称性が統計的にみてくずれたとき，変化を考えに入れるのが適当であろう．この場合“変化”というのは各人の回答確率が変ることになる．したがって，回答確率の分布（潜在構造）の形が変ってくるので，安定した潜在構造の仮定とはあい入れないことになる．

また，前項でのべたように測定操作にもとづく誤差（回答の変動）と本来の“回答変動”（回答が確率的におこると考えた時の変動）とは区別できないが，事実項目に対する変動の大きさはほゞ測定操作にもとずく変動の水準を示すものと考えられるので，はっきりと確定したものが原理的に得られるという場合の変動を適当に指数化して（前にあげた不一致指数あるいは [44] でのべてある一致率等），平均的な測定操作の誤差の水準を求め，これからのズレが本来の“回答変動”にもとずくものと考えれば，回答変動の相対的な大きさについての情報が得られることになる．

§5 調査目的の意味と解析のねらい

Coleman [8] が指摘しているように，われわれが調査の結果得ている回答分布をどのように考えればよいか？という問題を考えてみる．たとえば，ある意見に対する回答分布が“賛成”30%，“反対”70% であるとき，これを個人的にみた場合の意見との関連から考えると，母集団のうちほゞ 30% が“賛成”残りが“反対”という意見を持っている場合も考えられるし，

---

1) 信頼性の問題については，たとえば心理測定に関しては [3]
スケールアナリシスは Guttman [12], [13]

2) このような場合の，回答の不確定性と変化の問題を Coleman は [8] であつかっている．

各人の意見が不安定で（しかも皆同じような態度をもっており），ある時は“賛成”，ある時は“反対”という意見になり，その割合が3：7である場合も調査の結果は同じように“賛成”30%，“反対”70%となる．しかし，この両者を社会的に考えてみたときに大変母集団の性質は異っていると予想される．すなわち，一方は固い意見の持主ばかり，他方は皆が同じようにいわゆる浮動層といえる．この例は両極端であるが，社会の成員がどのような固さの意見をもっているかを知ることも必要である．これらを知るためには調査のくり返しが必要になる．

一方，林[20]が例示しているように，本来特定の性質あるいは意見をもっているものが，測定操作の誤り，あるいは測定操作上（質問項目の作成の仕方とか回答のとり方とか）の条件によって回答が確率的になっている場合（たとえば，時には“反対”と回答してみたいという個人的な考えも入る），回答結果が上と同様に30%と70%であっても，たとえば各人の回答確率が本来“賛成”の人も“反対”の人もともに0.9であるとすれば，本来“賛成”の人の割合は25%，“反対”の人の割合は75%であると考えられるから，調査結果をそのまま信用すると思わぬ偏りに気がつかないことになる．この意味からいっても，調査目的は単純に“賛成”率の推定であると狭く限定しておけなくなる．

このようなわけで，調査目的が回答確率の母集団分布（潜在構造）に関する特性値の推定というように広がってくる．これまでにこの方面で研究されてきたことは，潜在構造の型を限定して（たとえば潜在的なクラスが2つあるいは3つ存在する等とクラス数を限定する等）分析を進める方法であった[1)]．

われわれは[45]において，問題を混合二項分布モデルを用いて定式化し，3回以上のくり返し調査における分析の方法を講究している[2)]．この方法は実際に得られたデータが混合二項分布モデルにより解析可能であるかどうかすなわち，潜在構造が存在するかどうかの判定基準を示すとともに，分析において潜在構造に何らの制限をおかない手法であるが，実際的な場面では調査のくり返し回数を無制限に大きくすること等は不可能であるから，調査のくり返し回数が数回程度の時に得られる情報をもとにして，潜在構造の適当な特性値

⓪一致率（潜在構造についていえば回答の全体の分散に対するbetweenの分散，すなわち潜在構造の分散の割合）

①最小次数分布[3)]の回答確率とクラスの大きさ

②意見の固いグループ（たとえば回答確率が0.9以上のグループ）の割合の最大値と最小値の推定

③意見の浮動しているグループ（たとえば回答確率が0.4から0.6の間）の割合の最大値と最小値の推定

④潜在構造に特殊な分布型（たとえばBeta分布）を仮定したとき得られる分布

等を求める手法といえる．ここでは，3回および4回くり返しのデータが安定した潜在構造をもつことを確め（すなわち，混合二項分布モデルとして解析することが可能である），つぎに，上にのべた推定値を求め，これにもとずき，特定の型の潜在クラスにより近似が可能かどうかを調べるとともに，調査のくり返し回数をふやした時，どの程度推定値が改善されるか等を，実際のデータについて調べ，一般の社会調査における回答の構造についてどのようなことがいえるかを考える．

このような分析によって始めてある意見に対する一般の人々の回答構造について，特定の型に限定されない一般的な取扱いが出来ることになる．たとえば，Wiggins等のように，あらかじめ潜在構造の型について，クラス数を2あるいは3等と限定する方法あるいは潜在クラスを意見の固いクラス，および浮動クラス（回答確率は0.5）と限って分析する方法では，結論が

---

1)　Wiggins［49］ではいろいろのモデルをあつかっているし，変化もあつかっている．
林［20］は3項選択を扱かっている．また，林［21］，Coleman［8］は変化もあつかっている．

2)　潜在クラスの数を限定する方法はこの特殊な場合にあたる．

3)　言葉の意味については，後節および［45］，［46］を参照．

限られてくるばかりでなく，回答の構造について時には非常に偏った結論を導くことになる可能性がある．というのは一般的にいってかなり異なる型のモデルが同一のデータによくあてはまるからである．後節でのべるように特定の型を想定しない分析を進め結論的にみて特定の型で近似できる可能性が高いということになれば，始めてその意見に対する回答の構造として役立つものが得られたといえる．また，特定の型を想定して分析してもそれがあらかじめモデルとして人為的に限定されておればたとえ現在までのデータにはうまくあてはまるとしても将来のデータに対する予測の能力は低いものと考えられる．この意味からも特定の型を想定しない分析方法がよいと考えられる．しかし，調査のくり返し回数が数回程度では，多くの項目についてみると潜在構造の性質を詳しく知るためには情報が足りないので，残念ながら潜在構造として特定の型で近似することが可能であるというところまで至らない場合も多いと予想される．したがって，潜在構造の特性値として，上に述べたように，意見の固い層（たとえば回答確率9割以上のグループ）が最大に見積ったときどのくらいと期待できるかという推定，および浮動層（たとえば回答確率が0.4から0.6）の大きさの割合はどのくらいと見積ればよいか等のことが，回答の構造の内容を考えるとき問題になる．すなわち，ある意見に対する回答が大部分浮動層の回答からなっているのか，あるいは，多くの人の意見は固く，浮動層はごく少数であるのか，ということによって，その回答結果に対する社会的な解釈は異なってくるし，このような内容が情報として得られれば将来に対する予測も異なってくるだろう．社会的にみた解釈ばかりでなく，これを測定操作による誤差の面からみてもこのような回答の質的内容が分れば，測定操作が全体としてさまざまなあいまいさを含むものであるのか，一部分にランダムな誤差が出ているのかというようなことに目安をつけることができるだろう．

以下，実際のデータについて解析例を示しながら，全体のデータについての推定値を一覧表にまとめ，回答の構造について考察していく．

§6 混合2項分布モデルの概要と解析

6.1 主題の定式化

§3のパネル調査の節の最後の所で述べたデータの特徴に着目して§4の回答確率モデルの節で作業仮説として一つの回答確率モデルを提案した．この点に関して一つの数学的根拠を述べておこう．

母集団からランダムに抽出された1個人に同一の2項選択の質問について n 回調査をくり返したときの結果をあらわすベクトルを $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ とする．すなわち，X_j は j 回目の調査結果をあらわしており，たとえば“賛成”ならば1，“反対”ならば0である．このとき

パターン	度数
0000	161
0001	11
0010	9
0100	7
1000	10
0011	2
0101	1
0110	2
1001	2
1010	2
1100	2
0111	5
1011	2
1101	4
1110	3
1111	27
計	250

第1表

パターン	度数
000	734
001	64
010	56
100	60
011	17
101	11
110	14
111	30
計	986

第4表

パータン	度数
000	106
001	50
010	56
100	62
011	61
101	52
110	60
111	114
計	561

第5表

前述のデータの特徴を次のように要約することができる．$(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ を $(1, 2, \cdots, n)$ の任意の置換 (permutation) とするとき

$$\begin{aligned} Pr\{X_{j_1}=\delta_1, X_{j_2}=\delta_2, \cdots, X_{j_n}=\delta_n\} \\ = Pr\{X_1=\delta_1, X_2=\delta_2, \cdots, X_n=\delta_n\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1) \end{aligned}$$

が任意の $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ に対して成立する．たゞし δ_j は 0 か 1 である．たとえば $n=4$, すなわち 4 回のくり返し調査の場合，母集団においては 4 つの回答パターン $(0,0,0,1)$, $(0,0,1,0)$, $(0,1,0,0)$, $(1,0,0,0)$ の割合，6 つの回答パターン $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$, $(0,1,1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(1,0,1,0)$, $(1,1,0,0)$ の割合，および 4 つの回答パターン $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$ の割合がそれぞれ等しいことを意味している．たとえば§3 に示した第 1 表，第 4 表，第 5 表のデータを回答パターンの形で示すと前頁のようになっているが，第 1 表は検定するまでもなく，また第 4 表，第 5 表については χ^2-検定を行うことによって，上に要約した仮説は採択される．

ところで (1) は確率変数 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ が交換可能 (exchangeable) であるということの定義に他ならない．(たとえば [11] の p. 225 参照)．ところでもし 0, 1 のみを値にとる確率変数の無限列 $(X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots)$ が交換可能 (すなわち任意の有限の n に対して $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が交換可能) であるならば

$$Pr\{X_1=1, \cdots, X_k=1,\ X_{k+1}=0, \cdots, X_n=0\} = \int_0^1 \theta^k (1-\theta)^{n-k} F\{d\theta\}$$

が $k=0, 1, 2, \cdots, n$, $n=1, 2, \cdots$ に対して成立するような区間 $[0, 1]$ 上の確率分布 F が存在するという定理がある (上記文献の同所参照)．すなわち 0, 1 のみを値にとる確率変数の無限列が交換可能ならば，その有限次元の確率法則は混合 2 項分布として表現されるということになる．

われわれが実際に検証できるのは有限の n (たとえば $n=4$) に対する交換可能性だけであるから，このことから直ちに混合 2 項分布モデルの妥当性を導くことはできないが少くとも一つの根拠としてとりあげてよかろう．

さて以上のような理由から回答変動の分析にあって [45] の 146 ページに述べたように，同一質問を n 回同一人に対して行なうときの回答について次のことを仮定する．2 項選択の質問の場合，選択肢を '1' と '0' で表わすと，回答は確率的で '1' の確率が p の Bernoulli 試行をなす．したがって n 回中 '1' と回答する回数は 2 項分布 $B(n, p)$ に従う．p は一般に各人ごとに異なっている．母集団における p の分布の分布関数を $\Lambda(p)$ とする．異なった人の回答は独立である．

このように仮定すると，n 回くり返しの調査により得られるデータは混合 2 項分布

$$p_k = \int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, d\Lambda(p), \quad k=0, 1, \cdots, n$$

からのサンプルとみなすことができる．そして目的は p の母集団分布 $\Lambda(p)$，回答確率分布とよぶ，に関する各種の情報を引き出すことであるといえる．

6.2 2, 3 の有用な定理

[45] において，パネル調査のデータを用いて回答変動を混合 2 項分布モデルによって検討する方法を示した．そこで示された結果や，使用された説明例は調査回数 n が 3 の場合についてであった．ここでは主要な結果を $n=4$ までの場合に拡張しておく．定理の番号は [45] のものと一致させてある．

まず [45] に示されている定理の訂正，追加をしておく：

定理 2　区間 [a, b] で非負な n 次多項式は次のような一般形をもつ；

$n=2m$ のとき；

$$g(t) = \left(\sum_{i=0}^{m} x_i t^i\right)^2 + (t-a)(b-t)\left(\sum_{i=0}^{m-1} y_i t^i\right)^2$$

$n=2m-1$ のとき；

$$g(t)=(t-a)\left(\sum_{i=0}^{m-1}x_i t^i\right)^2+(b-t)\left(\sum_{i=0}^{m-1}y_i t^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{m-2}z_i t^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{m-2}w_i t^i\right)^2$$

ここで $x_i,\ y_i,\ z_i,\ w_i$ などは任意の実数である（注意および証明は付録）．なお $n=2m-1$ の場合最後の2項は $m=1$ のときは0である．

定理 2′　$a<b<c<d$ として $[a,b]\cup[c,d]$ で非負な1次，2次，3次，4次の多項式は，それぞれ次のような一般形をもつ；

i)　$x_0^2(t-a)+y_0^2(d-t)$

ii)　$w_0^2+(x_0+x_1t)^2+y_0^2(t-a)(d-t)+z_0^2(t-b)(t-c)$

iii)　$\{w_0^2+(x_0+x_1t)^2\}(t-a)+\{s_0^2+(y_0+y_1t)^2\}(d-t)$
$+(t-a)(t-b)(t-c)u_0^2+(t-b)(t-c)(d-t)v_0^2$

iv)　$\left(\sum_{i=0}^{2}x_i t^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{1}y_i t^i\right)^2+r_0^2+(t-a)(d-t)\{w_0^2+(z_0+z_1t)^2\}$
$+(t-b)(t-c)\{v_0^2+(u_0+u_1t)^2\}+(t-a)(t-b)(t-c)(d-t)s_0^2$

ここで，$x_i,\ y_i,\ w_i,\ z_i,\ s_i,\ u_i,\ v_i,\ r_i$ は任意の実数である（証明は付録）．

以上で $[a,b]$ あるいは $[a,b]\cup[c,d]$ 上で非負な多項式の一般形が求まったので定理1によって定理3や定理3′が導けることになった．ところで定理2の $n=2m-1,\ m>1,$ の場合に $\left(\sum_{i=0}^{m-2}z_i t^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{m-2}w_i t^i\right)^2$ という項がつけ加えられたので，その影響を調べておく．$g(t)=$ $(t-a)\left(\sum_{i=0}^{m-1}x_i t^i\right)^2+(b-t)\left(\sum_{i=0}^{m-1}y_i t^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{m-2}z_i t^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{m-2}w_i t^i\right)^2$ を展開して t^i のところに μ_i を代入すると，その結果は $x_0,\cdots,x_{m-1},y_0,\cdots,y_{m-1},z_0,\cdots,z_{m-2},w_0,\cdots,w_{m-2}$ に関する2次形式となるが，それは次のようになる．

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{m}(1,m)-a\,\boldsymbol{m}(0,m-1))\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}(b\,\boldsymbol{m}(0,m-1)-\boldsymbol{m}(1,m))\boldsymbol{y}'$$
$$+\boldsymbol{z}\,\boldsymbol{m}(0,m-2)\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{w}\,\boldsymbol{m}(0,m-2)\boldsymbol{w}'$$

ここで，$\boldsymbol{x}=(x_0,\cdots,x_{m-1}),\cdots,\boldsymbol{w}=(w_0,\cdots,w_{m-2})$ であり，$\boldsymbol{m}(i,j)$ については[45]の148ページに定義がある．この2次形式が非負定値なることは $\boldsymbol{m}(1,m)-a\boldsymbol{m}(0,m-1)$，$b\boldsymbol{m}(0,m-1)-\boldsymbol{m}(1,m)$，$\boldsymbol{m}(0,m-2)$ がそれぞれ非負定値ということと同等である．ところで最初の二つの行列が非負定値なら，その和 $(b-a)\boldsymbol{m}(0,m-1)$ が非負定値で，$b-a>0$ であるから $\boldsymbol{m}(0,m-1)$ が非負定値，したがって $\boldsymbol{m}(0,m-2)$ も非負定値となる．以上のような理由で定理3は前のまゝ成立する．

[45]の定理3′を $n=1,2,4$ の場合も追加して述べる．

定理 3′　$\mu_0=1,\mu_1,\cdots,\mu_n$ が $[a,b]\cup[c,d]\,(a<b<c<d)$ 上の確率分布のモーメントなるための必要十分条件は，$n=1,2,3,4$ に対して夫々次のようになる．

(i)　$\boldsymbol{m}(1,1)-a\boldsymbol{m}(0,0)\geq 0$，且つ $d\boldsymbol{m}(0,0)-\boldsymbol{m}(1,1)\geq 0$

(ii)　$\boldsymbol{m}(0,1)\geq 0$，且つ $-\boldsymbol{m}(2,2)+(a+d)\boldsymbol{m}(1,1)-ad\,\boldsymbol{m}(0,0)\geq 0$
　且つ　$\boldsymbol{m}(2,2)-(b+c)\boldsymbol{m}(1,1)+bc\geq 0$

(iii)　$\boldsymbol{m}(1,1)-a\boldsymbol{m}(0,0)\geq 0$，且つ $\boldsymbol{m}(1,2)-a\boldsymbol{m}(0,1)\geq 0$
　且つ　$d\boldsymbol{m}(0,0)-\boldsymbol{m}(1,1)\geq 0$，且つ $d\boldsymbol{m}(0,1)-\boldsymbol{m}(1,2)\geq 0$
　且つ　$\boldsymbol{m}(3,3)-(a+b+c)\boldsymbol{m}(2,2)+(ab+bc+ca)\boldsymbol{m}(1,1)$
　　　$-abc\,\boldsymbol{m}(0,0)\geq 0$
　且つ　$-\boldsymbol{m}(3,3)+(b+c+d)\boldsymbol{m}(2,2)-(bc+cd+db)\boldsymbol{m}(1,1)$
　　　$+bcd\,\boldsymbol{m}(0,0)\geq 0$

(iv)　$\boldsymbol{m}(0,2)\geq 0$，且つ $\boldsymbol{m}(0,1)\geq 0$，且つ
　$-\boldsymbol{m}(2,2)+(a+d)\boldsymbol{m}(1,1)-ad\,\boldsymbol{m}(0,0)\geq 0$，且つ

$$-\boldsymbol{m}(2,3)+(a+d)\boldsymbol{m}(1,2)-a\,d\,\boldsymbol{m}(0,1)\geq 0,\ \text{且つ}$$
$$\boldsymbol{m}(2,2)-(b+c)\boldsymbol{m}(1,1)+b\,c\,\boldsymbol{m}(0,0)\geq 0,\ \text{且つ}$$
$$\boldsymbol{m}(2,3)-(b+c)\boldsymbol{m}(1,2)+b\,c\,\boldsymbol{m}(0,1)\geq 0,\ \text{且つ}$$
$$-\boldsymbol{m}(4,4)+(a+b+c+d)\boldsymbol{m}(3,3)-(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\cdot\boldsymbol{m}(2,2)+(abc+abd+acd+bcd)\boldsymbol{m}(1,1)-abcd\cdot\boldsymbol{m}(0,0)\geq 0$$

ここで $\boldsymbol{m}(i,j)\geq 0$ は行列 $\boldsymbol{m}(i,j)$ が非負定値なることを意味する.

証明　定理1と定理2′より明らかである.

次に $\mu_0=1,\mu_1,\cdots,\mu_n$ が $[0,1]$ 上の分布のモーメント列になりうるか否かを定理3を用いて調べたときに，非負性を要求されている行列の中で非負定値ではあるが正定値ではないものが現われた場合について考察を加えておく．定理3で $n=2m$ の場合に出てくる行列 $\boldsymbol{m}(0,m)$, $\boldsymbol{m}(1,m)-\boldsymbol{m}(2,m+1)$ を夫々 ε_1, ε_2, $n=2m-1$ の場合に出てくる行列 $\boldsymbol{m}(1,m)$, $\boldsymbol{m}(0,m-1)-\boldsymbol{m}(1,m)$ を夫々 $\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2$ と書くことにする．今 $(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ は $[0,1]$ 上の分布で実現される，すなわち n の奇偶に応じて $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$ あるいは ε_1, ε_2 は非負定値になっていることは仮定する．したがって定理4′によって適当な $l(\leq m+1)$ に対して

$$\mu_i=\sum_{k=1}^{l}p_k x_k{}^i\qquad(i=0,1,\cdots,n)$$

という形に表わされている（p_k や x_k は非負，x_k はすべて異なっている)．この関係を代入して ε_1, ε_2, $\boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta}_2$ は次のように表わされる：

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}\Sigma p_k & \Sigma p_k x_k\cdots\cdots & \Sigma p_k x_k{}^m\\ \vdots & & \vdots\\ \Sigma p_k x_k{}^m & \cdots\cdots\cdots\cdots & \Sigma p_k x_k{}^{2m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots\cdots & 1\\ x_1 & x_2 & & x_l\\ \vdots & & & \vdots\\ x_1{}^m & x_2{}^m & \cdots\cdots & x_l{}^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1 & p_1x_1\cdots\cdots & p_1x_1{}^m\\ \vdots & & \vdots\\ p_l & p_lx_l\cdots\cdots & p_lx_l{}^m\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}\Sigma p_k(1-x_k)x_k\cdots\cdots\cdots & \Sigma p_k(1-x_k)x_k{}^m\\ \vdots & \vdots\\ \Sigma p_k(1-x_k)x_k{}^m\cdots\cdots & \Sigma p_k(1-x_k)x_k{}^{2m-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cdots\cdots\cdots & 1\\ x_1 & \cdots\cdots\cdots & x_l\\ \vdots & & \vdots\\ x_1{}^{m-1} & \cdots\cdots & x_l{}^{m-1}\end{pmatrix}\times$$
$$\begin{pmatrix}p_1(1-x_1)x_1\cdots\cdots & p_1(1-x_1)x_1{}^m\\ \vdots & \vdots\\ p_l(1-x_l)x_l\cdots\cdots & p_l(1-x_l)x^m{}_l\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}_1=\begin{pmatrix}\Sigma p_k x_k\cdots\cdots\cdots & \Sigma p_k x_k{}^m\\ \vdots & \vdots\\ \Sigma p_k x_k{}^m\cdots\cdots & \Sigma p_k x_k{}^{2m-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cdots\cdots\cdots & 1\\ x_1 & \cdots\cdots\cdots & x_l\\ \vdots & & \vdots\\ x_1{}^{m-1} & \cdots\cdots & x_l{}^{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1x_1\cdots\cdots & p_1x_1{}^m\\ \vdots & \vdots\\ p_lx_l\cdots\cdots & p_lx_l{}^m\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}_2=\begin{pmatrix}\Sigma p_k(1-x_k)\cdots\cdots\cdots\cdots & \Sigma p_k(1-x_k)x_k{}^{m-1}\\ \vdots & \vdots\\ \Sigma p_k(1-x_k)x_k{}^{m-1}\cdots\cdots & \Sigma p_k(1-x_k)x_k{}^{2m-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cdots\cdots & 1\\ x_1 & \cdots\cdots & x_l\\ \vdots & & \vdots\\ x_1{}^{m-1} & \cdots & x_l{}^{m-1}\end{pmatrix}\times$$
$$\begin{pmatrix}p_1(1-x_1)\cdots\cdots & p_1(1-x_1)x_1{}^{m-1}\\ \vdots & \vdots\\ p_l(1-x_l)\cdots\cdots & p_l(1-x_l)x_l{}^{m-1}\end{pmatrix}$$

上の表現をもとにして次のことがいえる；

$l\leq m$ なら $|\varepsilon_1|=0$, $l=m+1$ なら $|\varepsilon_1|>0$.

$l\leq m-1$ なら $|\varepsilon_2|=0$, $l=m$ で0或いは1なる x_k があるなら $|\varepsilon_2|=0$, $l=m$ で $0<x_1,\cdots,x_m<1$ なら $|\varepsilon_2|>0$, $l=m+1$ で0か1の一方のみが $x_1,\cdots,x_k$ の中にあるときは $|\varepsilon_2|>0$,

$l=m+1$ で 0, 1 の両方が $x_1, \cdots, x_k$ の中にあるときは $|\mathcal{E}_2|=0$

$l \leq m-1$ なら $|\theta_1|=0$, $l=m$ で 0 なる x_k があれば $|\theta_1|=0$, $l=m$ で 0 なる x_k がなければ $|\theta_1|>0$, $l=m+1$ で 0 なる x_k があれば $|\theta_1|>0$

$l \leq m-1$ なら $|\theta_2|=0$, $l=m$ で 1 なる x_k があれば $|\theta_2|=0$, $l=m$ で 1 なる x_k がなければ $|\theta_2|>0$, $l=m+1$ で 1 なる x_k があれば $|\theta_2|>0$.

したがって次の定理を得る.

定理 7

(i) $n=2m$ の場合:

$|\mathcal{E}_1|$, $|\mathcal{E}_2|$ が共に正なら対応する分布の次数は $\dfrac{n+1}{2}$ 以上である.

$|\mathcal{E}_1|>0$, $|\mathcal{E}_2|=0$ なら対応する分布は次数が $n/2$ で {0}, {1} に確率をもっている.

$|\mathcal{E}_1|=0$, $|\mathcal{E}_2|>0$ なら対応する分布は次数が $n/2$ で {0} にも {1} にも確率をもたない.

$|\mathcal{E}_1|=0$, $|\mathcal{E}_2|=0$ なら対応する分布は次数 $(n-1)/2$ 以下である.

(ii) $n=2m-1$ の場合:

$|\theta_1|$, $|\theta_2|$ が共に正なら対応する分布の次数は $(n+1)/2$ 以上である.

$|\theta_1|>0$, $|\theta_2|=0$ なら対応する分布は次数が $n/2$ で {0} に確率を有する.

$|\theta_1|=0$, $|\theta_2|>0$ なら対応する分布は次数が $n/2$ で {1} に確率を有する.

$|\theta_1|=0$, $|\theta_2|=0$ なら対応する分布の次数は $(n-1)/2$ 以下である.

たとえば日本人の性質をあらわしていると思う言葉を選ぶ質問で“明朗”を選んだか否かについてのデータでは, $n=4$ のとき $|\mathcal{E}_1|$ はほとんど 0 である. したがって回答確率分布は次数が 2 で {0}, {1} 以外の 2 点にのみ確率を有するものと考えられる. すなわち $n=3$ の場合の最小次数分布のうちの中間 2 クラス型が実際の回答確率分布に非常に近いと思われる.

6.3 最小次数分布のあてはめ

次に定理 4 および定理 4′ に説明されている最小次数分布を求めておく. 定理 4′ の方程式を $n=1, 2, 3, 4$ の場合に解くことにより次の結果を得る.

1	x_k	μ_1	0	1	
	p_k	1	$1-\mu_1$	μ_1	
2	x_k	0	μ_2/μ_1	δ_2/δ_1	1
	p_k	$(\mu_2-\mu_1^2)/\mu_2$	μ_1^2/μ_2	$\delta_1^2/(\delta_1-\delta_2)$	$(\mu_2-\mu_1^2)/(\delta_1-\delta_2)$
3	x_k	$x_1=(A-\sqrt{A^2-4B})/2$	$x_2=(A+\sqrt{A^2-4B})/2$		
	p_k	$(x_2-\mu_1)/(x_2-x_1)$	$(\mu_1-x_1)/(x_2-x_1)$		
3	x_k	0	$x_2=\delta_3/\delta_2$	1	
	p_k	$(\delta_1 x_2-\delta_2)/x_2$	$\delta_2/[x_2(1-x_2)]$	$(\mu_1\mu_3-\mu_2^2)/(\delta_2-\delta_3)$	
4	x_k	0	$x_2=\dfrac{C-\sqrt{C^2-4D}}{2}$	$x_3=\dfrac{C+\sqrt{C^2-4D}}{2}$	
	p_k	$\dfrac{D-\mu_1 C+\mu_2}{D}$	$\dfrac{\mu_1 x_3-\mu_2}{x_2(x_3-x_2)}$	$\dfrac{\mu_2-\mu_1 x_2}{x_3(x_3-x_2)}$	
4	x_k	$x_1=\dfrac{E-\sqrt{E^2-4F}}{2}$	$x_2=\dfrac{E+\sqrt{E^2-4F}}{2}$	1	
	p_k	$\dfrac{\delta_1 x_2-\delta_2}{(1-x_1)(x_2-x_1)}$	$\dfrac{\delta_2-\delta_1 x_1}{(1-x_2)(x_2-x_1)}$	$\dfrac{\mu_2+F-\mu_1 E}{1+F-E}$	

たゞし
$$\delta_i=\mu_{i-1}-\mu_i\,(i=1,2,\cdots,n)$$
$$A=\frac{\mu_3-\mu_1\mu_2}{\mu_2-\mu_1^2},\qquad B=\frac{\mu_1\mu_3-\mu_2^2}{\mu_2-\mu_1^2}$$
$$C=\frac{\mu_1\mu_4-\mu_2\mu_3}{\mu_1\mu_3-\mu_2^2},\quad D=\frac{\mu_2\mu_4-\mu_3^2}{\mu_1\mu_3-\mu_2^2}$$
$$E=\frac{\delta_1\delta_4-\delta_2\delta_3}{\delta_1\delta_3-\delta_2^2},\quad F=\frac{\delta_2\delta_4-\delta_3^2}{\delta_1\delta_3-\delta_2^2}$$
である.

6.4 “固さ”限界 β_F と “浮動”限界 β_M

質問によって回答が比較的安定しているものと比較的変動の大きいものがある．このことは回答確率分布の方で考えると分布が区間 [0, 1] の両端に集中しているということ，および区間の中央に集中しているということに対応している．こういった性質に関連する尺度として，また種々の解析にとって有用な補助量として “固さ” 限界 β_F と “浮動” 限界 β_M を [45] において定義した．その定義はそれぞれ
$$\beta_F=sup\{\beta\,|\,\exists P\in\boldsymbol{P};\ P([0,1-\beta]\cup[\beta,1])=1\}$$
$$\beta_M=inf\{\beta\,|\,\exists P\in\boldsymbol{P};\ P([1-\beta,\beta])=1\}$$
であった．ここで $\boldsymbol{P}$ は与えられた $(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ をモーメントにもつ [0, 1] 上の確率分布の全体である．$(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ を簡単のため $\boldsymbol{\mu}_n$ と書くことにする．$\boldsymbol{\mu}_n$ が [0, 1] 上の分布のモーメントになり得ることを仮定しておけば，定理 3，定理 3′ によって，$\boldsymbol{\mu}_n$ が $[1-\beta,\beta]$ あるいは $[0,1-\beta]\cup[\beta,1]$ 上の分布のモーメントとなり得るための条件は n=1, 2, 3, 4 に対して次のようになる．

$[1-\beta,\beta]$ に対しては

n=1 のとき，$1-\beta\le\mu_1\le\beta$

n=2 のとき，$(1-\beta)\beta\leqq\mu_1-\mu_2$，すなわち $\beta\ge\dfrac{1+\sqrt{1-4\delta_2}}{2}$

n=3 のとき，$\beta\ge\max(\mu_1,1-\mu_1)$
$$(1-\beta)^2(\mu_2-\mu_1^2)-(1-\beta)(\mu_3-\mu_1\mu_2)+(\mu_1\mu_3-\mu_2^2)\ge0$$
$$\beta^2(\mu_2-\mu_1^2)-\beta(\mu_3-\mu_1\mu_2)+(\mu_1\mu_3-\mu_2^2)\ge0$$
ところで最初の条件はあとの二つの条件に含まれている．下の二つの条件から
$$\beta\geqq\frac{(\mu_3-\mu_1\mu_2)+\sqrt{(\mu_3-\mu_1\mu_2)^2-4(\mu_2-\mu_1^2)(\mu_1\mu_3-\mu_2^2)}}{2(\mu_2-\mu_1^2)}\equiv\gamma_+$$
$$1-\beta\leqq\frac{(\mu_3-\mu_1\mu_2)-\sqrt{(\mu_3-\mu_1\mu_2)^2-4(\mu_2-\mu_1^2)(\mu_1\mu_3-\mu_2^2)}}{2(\mu_2-\mu_1^2)}\equiv\gamma_-$$
すなわち
$$\beta\geqq\max(\gamma_+,1-\gamma_-)$$
n=4 のとき，$\beta(1-\beta)=\varepsilon$ とおくと
$$\varepsilon\le\delta_2$$
$$\varepsilon^2(\mu_2-\mu_1^2)-\varepsilon(\delta_4-2\delta_3\mu_1+\delta_2\mu_2)+(\delta_2\delta_4-\delta_3^2)\geqq0$$
下の不等式の左辺の ε に δ_2 を代入すると
$$\delta_2^2(\mu_2-\mu_1^2)-\delta_2\delta_4+2\delta_2\delta_3\mu_1-\delta_2^2\mu_2+\delta_2\delta_4-\delta_3^2$$
$$=-(\delta_2\mu_1-\delta_3)^2\le0$$
であるから，この場合も第1の条件は第2の条件に含まれている．したがって
$$\varepsilon\leqq\frac{(\delta_4-2\delta_3\mu_1+\delta_2\mu_2)-\sqrt{(\delta_4-2\delta_3\mu_1+\delta_2\mu_2)^2-4(\mu_2-\mu_1^2)(\delta_2\delta_4-\delta_3^2)}}{2(\mu_2-\mu_1^2)}\equiv\gamma$$

すなわち

$$\beta(1-\beta)\leqq\gamma$$

$$\beta\geqq\frac{1+\sqrt{1-4\gamma}}{2}$$

を得る.

$[0,1-\beta]\cup[\beta,1]$ に対しては

$n=1$ のときは，μ_1 は $0\leq\mu_1\leq 1$ でありさえすれば $\{0\}\cup\{1\}$ 上の分布の平均値として表わされる.

$n=2$ のとき，

$$\beta(1-\beta)\geq\mu_1-\mu_2$$

すなわち

$$\beta\leq\frac{1+\sqrt{1-4\delta_2}}{2}$$

$n=3$ のとき，

$$\beta(1-\beta)\leq\frac{\delta_3}{\mu_1}$$

$$\beta(1-\beta)\geq\frac{\delta_2-\delta_3}{\delta_1}$$

したがって

$$\beta\leq\max\left(\frac{1+\sqrt{1-4\dfrac{\delta_3}{\mu_1}}}{2},\ \frac{1+\sqrt{1-4\dfrac{\delta_2-\delta_3}{\delta_1}}}{2}\right)$$

$n=4$ のとき，$\beta(1-\beta)=\varepsilon$ とおくと

$$\varepsilon\geq\delta_2$$

$$\varepsilon\geq\frac{\delta_3-\delta_4}{\delta_2}$$

$$\varepsilon^2(\mu_2-\mu_1^2)-\varepsilon(\delta_4-2\mu_1\delta_3+\delta_2\mu_2)+(\delta_2\delta_4-\delta_3^2)\geq 0$$

第1の条件は第3の条件に含まれていることがわかる.

$$\varepsilon^2(\mu_2-\mu_1^2)-\varepsilon(\delta_4-2\mu_1\delta_3+\delta_2\mu_2)+(\delta_2\delta_4-\delta_3^2)=0$$

の大きい方の根を ε_+ として

$$\max\left(\varepsilon_+,\ \frac{\delta_3-\delta_4}{\delta_2}\right)=u$$

とおけば

$$\beta\leq\frac{1+\sqrt{1-4u}}{2}$$

以上をまとめると

n	β_M	β_F
1	$\max(\mu_1, 1-\mu_1)$	1
2	$\dfrac{1+\sqrt{1-4\delta_2}}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{1-4\delta_2}}{2}$
3	$\max\left(\dfrac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A},\ 1-\dfrac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)$	$\max\left(\dfrac{1+\sqrt{1-4\dfrac{\delta_3}{\mu_1}}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{1-4\dfrac{\delta_2-\delta_3}{\delta_1}}}{2}\right)$

n	β_M	β_F
4	$\dfrac{1+\sqrt{1-4D_1}}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{1-4D_2}}{2}$

ただし，

$$A=\mu_2-\mu_1^2,\ B=\mu_3-\mu_1\mu_2,\ C=\mu_1\mu_3-\mu_2^2,\ D_1=\frac{B_1-\sqrt{B_1^2-4AC_1}}{2A},$$

$$B_1=\delta_4-2\mu_1\delta_3+\mu_2\delta_2,\ C_1=\delta_2\delta_4-\delta_3^2,\ D_2=\max\left(\frac{B_1+\sqrt{B_1^2-4AC_1}}{2A},\ \frac{\delta_3-\delta_4}{\delta_2}\right)$$

6.5　データの出現範囲の予測

次に n 回くり返しのデータから $(n+1)$ 回目のデータの出現範囲を予測するという形で問題を考えてみる．n 回調査したということは $\mu_1,\cdots,\mu_n$ までが与えられたということに対応する(標本変動は考えない)．混合２項分布モデルのもとでは，$(n+1)$ 回目の調査で得られる μ_{n+1} が n の奇偶によってそれぞれ次の条件をみたさなければならない:

$n=2m$ のとき:

$$\begin{pmatrix}\mu_1\mu_2\cdots\cdots\mu_{m+1}\\ \mu_2\mu_3\cdots\cdots\mu_{m+2}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \mu_{m+1}\cdots\cdots\mu_{2m+1}\end{pmatrix}\geq 0,\ \begin{pmatrix}1\ \mu_1\cdots\cdots\mu_m\\ \mu_1\mu_2\cdots\cdots\mu_{m+1}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \mu_m\ \cdots\cdots\mu_{2m}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_1\mu_2\cdots\cdots\mu_{m+1}\\ \mu_2\mu_3\cdots\cdots\mu_{m+2}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \mu_{m+1}\cdots\cdots\mu_{2m+1}\end{pmatrix}\geq 0$$

$n=2m-1$ のとき:

$$\begin{pmatrix}1\ \mu_1\cdots\cdots\mu_m\\ \mu_1\mu_2\cdots\cdots\mu_{m+1}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \mu_m\ \cdots\cdots\mu_{2m}\end{pmatrix}\geq 0,\ \begin{pmatrix}\mu_1\ \cdots\cdots\mu_m\\ \mu_2\ \cdots\cdots\mu_{m+1}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \mu_m\cdots\cdots\mu_{2m-1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_2\ \cdots\cdots\mu_{m+1}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \mu_{m+1}\cdots\cdots\mu_{2m}\end{pmatrix}\geq 0$$

$n=2m$ のとき，$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_{2m-1}$ は $\boldsymbol{m}(1,m)\geq 0$ および $\boldsymbol{m}(0,m-1)-\boldsymbol{m}(1,m)\geq 0$ をみたしているから μ_{2m+1} につけられる条件は

$$|\boldsymbol{m}(1,m+1)|\geq 0 \text{ および } |\boldsymbol{m}(0,m)-\boldsymbol{m}(1,m+1)|\geq 0$$

に帰着する．ところで

$$|\boldsymbol{m}(1,m+1)|=\mu_{2m+1}|\boldsymbol{m}(1,m)|+\begin{vmatrix}\mu_1 & \cdots\mu_m & \mu_{m+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ & & \mu_{2m}\\ \mu_{m+1} & \cdots\mu_{2m} & 0\end{vmatrix}$$

したがって $|\boldsymbol{m}(1,m)|\geq 0$ より

$$\mu_{2m+1}\geq\frac{-1}{|\boldsymbol{m}(1,m)|}\begin{vmatrix}\mu_1 & \cdots\cdots\mu_{m+1}\\ \vdots & \vdots\\ \mu_{m+1}\cdots\cdots & 0\end{vmatrix}$$

が出てくる．$\mu_{i-1}-\mu_i=\nu_i$，$\begin{pmatrix}\nu_i\cdots\cdots\nu_j\\ \vdots \qquad \vdots\\ \nu_j\cdots\cdots\nu_{j+i-1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{n}(i,j)$ とおくと $|\boldsymbol{m}(0,m)-\boldsymbol{m}(1,m+1)|\geq 0$

から

$$\delta_{2m+1}\geq\frac{-1}{|\boldsymbol{n}(1,m)|}\begin{vmatrix}\nu_1 & \cdots\cdots\nu_{m+1}\\ \vdots & \vdots\\ \nu_{m+1}\cdots\cdots & 0\end{vmatrix}$$

が出てくる．したがって

$$\mu_{2m}+\frac{\begin{vmatrix}\nu_1 & \cdots\nu_{m+1}\\ \vdots & \vdots\\ \nu_{m+1}\cdots & 0\end{vmatrix}}{|\boldsymbol{n}(1,m)|}\geq\mu_{2m+1}\geq\frac{-\begin{vmatrix}\mu_1 & \cdots\mu_{m+1}\\ \vdots & \vdots\\ \mu_{m+1}\cdots & 0\end{vmatrix}}{|\boldsymbol{m}(1,m)|}$$

$n=2m-1$ のときも同様にして

$$\mu_{2m-1}+\frac{\begin{vmatrix} \nu_2 & \cdots\cdots & \nu_m \\ \vdots & & \vdots \\ \nu_m & \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix}}{n(2,m)} \geq \mu_{2m} \geq \frac{-\begin{vmatrix} 1 & \mu_1 & \cdots\cdots & \mu_m \\ \vdots & & & \vdots \\ \mu_m & & \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix}}{m(0,m-1)}$$

さて $(n+1)$ 回まで調査したとき k 回"1"と答える人の母集団比率を $p_k^{(n+1)}$ とおくと [45] の (3) 式から

$$\begin{aligned} p_k^{(n+1)} &= \binom{n+1}{k}\sum_{l=k}^{n+1}\binom{n+1-k}{n+1-l}(-1)^{k+l}\mu_l \\ &= \binom{n+1}{k}\sum_{l=k}^{n}\binom{n+1-k}{n+1-l}(-1)^{k+l}\mu_l+\binom{n+1}{k}(-1)^{k+n+1}\mu_{n+1} \\ &= p_{k,0}^{(n+1)}+\binom{n+1}{k}(-1)^{k+n+1}\mu_{n+1} \quad \text{（とおく）} \end{aligned}$$

であるから上で求めた μ_{n+1} の範囲を $[\mu_{n+1}^-, \mu_{n+1}^+]$ とすると $k+n+1$ の奇偶に応じて

$$p_{k,0}^{(n+1)}-\binom{n+1}{k}\mu_{n+1}^+ \leq p_k^{(n+1)} \leq p_{k,0}^{(n+1)}-\binom{n+1}{k}\mu_{n+1}^-$$

$$p_{k,0}^{(n+1)}+\binom{n+1}{k}\mu_{n+1}^- \leq p_k^{(n+1)} \leq p_{k,0}^{(n+1)}+\binom{n+1}{k}\mu_{n+1}^+$$

が得られる．

ところで定理7を導入している部分から次のことがわかる．n 回調査した時点で得られた $\mu_1, \cdots, \mu_n$ にもとずいて計算した2種類の最小次数分布は一般に $\dfrac{n+1}{2}$ を次数としている．したがって $\mu_1, \cdots, \mu_n, \mu_{n+1}$ は次の条件をみたす．

$n=2m$ で $\mu_1, \cdots, \mu_n$ が $0, x_1, \cdots, x_m$ にのみ確率をもつ最小次数分布なら $\mu_1, \cdots, \mu_n, \mu_{n+1}$ は $|m(0,m)-m(1,m+1)|=0$ をみたし，$\mu_1, \cdots, \mu_n$ が $x_1, \cdots, x_m, 1$ にのみ確率をもつ最小次数分布なら $\mu_1, \cdots, \mu_n, \mu_{n+1}$ は $|m(1,m+1)|=0$ みたす．

$n=2m-1$ で $\mu_1, \cdots, \mu_n$ が $\{0\}\cup\{1\}$ に確率をもたない最小次数分布に対応していれば $\mu_1, \cdots, \mu_{n+1}$ は $|m(0,m)|=0$ をみたし，$\mu_1, \cdots, \mu_n$ が $\{0\}\cup\{1\}$ に確率をもつ最小次数分布に対応していれば $\mu_1, \cdots, \mu_{n+1}$ は $|m(1,m)-m(2,m+1)|=0$ をみたす．

以上の考察より μ_{n+1}^+ や μ_{n+1}^- は，n のときの最小次数分布から定まる μ_{n+1} に対応していることがわかる．$n=2m$ なら μ_{n+1}^+ は $\{1\}$ に確率をもつ方から，μ_{n+1}^- は $\{0\}$ に確率をもつ方からきまる．$n=2m-1$ なら μ_{n+1}^+ は $\{0\}\cup\{1\}$ に確率をもたない方，μ_{n+1}^- は $\{0\}\cup\{1\}$ に確率をもつ方から定まる．したがって各問について $n=4$ までについて計算した最小次数分布を用いて $(n+1)$ 回目のデータの出現範囲は容易に予測できる．すなわち n 回目のデータが得られたとき $(n+1)$ 回目のデータの出現範囲（必要条件）の計算は $n=1, 2, 3, 4$ に対して次のようになる：

i) $n=1$

$$\mu_2^+=\mu_1, \ \mu_2^-=\mu_1^2$$

$$p_0^{(2)} \text{ の限界} = \binom{2}{0}\sum_{l=0}^{1}\binom{2-0}{2-l}(-1)^l\mu_l+\binom{2}{0}(-1)^2\mu_2^*$$

（但し μ_2^* は上限のとき μ_2^+，下限のとき μ_2^-）

$$=1-2\mu_1+\mu_2^*$$

$$p_1^{(2)} \text{ の限界} = \binom{2}{1}\sum_{l=1}^{1}\binom{2-1}{2-l}(-1)^{1+l}\mu_l+\binom{2}{1}(-1)^3\mu_2^*$$

$$= 2\mu_1 - 2\mu_2^*$$

$$p_2^{(2)} \text{の限界} = \binom{2}{2}(-1)^4 \mu_2^* = \mu_2^*$$

ii) $n=2$

$\{1\}$ に確率をもつ最小次数分布を $\{x_1, 1; p_1, p_2\}$ とする.（x_1 の確率が p_1, 1 の確率が p_2 ということ）

$$\mu_3^+ = p_1 x_1^3 + p_2$$

を求める.

$\{0\}$ に確率をもつ最小次数分布を $\{0, x_1; p_1, p_2\}$ として

$$\mu_3^- = p_2 x_1^3$$

を求める.

$$p_0^{(3)} \text{の限界} = \binom{3}{0}\sum_{l=0}^{2}\binom{3-0}{3-l}(-1)^l \mu_l + \binom{3}{0}(-1)^3 \mu_3^*$$

$$= 1 - 3\mu_1 + 3\mu_2 - \mu_3^*$$

$$p_1^{(3)} \text{の限界} = \binom{3}{1}\sum_{l=1}^{2}\binom{3-1}{3-l}(-1)^{1+l} \mu_l + \binom{3}{1}(-1)^4 \mu_3^*$$

$$= 3\mu_1 - 6\mu_2 + 3\mu_3^*$$

$$p_2^{(3)} \text{の限界} = \binom{3}{2}\sum_{l=2}^{2}\binom{3-2}{3-l}(-1)^{2+l} \mu_l + \binom{3}{2}(-1)^5 \mu_3^*$$

$$= 3\mu_2 - 3\mu_3^*$$

$$p_3^{(3)} \text{の限界} = \mu_3^*$$

iii) $n=3$

最小次数分布 $\{0, x_1, 1; p_1, p_2, p_3\}$ より

$$\mu_4^+ = p_2 x_1^4 + p_3$$

最小次数分布 $\{x_1, x_2; p_1, p_2\}$ より

$$\mu_4^- = p_1 x_1^4 + p_2 x_2^4$$

を求める.

$$p_0^{(4)} \text{の限界} = \binom{4}{0}\sum_{l=0}^{3}\binom{4-0}{4-l}(-1)^l \mu_l + \binom{4}{0}(-1)^4 \mu_4^*$$

$$= 1 - 4\mu_1 + 6\mu_2 - 4\mu_3 + \mu_4^*$$

$$p_1^{(4)} \text{の限界} = \binom{4}{1}\sum_{l=1}^{3}\binom{4-1}{4-l}(-1)^{1+l} \mu_l + \binom{4}{1}(-1)^5 \mu_4^*$$

$$= 4\mu_1 - 12\mu_2 + 12\mu_3 - 4\mu_4^*$$

$$p_2^{(4)} \text{の限界} = \binom{4}{2}\sum_{l=2}^{3}\binom{4-2}{4-l}(-1)^{2+l} \mu_l + \binom{4}{2}(-1)^6 \mu_4^*$$

$$= 6\mu_2 - 12\mu_3 + 6\mu_4^*$$

$$p_3^{(4)} \text{の限界} = \binom{4}{3}\sum_{l=3}^{3}\binom{4-3}{4-l}(-1)^{3+l} \mu_l + \binom{4}{3}(-1)^7 \mu_4^*$$

$$= 4\mu_3 - 4\mu_4^*$$

$$p_4^{(4)} \text{の限界} = \mu_4^*$$

iv) $n=4$ のとき

最小次数分布 $\{x_1, x_2, 1; p_1, p_2, p_3\}$ より

$$\mu_5^+ = p_1 x_1^5 + p_2 x_2^5 + p_3$$

最小次数分布 $\{0, x_1, x_2; p_1, p_2, p_3\}$ より

$$\mu_5^- = p_2 x_1^5 + p_3 x_2^5$$

を求める．

$$p_0^{(5)} \text{ の限界} = \binom{5}{0}\sum_{l=0}^{4}\binom{5-0}{5-l}(-1)^l \mu_l + \binom{5}{0}(-1)^5 \mu_5^*$$
$$= 1 - 5\mu_1 + 10\mu_2 - 10\mu_3 + 5\mu_4 - \mu_5^*$$

$$p_1^{(5)} \text{ の限界} = \binom{5}{1}\sum_{l=1}^{4}\binom{5-1}{5-l}(-1)^{l+1} \mu_l + \binom{5}{1}(-1)^6 \mu_5^*$$
$$= 5\mu_1 - 20\mu_2 + 30\mu_3 - 20\mu_4 + 5\mu_5^*$$

$$p_2^{(5)} \text{ の限界} = \binom{5}{2}\sum_{l=2}^{4}\binom{5-2}{5-l}(-1)^{l+2} \mu_l + \binom{5}{2}(-1)^7 \mu_5^*$$
$$= 10\mu_2 - 30\mu_3 + 30\mu_4 - 10\mu_5^*$$

$$p_3^{(5)} \text{ の限界} = \binom{5}{3}\sum_{l=3}^{4}\binom{5-3}{5-l}(-1)^{l+3} \mu_l + \binom{5}{3}(-1)^8 \mu_5^*$$
$$= 10\mu_3 - 20\mu_4 + 10\mu_5^*$$

$$p_4^{(5)} \text{ の限界} = \binom{5}{4}\sum_{l=4}^{4}\binom{5-4}{5-l}(-1)^{l+4} \mu_l + \binom{5}{4}(-1)^9 \mu_5^*$$
$$= 5\mu_4 - 5\mu_5^*$$

$$p_5^{(5)} \text{ の限界} = \mu_5^*$$

Q1 (第16表および [46] 参照) についての数値例を示す．

$n=1$:

$\mu_1 = 0.27290$ $\mu_2^+ = 0.27290$ $\mu_2^- = 0.07447$

$(\mu_2 = 0.23537)$

	下限		対称化したデータ		上限
$p_0^{(2)}$	0.52867	<	(0.68957)	<	0.72710
$p_1^{(2)}$	0	<	(0.07506)	<	0.39685
$p_2^{(2)}$	0.07447	<	(0.23537)	<	0.27290

$n=2$:

$$\mu_3^+ = 0.76667 \times 0.05162^3 + 0.23333 = 0.23344$$
$$\mu_3^- = 0.31641 \times 0.86248^3 = 0.20300$$

$(\mu_3 = 0.22042)$

$p_0^{(3)}$	0.65397	<	(0.66698)	<	0.68441
$p_1^{(3)}$	0.01548	<	(0.06775)	<	0.10679
$p_2^{(3)}$	0.00580	<	(0.04485)	<	0.09711
$p_3^{(3)}$	0.20300	<	(0.22042)	<	0.23344

$n=3$:

$$\mu_4^+ = 0.15659 \times 0.39835^4 + 0.21052 = 0.21446$$
$$\mu_4^- = 0.73404 \times 0.03145^4 + 0.26596 \times 0.93928^4 = 0.20701$$

$(\mu_4 = 0.21374)$

$p_0^{(4)}$	0.64595	<	(0.65267)	<	0.65340
$p_1^{(4)}$	0.05435	<	(0.05725)	<	0.08415
$p_2^{(4)}$	0.00926	<	(0.04962)	<	0.05396
$p_3^{(4)}$	0.02383	<	(0.02672)	<	0.05363
$p_4^{(4)}$	0.20701	<	(0.21374)	<	0.21446

$n=4$:

$\mu_5^+ = 0.65683\times0.00642^5+0.13484\times0.44761^5+0.20833=0.21075$

$\mu_5^- = 0.15335\times0.36577^5+0.21878\times0.99098^5 \qquad =0.21009$

$p_0^{(5)}$	0.64295	0.64361
$p_1^{(5)}$	0.04537	0.04866
$p_2^{(5)}$	0.04577	0.05237
$p_3^{(5)}$	0.03033	0.03693
$p_4^{(5)}$	0.01494	0.01823
$p_5^{(5)}$	0.21009	0.21075

6.6 "固い" グループと "浮動" グループの推定

ここで "固い" グループとは回答確率分布の区間 $[0,1]$ の両端に近い部分，"浮動" グループとは $[0,1]$ の中央に近い部分を表わす．以下の解析ではある $\beta\left(0<\beta<\frac{1}{2}\right)$ によって $[0,\beta]\cup[\bar\beta,1]$，たゞし $\bar\beta=1-\beta$，および $[\beta,\bar\beta]$ と表わされる集合をそれぞれ両端に近い部分，中央に近い部分として採用している．またここでいう推定の意味は $\mu_1,\cdots,\mu_n$ が与えられたとき，これらを n 次までのモーメントとする分布の中で $[\beta,\bar\beta]$ あるいは $[0,\beta]\cup[\bar\beta,1]$ の確率を最大あるいは最小にする分布，およびそのときの最大値あるいは最小値を求めることを意味している．厳密には最小値の方は $(\beta,\bar\beta)$ および $[0,\beta)\cup(\bar\beta,1]$ の確率に関してである．したがって結局最大の方について求め方を示せば十分である．そこで $[\beta,\bar\beta]$ あるいは $[0,\beta]\cup[\bar\beta,1]]$ 上の確率の最大値を求める方法をまとめておく．

混合2項分布で n 次までのモーメントが $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ なるものの中で $[\beta,\bar\beta]$ あるいは $[0,\beta]\cup[\bar\beta,1]$ 上の確率を最大にするもの，およびその最大値を求めることが問題になる．$n=3$ のときについては [45] でくわしく論じたがここで $n=1, 2, 3, 4$ の場合についてまとめて述べることにする．方針は共通なのでまずそれを示す．以下各 n について計算法を述べる．

方針：

(i) まず問題にしている集合上の確率の最大値が1か1より小さいかを判定する．$[\beta,\bar\beta]=S_1$，$[0,\beta]\cup[\bar\beta,1]=S_2$ と表わすことにすると，この判定は S_1 の場合は β_M，S_2 の場合は β_F を用いて行われる．すなわち

$$\beta_M\le\bar\beta \Leftrightarrow S_1 \text{ 上の確率の最大値は } 1$$
$$\beta_F\ge\bar\beta \Leftrightarrow S_2 \text{ 上の確率の最大値は } 1$$

(ii) 最大値が1より小さいと判定されたときには定理5を用いる．S_1 の場合も S_2 の場合も方針は共通なので S_i はそれぞれの場合に応じて S_1 あるいは S_2 を表わすものとして話を進める．$\chi_{S_i}(x)$ を集合 S_i の指示関数として $[0,1]$ 上で $f_n(x)\ge\chi_{S_i}(x)$ の成立する n 次の多項式 $f_n(x)$ を考える．$f_n(x)$ と $\chi_{S_i}(x)$ の交点（接点も含む）のみに確率を有する離散分布の中で S_i 上の確率を最大にするものを求める．

次に $n=1, 2, 3, 4$ について上の方針に基ずく計算法を示す．

$n=1$ の場合：

(i) $\beta_M=\max\{\mu_1,\ 1-\mu_1\}$ であることから $\beta\le\mu_1\le\bar\beta$ なら S_1 上の確率の最大値は1である．一方 $n=1$ のときの最小次数分布には $\{0\}\cup\{1\}$ 上のみに確率を有するものがあるから明らかに $\beta_F=1$ となり S_2 上の確率の最大値はつねに1となる．

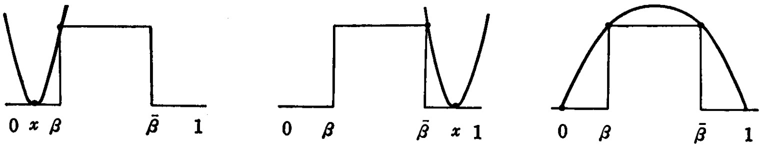
(ii) $\mu_1<\beta$ のときは S_1 上の確率の最大値は μ_1/β で，これを達成する分布は点 0, β にそれぞれ確率 $1-\mu_1/\beta$, μ_1/β を有するものである．

$\mu_1>\bar\beta$ のときは S_1 上の確率の最大値は δ_1/β で，これを達成する分布は点 $\bar\beta$, 1 にそれぞれ確率 δ_1/β, $1-\delta_1/\beta$ を有するものである．たゞし $\delta_i=\mu_{i-1}-\mu_i$ である．

$n=2$ の場合：

(i) $\beta_M=\beta_F=(1+\sqrt{1-4\delta_2})/2$ であった．

(ii) S_1 の場合：S_1 以外の少くも一点で $\chi_{S_i}(x)$ と交点を有する2次式 $f_2(x)$ で $[0,1]$ 上で $f_2(x)\geqq\chi_{S_i}(x)$ の成り立つものは



(イ)　(イ')　(ロ)

の三つのタイプに分類される．それぞれのタイプについて計算した結果は次のようになる．

(イ) もしこのタイプが可能であるなら，分布は一意に確定する．すなわち $x=(\beta\mu_1-\mu_2)/(\beta-\mu_1)$，$p_x=(\beta-\mu_1)/(\beta-x)$，$p_\beta=(\mu_1-x)/(\beta-x)$ 以外にはない．これらの値を実際に求めてみて $0\leq x\leq\beta$, $p_x\geqq 0$, $p_\beta\geqq 0$ になっていればこのときの p_β が現在求めている S_1 上の確率の最大値の候補になる．

(イ)' 同様に $x=(\bar\beta\mu_1-\mu_2)/(\bar\beta-\mu_1)$，$p_x=(\bar\beta-\mu_1)/(\bar\beta-x)$，$p_{\bar\beta}=(\mu_1-x)/(\bar\beta-x)$ を計算してみて $\bar\beta\leq x\leq 1$, $p_x\geq 0$, $p_{\bar\beta}\geq 0$ になっていれば，$p_{\bar\beta}$ が S_1 上の確率の最大値の候補になる．

(ロ) この場合は分布は一意には定まらないが，S_1 上の確率すなわち $p_\beta+p_{\bar\beta}$ は一意に定まることがわかる．その値は δ_2/ε である．(ロ)のタイプの分布があるかないかは

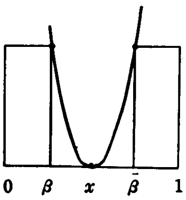
$$p_0=(\beta\delta_1-\delta_2)/\beta,\ p_\beta=\delta_2/\varepsilon,\ p_{\bar\beta}=0,\ p_1=(\varepsilon\mu_1-\beta\delta_2)/\varepsilon$$

および

$$p_0=0,\ p_\beta=(\bar\beta\delta_1-\delta_2)/((\bar\beta-\beta)\bar\beta),\ p_{\bar\beta}=(\delta_2-\beta\delta_1)/((\bar\beta-\beta)\beta),\ p_1=(\varepsilon-\delta_2)/\varepsilon$$

の2組の数値を求めて，p_0, p_β, $p_{\bar\beta}$, $p_1\geq 0$ のものがあるかないかで判定される．あればそれが(ロ)の形の分布の一例になる．

以上要約して(イ)，(イ)'，(ロ)のそれぞれについて上で示した数値を計算してみて，各タイプが可能か否か判定し可能なものについて S_1 上の確率を比較すればよいということになる．



S_2 の場合：S_2 以外の少くも1点で $\chi_{S_2}(x)$ と交点を有する2次式は左図のタイプに限られる．この場合を整理すると3点 β, x, $\bar\beta$ のみに確率を有する分布が存在するためには

$$(\bar\beta\mu_1-\mu_2)/(\bar\beta-\mu_1)\leq x\leq(\mu_2-\beta\mu_1)/(\mu_1-\beta)$$

の成立することが必要である．そしてこの区間が $x=\dfrac{1}{2}$ を含んでいるならば，そのときの分布が S_2 上の確率を最大にする．また上の区間が $x=\dfrac{1}{2}$ を含まないなら $x=\dfrac{1}{2}$ に近い方の区間の端点を x としたときの分布が S_2 上の確率を最大にしていることがわかる．確率分布は上の区間内の x に対して

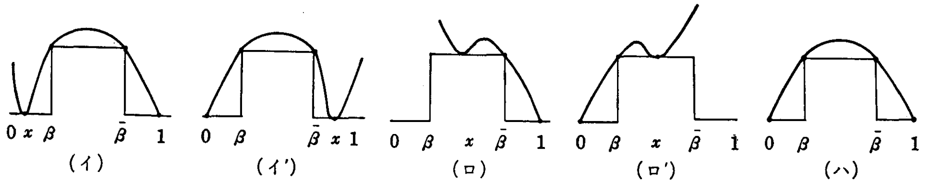
$$p_\beta=\frac{\bar\beta x-(x+\bar\beta)\mu_1+\mu_2}{(\bar\beta-\beta)(x-\beta)},\ p_{\bar\beta}=\frac{\beta x-(x+\beta)\mu_1+\mu_2}{(\bar\beta-x)(\bar\beta-\beta)}$$

$$p_x=\frac{\delta_2-\varepsilon}{(\bar\beta-x)(x-\beta)},$$

で与えられる．

$n=3$：

(ii) S_1 の場合：S_1 以外の少くも1点で $\chi_{S_1}(x)$ と交点を有し $[0,1]$ で $f_3(x)\geqq\chi_{S_1}(x)$ の成立する3次式 $f_3(x)$ は次の5つのタイプに分類される．



(イ), (イ)′ の場合は(イ)なら $a=0$, (イ)′ なら $a=1$ とすることによって，もしそれぞれのタイプが可能ならば

$$p_x=\frac{\varepsilon a-\mu_1(\varepsilon+a)+\mu_2(1+a)-\mu_3}{(\beta-x)(\bar\beta-x)(a-x)}$$

$$p_\beta=\frac{a\bar\beta x-\mu_1(x(\bar\beta+a)+a\bar\beta)+\mu_2(a+\bar\beta+x)-\mu_3}{(x-\beta)(\bar\beta-\beta)(a-\beta)}$$

$$p_{\bar\beta}=\frac{a\beta x-\mu_1(x(\beta+a)+a\beta)+\mu_2(a+\beta+x)-\mu_3}{(x-\bar\beta)(\beta-\bar\beta)(a-\bar\beta)}$$

$$p_a=\frac{\varepsilon x-\mu_1(x+\varepsilon)+\mu_2(1+x)-\mu_3}{(x-a)(\beta-a)(\bar\beta-a)}$$

となる．まず p_x, p_β, $p_{\bar\beta}$, p_a がすべて非負となる x の範囲を求めておき，次に $p_\beta+p_{\bar\beta}$ の x に関する導関数を求めて上の範囲における $p_\beta+p_{\bar\beta}$ の最大値を求めることになる．なお $C_i=\varepsilon\mu_{i-2}-\mu_{i-1}+\mu_i$, $B=\bar a\bar\varepsilon\mu_1+a\varepsilon\delta_1+a\mu_2-\mu_3$, たゞし $\bar\varepsilon=1-\varepsilon$, $\bar a=1-a$, とするとき

$$p_\beta+p_{\bar\beta}=\frac{\delta_2x^2-Bx+(\varepsilon\delta_2-C_3(1-a))}{\varepsilon(\beta-x)(\bar\beta-x)}$$

$$\frac{d}{dx}(p_\beta+p_{\bar\beta})=\frac{aC_2-C_3}{\varepsilon\{(\beta-x)(\bar\beta-x)\}^2}[x^2-2(1-a)x+\bar\varepsilon\bar a-\varepsilon a]$$

である．

(ロ), (ロ)′ の場合，(ロ) では $a=1$, $b=\bar\beta$, (ロ)′ では $a=0$, $b=\beta$ とおくことにすれば，

$$x=\frac{\mu_1ab-\mu_2(a+b)+\mu_3}{ab-\mu_1(a+b)+\mu_2}$$

$$p_x=\frac{ab-\mu_1(a+b)+\mu_2}{(a-x)(b-x)}$$

$$p_a=\frac{bx-\mu_1(b+x)+\mu_2}{(x-a)(b-a)}$$

$$p_b=\frac{ax-\mu_1(a+x)+\mu_2}{(x-b)(a-b)}$$

と一意に確定する．実際に求めたこれらの数値が $\beta\leq x\leq\bar\beta$, p_x, p_a, $p_b\geq 0$ をみたせば p_x+p_b が S_1 上の確率の最大値の候補となる．

(ハ)の場合

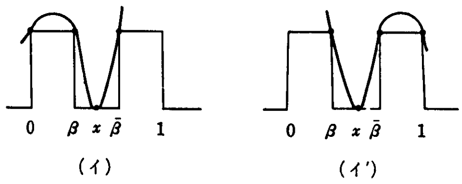
$$p_a=\frac{bcd-\mu_1(bc+cd+db)+\mu_2(b+c+d)-\mu_3}{(b-a)(c-a)(d-a)}\quad\cdots\cdots(2)$$

として，p_0, p_β, $p_{\bar\beta}$, p_1 はそれぞれ $a=0$, β, $\bar\beta$, 1; b, c, d は a 以外のものにとることによって求まる．実際に計算した p_0, p_β, $p_{\bar\beta}$, p_1 が非負なら $p_\beta+p_{\bar\beta}$ が S_1 上の確率の最大値の候補である．

注意：(ハ)は(イ), (イ)′ で x が0あるいは1に一致した場合であるから除外しておいてもよい．

S_2 の場合：この場合は S_2 以外で $\chi_{S_2}(x)$ と交点を有し且つ $[0,1]$ で $f_3(x)\geq\chi_{S_2}(x)$ となる

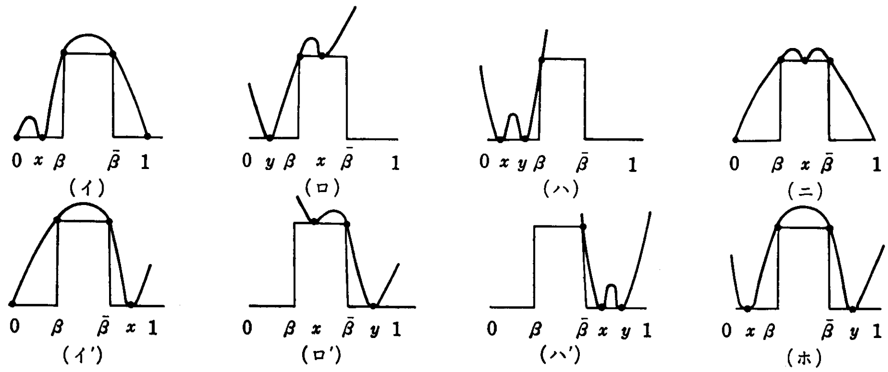
3次式 $f_3(x)$ は



のタイプに分類される．(イ)では $a=0$, (イ)' では $a=1$ とおくことにすると p_a, p_β, $p_{\bar\beta}$, p_x は (2) の a にそれぞれ a, β, $\bar\beta$, x を代入し b, c, d にそれ以外のものを代入したものになる．そして p_a, p_β, $p_{\bar\beta}$, $p_x \geqq 0$ なる x の範囲を求め，$\dfrac{dp_x}{dx}=\dfrac{\varepsilon a-\mu_1(\varepsilon+a)+\mu_2(1+a)-\mu_3}{\{(\beta-x)(\bar\beta-x)(a-x)\}^2}$. $(3x^2-2(a+1)x+(a+\varepsilon))$, $\dfrac{dp_x}{dx}=0$ の根は $\{(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-3(a+\varepsilon)}\}/3$ となることを用いてその範囲での p_x の最小値を求めれば $1-p_x$ が S_2 上の確率の最大値を与える．

$n=4$ の場合：

(ii) S_1 の場合：S_1 以外の少くも1点で $\chi_{S_1}(x)$ と交点を有し $[0,1]$ 上で $f_4(x)\geqq\chi_{S_1}(x)$ の成立する4次式は次の8つのタイプに分類される．



(イ), (イ)', (ニ)の場合：x がきまったとすると各点の確率は

$$p_a=\frac{\mu_4-\mu_3(b+c+d+e)+\mu_2(bc+bd+be+cd+ce+de)}{(b-a)(c-a)(d-a)(e-a)}$$

$$\frac{-\mu_1(bcd+bce+bde+cde)+bcde}{} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

において a にそれぞれ各点を，b, c, d, e にそれ以外の点を代入することによって与えられる．各点の確率が非負になるような x の範囲を求める．このことは各タイプに応じて分母の正負は容易に判定できるので，分子の正負の条件になってくるが，分子は x の高々1次式なので容易に求められる．一方，

$$p_\beta+p_{\bar\beta}=\frac{\delta_2x^2-\delta_2x+\delta_2-\delta_4}{\varepsilon(x^2-x+\varepsilon)}$$

$$\frac{d}{dx}(p_\beta+p_{\bar\beta})=\frac{(\delta_2\varepsilon-\delta_3+\delta_4)(2x-1)}{\varepsilon(x^2-x+\varepsilon)^2}$$

となる．そこで上述の x の範囲とこの２式を用いることによって (イ), (イ′) のタイプに対応する分布の中での S_1 上の確率の最大値，およびそれを達成する分布が求められることになる．また

$$p_0+p_1=\frac{\varepsilon-\delta_2}{\varepsilon}-\frac{\varepsilon\delta_2-\delta_3+\delta_4}{\varepsilon x(1-x)}$$

であることに注意して (ニ) のタイプに対応する分布の中で S_1 の上の確率の最大値やそれを達成する分布が得られる．

(ロ), (ロ′) のタイプでは対応する分布が存在するならば一意に確定する．(ロ), (ロ′) に応じて $b=\beta$, $b=\bar{\beta}$ とし，

$$u=\frac{(b-\mu_1)(b\mu_3-\mu_4)-(b\mu_1-\mu_2)(b\mu_2-\mu_3)}{(b-\mu_1)(b\mu_2-\mu_3)-(b\mu_1-\mu_2)^2}$$

$$v=\frac{(b\mu_1-\mu_2)(b\mu_3-\mu_4)-(b\mu_2-\mu_3)^2}{(b-\mu_1)(b\mu_2-\mu_3)-(b\mu_1-\mu_2)^2}$$

とするとき，x, y は２次方程式

$$t^2-ut+v=0$$

の根として与えられる．x, y がきまると各点の確率が計算でき，S_1 上の確率 p_b+p_x が求まる．

(ハ), (ハ′) も (ロ), (ロ′) とまったく同じ式で x, y が定まり，S_1 上の確率 p_b が求まる．

(ホ) のタイプでは y と x の間に

$$y=(C_3x-C_4)/(C_2x-C_3)$$

なる関係が成立する．$0\leq x\leq\beta$ ととっているので

$$\bar{\beta}\leq y\leq 1$$

すなわち

$$\bar{\beta}\leq\frac{C_3x-C_4}{C_2x-C_3}\leq 1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

という条件を x はみたさなければならない．また各点の確率を x を用いて表わすと

$$p_x=\frac{C_2C_4-C_3^2}{(\beta-x)(\bar{\beta}-x)(C_2x^2-2C_3x+C_4)}$$

$$p_y=\frac{(C_2x-C_3)^4}{\{(\beta C_2-C_3)x-(\beta C_3-C_4)\}\{(\bar{\beta}C_2-C_3)x-(\bar{\beta}C_3-C_4)\}(C_2x^2-2C_3x+C_4)}$$

$$p_\beta=\frac{(C_3\bar{D}_1-C_2\bar{D}_2)x^2-(C_4\bar{D}_1-C_2\bar{D}_3)x+(C_4\bar{D}_2-C_3\bar{D}_3)}{(\bar{\beta}-\beta)(\beta-x)\{(\beta C_2-C_3)x-(\beta C_3-C_4)\}}$$

$$p_{\bar{\beta}}=\frac{(C_3D_1-C_2D_2)x^2-(C_4D_1-C_2D_3)x+(C_4D_2-C_3D_3)}{(\beta-\bar{\beta})(\bar{\beta}-x)\{(\bar{\beta}C_2-C_3)x-(\bar{\beta}C_3-C_4)\}}$$

たゞし，$D_i=\beta\mu_{i-1}-\mu_i$, $\bar{D}_i=\bar{\beta}\mu_{i-1}-\mu_i$ である．

これらの確率がすべて非負であるという条件を (4) の条件と一緒にして x の許容範囲が求まる．さて S_1 上の確率は $p_\beta+p_{\bar{\beta}}$ であり，これは xy を p とおくとき

$$p_\beta+p_{\bar{\beta}}=1-\frac{dp^2-ep+f}{ap^2-bp+c}$$

であたえられる．たゞし，$a=\varepsilon C_2^2-C_2C_3+C_3^2$, $b=\varepsilon(C_2C_3-2C_2C_4+2C_3^2)-(C_3^2-C_3C_4)$, $c=\varepsilon(\varepsilon C_3^2-C_3C_4+C_4^2)$, $d=C_2^3$, $e=C_2^2C_3+2C_2C_3^2-2C_2^2C_4$, $f=\varepsilon C_2C_3^2-C_2C_3C_4+C_2C_4^2+C_3^3-C_3^2C_4$ である．これより

$$\frac{d}{dp}(p_\beta+p_{\bar{\beta}})=\frac{(bd-ae)p^2-2(cd-af)p+(ce-bf)}{(ap^2-bp+c)^2}$$

が得られる．また

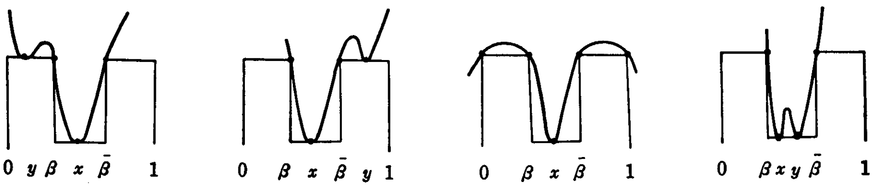
$$p=xy=x\frac{C_3x-C_4}{C_2x-C_3},\quad x=\frac{pC_2+C_4\pm\sqrt{(pC_2+C_4)^2-4pC_3^2}}{2C_3}$$

であり，したがって

$$\frac{dp}{dx}=\frac{C_3(C_2x^2-2C_3x+C_4)}{(C_2x-C_3)^2}$$

である．以上の事柄を用いれば（ホ）のタイプに対応する分布での S_1 上の確率の最大値が求められる．

S_2 の場合：$[0,1]$ 上で $f_4(x)\geqq\chi_{S2}(x)$，かつ S_2 以外の少くも一点で $\chi_{S2}(x)$ と交点を有する4次式 $f_4(x)$ は次の4つのタイプに分類される．



（イ） （イ′） （ロ） （ハ）

（イ），（イ′），（ハ）のタイプにおいては S_1 の場合の（ホ）と同じように

$$y=\frac{C_3x-C_4}{C_2x-C_3}$$

の関係が成立する．そしてここでは（イ），（イ′），（ハ）に応じて，それぞれ $0\leq y\leq\beta$, $\bar\beta\leq y\leq 1$, $\beta\leq y\leq\bar\beta$ が必要である．すなわち

$$0\leq\frac{C_3x-C_4}{C_2x-C_3}\leq\beta,\quad \bar\beta\leq\frac{C_3x-C_4}{C_2x-C_3}\leq 1,\quad \beta\leq\frac{C_3x-C_4}{C_2x-C_3}\leq\bar\beta$$

がそれぞれ必要である．各点の確率を x を用いて表わしたものは S_1 の場合の（ホ）で記したものと同一である．以上より（イ），（イ′），（ハ）のタイプが可能であるための x の許容範囲が求まる．また現在最大にすべきものは S_2 上の確率である．ところで（イ），（イ′）ではこれは $1-p_x$ である．

$$1-p_x=1+\frac{C_3^2-C_2C_4}{(x^2-x+\varepsilon)(C_2x^2-2C_3x+C_4)}$$

$$\frac{d}{dx}(1-p_x)=\frac{C_3^2-C_2C_4}{\{(x^2-x+\varepsilon)(C_2x^2-2C_3x+C_4)\}^2}$$
$$\times\{4C_2x^3-3(C_2+2C_3)x^2+2(C_4+2C_3+\varepsilon C_2)-(C_4+2\varepsilon C_3)\}$$

である．したがって $\frac{d}{dx}(1-p_x)$ の分子の x の3次式の様子を調べることにより $1-p_x$ の最大値が求められる．

（ハ）においては S_2 上の確率は p_x+p_y であり，これを最大化することになる．これは S_1 の場合の（ホ）とまったく同じ式を用いて求められる．

（ロ）のタイプは S_1 の場合の（イ），（イ′），（ニ）などと同じように x がきまれば各点の確率は一意に定まり，その式も(3)と一致する．それによって x の許容範囲が確定する．たゞしここで最大にすべきものは S_2 上の確率，すなわち $1-p_x$ である．ところで

$$p_x=\frac{-\mu_1\varepsilon+\mu_2(1+\varepsilon)-2\mu_3+\mu_4}{x(x-\beta)(x-\bar\beta)(x-1)}$$

となり，この分母を最大にすれば $1-p_x$ が最大になる．p_x の分母を x で微分したものは

$$4x^3-6x^2+2(1+\varepsilon)x-\varepsilon=(2x-1)(2x^2-2x+\varepsilon)$$

となる．以上の事柄から（ロ）のタイプに対応する分布の中での S_2 上の確率の最大値，および それを達成する分布は容易に求まる．

6.7 回答確率分布に特定の分布型を仮定する場合

これまでは回答確率分布に特定の分布型を仮定しない場合の解析法を述べてきた．この小節では回答確率分布に2項質問に対しては Beta 分布，一般に3項以上の質問に対しては Dirichlet 分布を仮定する場合の解析法を示しておく．

k 項質問に対応する回答確率 $(t_1, t_2, \cdots, t_k)$ の分布型として $(k-1)$ 変量 Dirichlet 分布

$$\frac{\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_k)}t_1^{\alpha_1-1}\cdots t_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}(1-t_1-\cdots-t_{k-1})^{\alpha_k-1}$$

を仮定すると，n 回の調査結果が $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$，たゞし n_j は n 回中選択肢 j を選んだ回数，となる確率は多項-Dirichlet 分布

$$\frac{n!}{\prod_{j=1}^{k} n_j!}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{k}\{(\alpha_i+n_i-1)(\alpha_i+n_i-2)\cdots(\alpha_i+1)\alpha_i\}}{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k+n-1)(\alpha_1+\cdots+\alpha_k+n-2)\cdots(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)}$$

となる．この分布からの大きさ N のサンプル $(n_{11}, \cdots, n_{1k}), \cdots, (n_{N1}, \cdots, n_{Nk})$ にもとずく $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ のモーメント法による推定量 $\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_k$ として次のものを用いる．変量 n_i の期待値は母集団では $n\alpha_i/(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)$，サンプルでは $m_{i1}=(n_{1i}+\cdots+n_{Ni})/N$ であることと，変量 n_i の原点のまわりの2次のモーメントを i について1から k まで加えたものは母集団では $n(n-1)\left[\frac{\alpha_1^2+\cdots+\alpha_k^2}{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)(\alpha_1+\cdots+\alpha_k+1)}+\frac{1}{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k+1)}\right]+n$，サンプルでは $\sum_{j=1}^{k}m_{j2}=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}n_{lj}^2\right)$ となる．この関係から

$$\tilde{\alpha}_i=m_{i1}\frac{n^2-\sum_{j=1}^{k}m_{j2}}{n\sum_{j=1}^{k}m_{j2}-(n-1)\sum_{j=1}^{k}m_{j1}^2-n^2}$$

を得る．

一般の多項-Dirichlet 分布についてはこの推定量を用いてあてはめを実施したが，2項質問への2項-Beta 分布のあてはめの際には，この推定量を最尤推定量を求めるための初期値として用いた．2項-Beta 分布のパラメータの最尤方程式は大きさ N のサンプルで一方の選択肢を選んだ回数が j 回であるもののケ数を $N_j\,(j=0, 1, \cdots, n)$ とするとき

$$\begin{cases}\sum_{j=0}^{n}N_j\left(\frac{1}{\alpha_1+j-1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+n-1}-\cdots-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)=0\\ \sum_{j=0}^{n}N_j\left(\frac{1}{\alpha_2+n-j-1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+n-1}-\cdots-\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)=0\end{cases}$$

で与えられる．これを前述の初期値を用いて Newton の逐次近似法で解いた．

6.8 混合2項分布モデルにおける一致率

2項選択質問の前後クロスに対して [44] において

$$C(2)=\left(\sum_{i=1}^{2}p_{ii}-\sum_{i=1}^{2}p_i^2\right)\Big/\left(1-\sum_{i=1}^{2}p_i^2\right)$$

なる一致率を導入した．ここで p_{ii} は前後ともに i 番目の選択肢を選んだものの割合，p_i は i

番目の選択肢を選んだものの各時点における割合（前後とも同一であることを仮定している）である．この一致率 $C(2)$ は混合２項分布モデルにおいては $F(p)$ を回答確率分布の分布関数とするとき次のような意味をもつことを示した．この場合には $p_1=\int_0^1 p\,dF(p)$，$p_2=\int_0^1 (1-p)\,dF(p)$，$p_{11}=\int_0^1 p^2\,dF(p)$，$p_{22}=\int_0^1 (1-p)^2\,dF(p)$ であることから，$i=1, 2$ のいずれに対しても

$$p_{ii}-p_i^2=F\text{ の分散}=V_F\ \text{（とおく）}$$

であることがわかる．したがって $C(2)$ の分子は $2V_F$ である．一方，分母は簡単な計算で $2\int_0^1 p(1-p)\,dF(p)+2V(F)$ となることがわかる．したがって

$$C(2)=\frac{V(F)}{\int_0^1 p(1-p)\,dF(p)+V(F)}$$

が得られる．$\int_0^1 p(1-p)\,dF(p)$ という量は回答確率が p であるという条件のもとでの回答の分散の平均になっているという意味で個体内分散ということができ，$V(F)$ はそれに対して個体間分散ということができよう．この意味で一致率 $C(2)$ は個体間と個体内の分散の相対的な大きさを表現しているといえる．

なお，Hansen, Hurwitz and Pritzker は [16] の (19) 式において，２項分類の不一致性を表わすものとして

$$I_{dG}=\frac{\sigma_{dG}^2}{P_G(1-P_G)}\equiv \text{index of inconsistency}$$

を導入している．個体がどちらに分類されるかということに対して混合２項分布モデルを仮定するならば

$$I_{dG}=1-C(2)$$

という関係にあることがわかる．

なお r 項選択の質問に対する一致率は

$$C(r)=\left(\sum_{i=1}^{r} p_{ii}-\sum_{i=1}^{r} p_i^2\right)\Big/\left(1-\sum_{i=1}^{r} p_i^2\right)$$

と定義される [44].

§7　調査データの解析

前節までに述べた方針にそって数研研究リポート 26 [46] に掲載してある岐阜市域において1969年10月から1970年10月にかけて実施した４回パネル調査のデータの解析をする．主としてそこに含まれている26の２項選択の質問を扱う．

7.1　作業仮説の検討

§3, §4, §6.1 などで言及したように混合２項分布モデルによる解析を正当化するためには§6.1 で述べた意味での回答パターンの対称性が要求される．そこで次のような χ^2-検定を行なった．すなわち４回パネル調査の結果，回答パターン (j_1, j_2, j_3, j_4)，j_i は０か１，を示したものの個数を $\nu(j_1, j_2, j_3, j_4)$ とするとき

$$\chi^2=\frac{4}{\nu_1}\left[\left(\nu(0,0,0,1)-\frac{\nu_1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\nu(1,0,0,0)-\frac{\nu_1}{4}\right)^2\right]$$
$$+\frac{6}{\nu_2}\left[\left(\nu(0,0,1,1)-\frac{\nu_2}{6}\right)^2+\cdots+\left(\nu(1,1,0,0)-\frac{\nu_2}{6}\right)^2\right]$$

$$+\frac{4}{\nu_3}\left[\left(\nu(0,1,1,1)-\frac{\nu_3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\nu(1,1,1,0)-\frac{\nu_3}{4}\right)^2\right]$$

たゞし $\nu_1=\nu(0,0,0,1)+\cdots+\nu(1,0,0,0)$, $\nu_2=\nu(0,0,1,1)+\cdots+\nu(1,1,0,0)$, $\nu_3=\nu(0,1,1,1)+\cdots+\nu(1,1,1,0)$ である，をつくり，これが自由度 11 の χ^2-分布にしたがうものとして検定をした．3回までのデータについても同様な検定をしている（この場合は自由度は 4）．その結果が第6表である．

ところでパネル調査のデータの解析にマルコフ型モデルが用いられることもある．そこで念のため単純マルコフ性に関する検定を行なった．すなわち，もしも単純マルコフ過程をしているならば平均的な意味で2回調査結果が (0,0) の場合からの 0, 1 への推移と，(1,0) の場合からの 0, 1 への推移は同じでなければならない．同様なことは (0,1) からと (1,1) とについてもいえなければならない．そこで

$$\chi^2=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\frac{(\nu(i,j,k)-\nu(i,j)p_{j,k})^2}{\nu(i,j)p_{j,k}}$$

ただし $p_{j,k}=\dfrac{\sum_{i=0}^{1}\nu(i,j,k)}{\sum_{i=0}^{1}\nu(i,j)}$ である，をつくり自由度2の χ^2-分布にしたがうものとして検定してみた．その結果は第6表の最後の列に示されている．

第6表　パターンの対称性の検定とマルコフ性の検定

質問番号	調査票における番号		見出し	3回パターン χ^2	判定	4回パターン χ^2	判定	マルコフ性の検定	判定
Q 1	Q 1	A	生まれかわり	6.81	○	11.4	○	51.5	***
Q 2	Q 2		スジを通すか	5.41	○	14.1	○	39.0	***
Q 3	Q 4		礼服	3.99	○	11.2	○	36.3	***
Q 4	Q 6		しきたり	7.63	○	12.8	○	27.7	***
Q 5	Q 7	A	先生の悪事	3.29	○	4.56	○	15.4	***
Q 6	Q 11		恩人キトク	7.96	*	20.6	**	46.8	***
Q 7	Q 14	A	入社試験（シンセキ）	1.13	○	2.83	○	31.6	***
Q 8	Q 14	B	入社試験（恩人）	3.75	○	13.0	○	30.9	***
Q 9	Q 15	1	親孝行	9.66	*	8.02	○	19.6	***
Q 10		2	恩返し	12.5	*	17.3	*	31.6	***
Q 11		3	個人の権利	4.95	○	7.38	○	35.7	***
Q 12		4	自由尊重	3.12	○	19.7	**	18.5	***
Q 13	Q 16		一万円の借用書	2.93	○	12.0	○	54.5	***
Q 14	Q 21	1	合理的	4.45	○	9.34	○	14.9	***
Q 15		2	勤勉	9.20	*	15.7	○	28.4	***
Q 16		3	自由を尊ぶ	1.98	○	13.6	○	19.2	***
Q 17		4	淡泊	4.07	○	8.94	○	31.1	***
Q 18		5	ねばり強い	3.22	○	13.4	○	36.1	***
Q 19		6	親切	8.67	*	16.6	○	21.4	***
Q 20		7	独創性にとむ	5.67	○	4.44	○	20.5	***
Q 21		8	礼儀正しい	13.1	*	18.5	*	7.66	**
Q 22		9	明朗	13.3	**	21.8	**	15.6	***
Q 23		10	理想を求める	17.9	**	15.7	○	2.11	○
Q 24	Q 24		内閣支持	44.2	**	38.1	***	48.2	***
Q 25	Q 27		安保条約	5.41	○	30.2	***	27.6	***
Q 26	宗教		宗教心は大切か	6.29	○	6.56	○	47.5	***

○ 差なし　* 10% 有意　** 5% 有意　*** 1% 有意

また§3.2で引用した Wiggins の二つのデータ（第4表，第5表）をパターンの形で再掲し，対称性の検定結果を示す.

パ　タ　ー　ン	第4表のデータ		第5表のデータ	
000	734		106	
001	64	180	50	168
010	56		56	
100	60		62	
011	17	42	61	173
101	11		52	
110	14		60	
111	30		114	
計	986		561	
χ^2	1.92		2.13	

これらの結果を眺めるとき，§4で提示した作業仮説を採用して解析を進めることが許される種類の質問がかなり多いといってよいであろう．なお当初予想したことであるが Q 24, Q 25 の政治に関する質問はやはり混合2項分布モデルそのものでとり扱うことは難かしく変化を考慮せねばならないことが示唆される.

7.2　混合2項分布モデルの可能性の判定

§6.1で述べたように，前節で検討した対称性に関する仮定が満たされたとしても混合2項分布モデルで扱うことの出来ない場合もある．すなわちデータとして得られたパターンを平均をとって対称化したものを母集団におけるパターンの割合として考えたとき，それが混合2項分布モデルとして表現可能である必要十分条件が定理3に与えられている．そこではいくつかの対称行列の非負定値によって条件が与えられているが，それは通常の方法によって小行列式の非負なることに置きかえられる．$n=1,2,3,4$ に対してその条件は

$n=1$：　(イ) $\mu_1\geqq 0$,　(ロ) $1-\mu_1\geqq 0$

$n=2$：　(イ) $\det\begin{pmatrix}1 & \mu_1\\ \mu_1 & \mu_2\end{pmatrix}\geqq 0$,　(ロ) $\mu_1-\mu_2\geqq 0$

$n=3$：　(イ) $\det\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ \mu_2 & \mu_3\end{pmatrix}\geqq 0$,　(ロ) $\det\begin{pmatrix}1-\mu_1 & \mu_1-\mu_2\\ \mu_1-\mu_2 & \mu_2-\mu_3\end{pmatrix}\geqq 0$

$n=4$：　(イ) $\det\begin{pmatrix}1 & \mu_1 & \mu_2\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4\end{pmatrix}\geqq 0$,　(ロ) $\det\begin{pmatrix}\mu_1-\mu_2 & \mu_2-\mu_3\\ \mu_2-\mu_3 & \mu_3-\mu_4\end{pmatrix}\geqq 0$

である．それぞれ行列式の値を求めてみると第7表に示すようにすべて正であることがわかり対称化したデータはすべて混合2項分布によって表現できることがわかる．なおこの手続きは§6.2で述べる最小次数分布を求めてみて非負な解があることをみてもよいので省略してもよい.

なお，この結果から Q 22 と Q 23 の§6.2の定理7で用いている記号でいって $n=4$ に対応する ε_1 は非常に0に近い．したがって定理7から考えてみて，これらの質問の回答確率分布は次数が2の $\{0\}, \{1\}$ に確率をもたない方の分布に近いことが考えられる．実際§6.2で求める最小次数分布（$n=4$ のときの）をみてもこのことが予想できる.

第7表 行 列 式 の 値

質問番号	$n=1$ (イ)	$n=1$ (ロ)	$n=2$ (イ)	$n=2$ (ロ)	$n=3$ (イ)	$n=3$ (ロ)	$n=4$ (イ)	$n=4$ (ロ)
1	0.273E0	0.727E0	0.161E0	0.375E−1	0.475E−2	0.946E−2	0.108E−2	0.272E−4
2	0.484E0	0.516E0	0.143E0	0.107E0	0.116E−1	0.192E−1	0.103E−2	0.784E−3
3	0.414E0	0.586E0	0.137E0	0.106E0	0.127E−1	0.170E−1	0.974E−3	0.824E−3
4	0.614E0	0.386E0	0.978E−1	0.139E0	0.156E−1	0.124E−1	0.858E−3	0.749E−3
5	0.404E0	0.596E0	0.101E0	0.140E0	0.111E−1	0.185E−1	0.786E−3	0.948E−3
6	0.565E0	0.435E0	0.138E0	0.108E0	0.189E−1	0.118E−1	0.884E−3	0.925E−3
7	0.209E0	0.791E0	0.996E−1	0.657E−1	0.495E−2	0.126E−1	0.243E−3	0.464E−3
8	0.440E0	0.560E0	0.131E0	0.115E0	0.141E−1	0.164E−1	0.119E−2	0.714E−3
9	0.362E0	0.638E0	0.922E−1	0.139E0	0.101E−1	0.175E−1	0.986E−3	0.437E−3
10	0.595E0	0.405E0	0.107E0	0.134E0	0.216E−1	0.938E−2	0.107E−3	0.176E−2
11	0.535E0	0.465E0	0.108E0	0.141E0	0.164E−1	0.142E−1	0.975E−3	0.880E−3
12	0.592E0	0.408E0	0.890E−1	0.153E0	0.170E−1	0.112E−1	0.676E−3	0.983E−3
13	0.828E0	0.172E0	0.720E−1	0.701E−1	0.181E−1	0.235E−2	0.283E−3	0.314E−3
14	0.846E0	0.154E0	0.453E−1	0.849E−1	0.163E−1	0.158E−2	0.948E−5	0.550E−3
15	0.263E0	0.737E0	0.964E−1	0.973E−1	0.475E−2	0.224E−1	0.302E−3	0.798E−3
16	0.866E0	0.134E0	0.386E−1	0.776E−1	0.161E−1	0.960E−3	0.299E−4	0.338E−3
17	0.804E0	0.196E0	0.667E−1	0.909E−1	0.198E−1	0.271E−2	0.209E−3	0.519E−3
18	0.404E0	0.596E0	0.976E−1	0.143E0	0.123E−1	0.164E−1	0.101E−2	0.593E−3
19	0.468E0	0.532E0	0.960E−1	0.153E0	0.147E−1	0.146E−1	0.148E−3	0.201E−2
20	0.887E0	0.113E0	0.346E−1	0.657E−1	0.151E−1	0.640E−3	0.190E−4	0.239E−3
21	0.540E0	0.450E0	0.101E0	0.147E0	0.171E−1	0.130E−1	0.620E−3	0.130E−2
22	0.856E0	0.144E0	0.467E−1	0.766E−1	0.168E−1	0.136E−2	0.515E−6	0.488E−3
23	0.723E0	0.277E0	0.721E−1	0.128E0	0.226E−1	0.411E−2	0.347E−5	0.129E−2
24	0.395E0	0.605E0	0.147E0	0.917E−1	0.133E−1	0.138E−1	0.792E−3	0.752E−3
25	0.340E0	0.660E0	0.155E0	0.696E−1	0.863E−2	0.149E−1	0.122E−2	0.286E−3
26	0.141E0	0.859E0	0.620E−1	0.593E−1	0.189E−2	0.145E−1	0.421E−3	0.409E−4

(たとえば (0.409E−4 は 0.409×10^{-4} を表わす)

7.3 最小次数分布

最小次数分布は混合2項モデルによる解析にとってきわめて重要である．混合2項モデルとしての扱いが可能か否かの判定（定理4）にとっても，また潜在クラスモデルとしての意義を

第8表 最小次数分布

Q 1

N＝1	X	0.27290		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.72710	0.27290	
N＝2	X	0.00000	0.86248	
	P(X)	0.68359	0.31641	
	X	0.05162	1.00000	
	P(X)	0.76667	0.23333	
N＝3	X	0.03145	0.93928	
	P(X)	0.73404	0.26596	
	X	0.00000	0.39835	1.00000
	P(X)	0.63289	0.15659	0.21052
N＝4	X	0.00000	0.36577	0.99098
	P(X)	0.62787	0.15335	0.21878
	X	0.00642	0.44761	1.00000
	P(X)	0.65683	0.13484	0.20833

Q 2

N＝1	X	0.48431		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.51569	0.48431	
N＝2	X	0.00000	0.78004	
	P(X)	0.37912	0.62088	
	X	0.20658	1.00000	
	P(X)	0.64996	0.35004	
N＝3	X	0.09502	0.85222	
	P(X)	0.48588	0.51412	
	X	0.00000	0.55524	1.00000
	P(X)	0.32383	0.43139	0.24479
N＝4	X	0.00000	0.35236	0.89565
	P(X)	0.28184	0.29249	0.42567
	X	0.05893	0.69440	1.00000
	P(X)	0.42066	0.39207	0.18727

Q 3

N＝1	X	0.41379		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.58621	0.41379	
N＝2	X	0.00000	0.74383	
	P(X)	0.44370	0.55630	
	X	0.18082	1.00000	
	P(X)	0.71561	0.28439	
N＝3	X	0.10790	0.86026	
	P(X)	0.59343	0.40657	
	X	0.00000	0.45481	1.00000
	P(X)	0.35315	0.42749	0.21936
N＝4	X	0.00000	0.29301	0.90806
	P(X)	0.28891	0.37709	0.33401
	X	0.07472	0.64775	1.00000
	P(X)	0.51624	0.30815	0.17562

Q 4

N＝1	X	0.61441		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.38559	0.61441	
N＝2	X	0.00000	0.77356	
	P(X)	0.20573	0.79427	
	X	0.36082	1.00000	
	P(X)	0.60326	0.39674	
N＝3	X	0.18874	0.84412	
	P(X)	0.35050	0.64950	
	X	0.00000	0.59132	1.00000
	P(X)	0.15030	0.57572	0.27397
N＝4	X	0.00000	0.46968	0.90936
	P(X)	0.12899	0.40405	0.46696
	X	0.09058	0.66857	1.00000
	P(X)	0.22575	0.54397	0.23028

Q 5

N＝1	X	0.40385		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.59615	0.40385	
N＝2	X	0.00000	0.65277	
	P(X)	0.38133	0.61867	
	X	0.23523	1.00000	
	P(X)	0.77951	0.22049	
N＝3	X	0.14035	0.78535	
	P(X)	0.59148	0.40852	
	X	0.00000	0.45711	1.00000
	P(X)	0.28937	0.56508	0.14555
N＝4	X	0.00000	0.34045	0.87029
	P(X)	0.23947	0.48700	0.27353
	X	0.08701	0.58735	1.00000
	P(X)	0.45953	0.42797	0.11259

Q 6

N＝1	X	0.56522		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.43478	0.56522	
N＝2	X	0.00000	0.80885	
	P(X)	0.30121	0.69879	
	X	0.24849	1.00000	
	P(X)	0.57854	0.42146	
N＝3	X	0.15239	0.89878	
	P(X)	0.44690	0.55310	
	X	0.00000	0.50000	1.00000
	P(X)	0.21870	0.43216	0.34914
N＝4	X	0.00000	0.31506	0.92840
	P(X)	0.16018	0.34968	0.49014
	X	0.11123	0.70380	1.00000
	P(X)	0.37587	0.34002	0.28411

Q 7

N＝1	X	0.20900		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.79100	0.20900	
N＝2	X	0.00000	0.68579	
	P(X)	0.69524	0.30476	
	X	0.08302	1.00000	
	P(X)	0.86262	0.13738	
N＝3	X	0.05739	0.86629	
	P(X)	0.81258	0.18742	
	X	0.00000	0.32481	1.00000
	P(X)	0.58882	0.29944	0.11174
N＝4	X	0.00000	0.13483	0.89166
	P(X)	0.40771	0.42165	0.17064
	X	0.05145	0.71875	1.00000
	P(X)	0.79444	0.13308	0.07248

Q 8

N＝1	X	0.43980		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.56020	0.43980	
N＝2	X	0.00000	0.73781	
	P(X)	0.40391	0.59609	
	X	0.20584	1.00000	
	P(X)	0.70540	0.29460	
N＝3	X	0.12541	0.85669	
	P(X)	0.57008	0.42992	
	X	0.00000	0.46015	1.00000
	P(X)	0.30961	0.46419	0.22620
N＝4	X	0.00000	0.34401	0.92267
	P(X)	0.26720	0.40841	0.32439
	X	0.07261	0.59877	1.00000
	P(X)	0.45111	0.35352	0.19537

Q 9

N = 1	X	0.36236		
	P (X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P (X)	0.63764	0.36236	
N = 2	X	0.00000	0.61671	
	P (X)	0.41243	0.58757	
	X	0.21782	1.00000	
	P (X)	0.81521	0.18479	
N = 3	X	0.14095	0.77863	
	P (X)	0.65279	0.34721	
	X	0.00000	0.41572	1.00000
	P (X)	0.30355	0.57180	0.12465
N = 4	X	0.00000	0.37178	0.93123
	P (X)	0.28169	0.54796	0.17035
	X	0.05215	0.47803	1.00000
	P (X)	0.41104	0.47520	0.11376

Q 10

N = 1	X	0.59502		
	P (X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P (X)	0.40498	0.59502	
N = 2	X	0.00000	0.77518	
	P (X)	0.23241	0.76759	
	X	0.33031	1.00000	
	P (X)	0.60473	0.39527	
N = 3	X	0.22757	0.88676	
	P (X)	0.44257	0.55743	
	X	0.00000	0.50340	1.00000
	P (X)	0.13925	0.53511	0.32565
N = 4	X	0.00000	0.25012	0.89156
	P (X)	0.02209	0.43160	0.54631
	X	0.22049	0.85089	1.00000
	P (X)	0.42902	0.47317	0.09780

Q 11

N = 1	X	0.53506		
	P (X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P (X)	0.46494	0.53506	
N = 2	X	0.00000	0.73678	
	P (X)	0.27378	0.72622	
	X	0.30292	1.00000	
	P (X)	0.66698	0.33302	
N = 3	X	0.18056	0.83952	
	P (X)	0.46203	0.53797	
	X	0.00000	0.51967	1.00000
	P (X)	0.19392	0.56423	0.24185
N = 4	X	0.00000	0.40592	0.90950
	P (X)	0.16137	0.45210	0.38652
	X	0.09914	0.62512	1.00000
	P (X)	0.31615	0.48050	0.20335

Q 12

N = 1	X	0.59191		
	P (X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P (X)	0.40809	0.59191	
N = 2	X	0.00000	0.74224	
	P (X)	0.20254	0.79746	
	X	0.37386	1.00000	
	P (X)	0.65176	0.34824	
N = 3	X	0.22810	0.83649	
	P (X)	0.40201	0.59799	
	X	0.00000	0.55424	1.00000
	P (X)	0.13281	0.61755	0.24964
N = 4	X	0.00000	0.43143	0.89816
	P (X)	0.10280	0.45833	0.43886
	X	0.13371	0.65467	1.00000
	P (X)	0.25392	0.54476	0.20132

Q 13

N = 1	X	0.82849		
	P (X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P (X)	0.17151	0.82849	
N = 2	X	0.00000	0.91540	
	P (X)	0.09494	0.90506	
	X	0.40866	1.00000	
	P (X)	0.29004	0.70996	
N = 3	X	0.26292	0.95580	
	P (X)	0.18374	0.81626	
	X	0.00000	0.60380	1.00000
	P (X)	0.05543	0.29299	0.65159
N = 4	X	0.00000	0.42918	0.96962
	P (X)	0.03761	0.19365	0.76874
	X	0.17751	0.75365	1.00000
	P (X)	0.12486	0.27932	0.59581

Q 14

N = 1	X	0.84615		
	P (X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P (X)	0.15385	0.84615	
N = 2	X	0.00000	0.89971	
	P (X)	0.05953	0.94047	
	X	0.55158	1.00000	
	P (X)	0.34309	0.65691	
N = 3	X	0.38126	0.94364	
	P (X)	0.17335	0.82665	
	X	0.00000	0.67264	1.00000
	P (X)	0.02769	0.38538	0.58693
N = 4	X	0.00000	0.39200	0.94457
	P (X)	0.00168	0.17524	0.82308
	X	0.37445	0.92856	1.00000
	P (X)	0.16732	0.68837	0.14432

Q 15

N = 1	X	0.26277		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.73723	0.26277	
N = 2	X	0.00000	0.62964	
	P(X)	0.58267	0.41733	
	X	0.13201	1.00000	
	P(X)	0.84935	0.15065	
N = 3	X	0.06559	0.75166	
	P(X)	0.71259	0.28741	
	X	0.00000	0.44379	1.00000
	P(X)	0.51794	0.39426	0.08780
N = 4	X	0.00000	0.20031	0.78996
	P(X)	0.40114	0.35667	0.24220
	X	0.05406	0.66006	1.00000
	P(X)	0.67912	0.27894	0.04194

Q 16

N = 1	X	0.86588		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.13412	0.86588	
N = 2	X	0.00000	0.91043	
	P(X)	0.04893	0.95107	
	X	0.57829	1.00000	
	P(X)	0.31804	0.68196	
N = 3	X	0.43692	0.95579	
	P(X)	0.17328	0.82672	
	X	0.00000	0.67058	1.00000
	P(X)	0.01846	0.35110	0.63044
N = 4	X	0.00000	0.47662	0.95994
	P(X)	0.00428	0.18611	0.80961
	X	0.40041	0.87834	1.00000
	P(X)	0.14043	0.41029	0.44928

Q 17

N = 1	X	0.80383		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.19617	0.80383	
N = 2	X	0.00000	0.88687	
	P(X)	0.09363	0.90637	
	X	0.46358	1.00000	
	P(X)	0.36570	0.63430	
N = 3	X	0.31611	0.94069	
	P(X)	0.21912	0.78088	
	X	0.00000	0.61535	1.00000
	P(X)	0.04838	0.38421	0.56741
N = 4	X	0.00000	0.43018	0.95413
	P(X)	0.02580	0.23988	0.73433
	X	0.24428	0.78441	1.00000
	P(X)	0.15419	0.36944	0.47638

Q 18

N = 1	X	0.40420		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.59580	0.40420	
N = 2	X	0.00000	0.64560	
	P(X)	0.37391	0.62609	
	X	0.24043	1.00000	
	P(X)	0.78439	0.21561	
N = 3	X	0.15761	0.79978	
	P(X)	0.61606	0.38394	
	X	0.00000	0.43316	1.00000
	P(X)	0.26509	0.58343	0.15148
N = 4	X	0.00000	0.37411	0.92292
	P(X)	0.23739	0.54596	0.21665
	X	0.07034	0.51286	1.00000
	P(X)	0.39455	0.47011	0.13535

Q 19

N = 1	X	0.46806		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.53194	0.46806	
N = 2	X	0.00000	0.67316	
	P(X)	0.30468	0.69532	
	X	0.28759	1.00000	
	P(X)	0.74668	0.25332	
N = 3	X	0.18914	0.81225	
	P(X)	0.55238	0.44762	
	X	0.00000	0.46719	1.00000
	P(X)	0.20449	0.61457	0.18094
N = 4	X	0.00000	0.22634	0.82383
	P(X)	0.05365	0.52146	0.42488
	X	0.17960	0.76586	1.00000
	P(X)	0.52895	0.41849	0.05256

Q 20

N = 1	X	0.88686		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.11314	0.88686	
N = 2	X	0.00000	0.92593	
	P(X)	0.04220	0.95780	
	X	0.58061	1.00000	
	P(X)	0.26977	0.73023	
N = 3	X	0.45092	0.96634	
	P(X)	0.15421	0.84579	
	X	0.00000	0.66677	1.00000
	P(X)	0.01462	0.29565	0.68973
N = 4	X	0.00000	0.48333	0.96930
	P(X)	0.00295	0.16375	0.83330
	X	0.41959	0.89129	1.00000
	P(X)	0.12839	0.35527	0.51635

Q 21

N				
N＝1	X	0.54015		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.45985	0.54015	
N＝2	X	0.00000	0.72746	
	P(X)	0.25749	0.74251	
	X	0.32013	1.00000	
	P(X)	0.67638	0.32362	
N＝3	X	0.20153	0.83895	
	P(X)	0.46876	0.53124	
	X	0.00000	0.51233	1.00000
	P(X)	0.17252	0.58920	0.23829
N＝4	X	0.00000	0.35096	0.88319
	P(X)	0.11704	0.45032	0.43265
	X	0.14738	0.67632	1.00000
	P(X)	0.36320	0.46398	0.17282

Q 22

N				
N＝1	X	0.85584		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.14416	0.85584	
N＝2	X	0.00000	0.91045	
	P(X)	0.05998	0.94002	
	X	0.53163	1.00000	
	P(X)	0.30779	0.69221	
N＝3	X	0.37624	0.95329	
	P(X)	0.16888	0.83112	
	X	0.00000	0.65488	1.00000
	P(X)	0.02713	0.33910	0.63377
N＝4	X	0.00000	0.37676	0.95332
	P(X)	0.00010	0.16892	0.83098
	X	0.37593	0.95244	1.00000
	P(X)	0.16861	0.81859	0.01282

Q 23

N				
N＝1	X	0.72263		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.27737	0.72263	
N＝2	X	0.00000	0.82238	
	P(X)	0.12130	0.87870	
	X	0.46274	1.00000	
	P(X)	0.51627	0.48373	
N＝3	X	0.34412	0.91307	
	P(X)	0.33472	0.66528	
	X	0.00000	0.57818	1.00000
	P(X)	0.05538	0.52627	0.41835
N＝4	X	0.00000	0.34541	0.91331
	P(X)	0.00049	0.33498	0.66453
	X	0.34344	0.91050	1.00000
	P(X)	0.33358	0.65202	0.01440

Q 24

N				
N＝1	X	0.39456		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.60544	0.39456	
N＝2	X	0.00000	0.76769	
	P(X)	0.48604	0.51396	
	X	0.15139	1.00000	
	P(X)	0.71345	0.28655	
N＝3	X	0.10099	0.89605	
	P(X)	0.63076	0.36924	
	X	0.00000	0.39930	1.00000
	P(X)	0.37589	0.38214	0.24197
N＝4	X	0.00000	0.22956	0.92673
	P(X)	0.27929	0.39208	0.32863
	X	0.08039	0.68002	1.00000
	P(X)	0.58041	0.22404	0.19555

Q 25

N				
N＝1	X	0.33981		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.66019	0.33981	
N＝2	X	0.00000	0.79524	
	P(X)	0.57269	0.42731	
	X	0.10539	1.00000	
	P(X)	0.73797	0.26203	
N＝3	X	0.06215	0.89717	
	P(X)	0.66748	0.33252	
	X	0.00000	0.43030	1.00000
	P(X)	0.49849	0.28384	0.21768
N＝4	X	0.00000	0.31705	0.95151
	P(X)	0.46685	0.26398	0.26917
	X	0.03307	0.57889	1.00000
	P(X)	0.59231	0.20772	0.19997

Q 26

N				
N＝1	X	0.14126		
	P(X)	1.00000		
	X	0.00000	1.00000	
	P(X)	0.85874	0.14126	
N＝2	X	0.00000	0.58035	
	P(X)	0.75659	0.24341	
	X	0.06903	1.00000	
	P(X)	0.92242	0.07758	
N＝3	X	0.04037	0.75606	
	P X)	0.85904	0.14096	
	X	0.00000	0.35425	1.00000
	P(X)	0.69140	0.25914	0.04946
N＝4	X	0.00000	0.33525	0.96747
	P(X)	0.68539	0.25801	0.05661
	X	0.00727	0.38783	1.00000
	P(X)	0.72465	0.22765	0.04770

もつ（たとえば $n=3$ のときの最小次数分布は Mover-Stayer 型の潜在クラスモデルに対応する）点においても，あるいはデータの出現範囲の予測（§6.5参照）においても基本的な役割を果たしている．

§6.3で示した計算式にもとづいて26問の2項質問に対して $n=1,2,3,4$ の場合の最小次数分布を計算した結果を第8表に示す．

7.4 "固い"グループと"浮動"グループの大きさの推定

§6.6で述べたように，ここでは"固い"グループとはある $\beta\left(0<\beta<\frac{1}{2}\right)$ に対し $[0,\beta]\cup[\bar{\beta},1]$ と表わされる集合に回答確率が属するグループを，"浮動"グループとは $[\beta,\bar{\beta}]$ の形の区間に属するグループの意味に用いる．ところで混合2項分布モデルのもとでは n 回までの調査結果に対応する回答パターンの頻度のもつ情報は回答確率分布の n 次までのモーメントが定まることと同値であった．一般に与えられた n 次までのモーメントをもつ $[0,1]$ 上の確率分布は無数にあるから，ある集合の確率の大きさを推定するといっても最大値と最小値を評価することしかできない．ここでは $S_1=[0.4,0.6]$，$S_1^*=(0.4,0.6)$，$S_2=[0,0.1]\cup[0.9,1]$，$S_2^*=[0,0.1)\cup(0.9,1]$ として，S_1, S_2 の確率の最大値，S_1^*, S_2^* の確率の最小値，およびそれらを達成する分布を示す（最小値の評価を S_1, S_2 でなく S_1^*, S_2^* とした理由は，最小値の評価は

第9表　β_M と β_F

質問番号		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	質問番号		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
Q 1	β_M	0.7271	0.9610	0.9686	0.9959	Q14	β_M	0.8462	0.9064	0.9436	0.9446
	β_F	1	0.9610	0.9418	0.6722		β_F	1	0.9064	0.7635	0.6348
Q 2	β_M	0.5157	0.8788	0.9050	0.9491	Q15	β_M	0.7372	0.8908	0.9344	0.9472
	β_F	1	0.8788	0.8576	0.7685		β_F	1	0.8908	0.7926	0.7908
Q 3	β_M	0.5862	0.8795	0.8921	0.9410	Q16	β_M	0.8659	0.9153	0.9558	0.9602
	β_F	1	0.8795	0.8654	0.7745		β_F	1	0.9153	0.7439	0.6454
Q 4	β_M	0.6144	0.8330	0.8441	0.9421	Q17	β_M	0.8038	0.8988	0.9407	0.9553
	β_F	1	0.8330	0.8202	0.7169		β_F	1	0.8988	0.7677	0.7605
Q 5	β_M	0.5962	0.8313	0.8596	0.9314	Q18	β_M	0.5958	0.8267	0.8424	0.9561
	β_F	1	0.8313	0.8021	0.7237		β_F	1	0.8267	0.8106	0.6827
Q 6	β_M	0.5652	0.8768	0.8988	0.9379	Q19	β_M	0.5319	0.8115	0.8123	0.8364
	β_F	1	0.8768	0.8546	0.7815		β_F	1	0.8115	0.8111	0.7949
Q 7	β_M	0.7910	0.9293	0.9426	0.9499	Q20	β_M	0.8869	0.9293	0.9663	0.9694
	β_F	1	0.9293	0.8846	0.8720		β_F	1	0.9293	0.7378	0.6300
Q 8	β_M	0.5602	0.8670	0.8746	0.9505	Q21	β_M	0.5402	0.8206	0.8390	0.9056
	β_F	1	0.8670	0.8597	0.7352		β_F	1	0.8206	0.8064	0.7449
Q 9	β_M	0.6376	0.8333	0.8591	0.9660	Q22	β_M	0.8558	0.9164	0.9533	0.9533
	β_F	1	0.8333	0.8011	0.6725		β_F	1	0.9164	0.7579	0.6245
Q10	β_M	0.5950	0.8409	0.8868	0.8924	Q23	β_M	0.7226	0.8488	0.9131	0.9133
	β_F	1	0.8409	0.7932	0.7813		β_F	1	0.8488	0.7341	0.6573
Q11	β_M	0.5351	0.8304	0.8395	0.9386	Q24	β_M	0.6054	0.8979	0.8990	0.9408
	β_F	1	0.8304	0.8233	0.7115		β_F	1	0.8979	0.8965	0.8157
Q12	β_M	0.5919	0.8121	0.8365	0.9239	Q25	β_M	0.6602	0.9248	0.9379	0.9748
	β_F	1	0.8121	0.7887	0.7125		β_F	1	0.9248	0.9024	0.7528
Q13	β_M	0.8285	0.9242	0.9558	0.9706	Q26	β_M	0.8587	0.9367	0.9596	0.9938
	β_F	1	0.9242	0.7968	0.7732		β_F	1	0.9367	0.8183	0.6814

補集合の最大値の評価にもとずくためである)．計算の方法は§6.6に述べられている．計算の過程はすべて省略する．

まず§6.4で説明した"固さ"限界 β_F と"浮動限界" β_M の一覧表を示す．

次に S_1 の確率の最大値，$S_1{}^*$ の確率の最小値，S_2 の確率の最大値，$S_2{}^*$ の確率の最小値，およびそれらの値を与える分布を示す．$S_1{}^*$ の最小値はすべての質問を通じて n=1，2，3，4で0であるが，そのときの分布としては n=4 の場合に S_1 の確率の最大値を与えているもの（それらはいずれも (0.4, 0.6) には確率をもっていない）があるので省略している．

第10表　S_1，S_2 の確率の最大値と $S_1{}^*$，$S_2{}^*$ の確率の最小値

質問番号		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
1	S_1	0.682	0.156	0.156	0.144	S_2	1	1	1	0.876
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0.583	0.583	0.802
2	S_1	1	0.444	0.444	0.299	S_2	1	0.897	0.828	0.766
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0.019	0.232
3	S_1	1	0.442	0.441	0.288	S_2	1	0.900	0.878	0.776
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0	0.221
4	S_1	0.964	0.580	0.579	0.466	S_2	1	0.693	0.688	0.607
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0	0.153
5	S_1	1	0.584	0.584	0.457	S_2	1	0.686	0.681	0.614
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0	0.127
6	S_1	1	0.450	0.450	0.280	S_2	1	0.887	0.835	0.782
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0	0.188
7	S_1	0.523	0.274	0.220	0.090	S_2	1	1	0.972	0.965
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0.270	0.302	0.334
8	S_1	1	0.480	0.480	0.371	S_2	1	0.842	0.841	0.698
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0	0.255
9	S_1	0.906	0.579	0.578	0.525	S_2	1	0.694	0.694	0.547
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0	0.261
10	S_1	1	0.557	0.557	0.119	S_2	1	0.726	0.668	0.556
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0	0
11	S_1	1	0.587	0.587	0.480	S_2	1	0.682	0.682	0.594
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0	0.157
12	S_1	1	0.636	0.635	0.510	S_2	1	0.609	0.609	0.562
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0	0.084
13	S_1	0.429	0.292	0.289	0.204	S_2	1	1	0.863	0.850
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0.221	0.403	0.487
14	S_1	0.385	0.354	0.285	0.171	S_2	1	1	0.846	0.834
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0.057	0.299	0.535
15	S_1	0.657	0.406	0.406	0.234	S_2	1	0.954	0.784	0.783
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0.204	0.259
16	S_1	0.335	0.323	0.263	0.204	S_2	1	1	0.849	0.847
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0.138	0.393	0.401
17	S_1	0.490	0.379	0.364	0.254	S_2	1	0.994	0.808	0.802
	$S_1{}^*$	0	0	0	0	$S_2{}^*$	0	0	0.266	0.334

第10表 続 き

質問番号		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
18	S_1	1	0.597	0.597	0.529	S_2	1	0.667	0.667	0.547
	S_1*	0	0	0	0	S_2*	0	0	0	0.215
19	S_1	1	0.637	0.637	0.169	S_2	1	0.606	0.604	0.279
	S_1*	0	0	0	0	S^*_2	0	0	0	0
20	S_1	0.283	0.274	0.226	0.179	S_2	1	1	0.868	0.868
	S_1*	0	0	0	0	S_2*	0	0.270	0.496	0.499
21	S_1	1	0.613	0.613	0.422	S_2	1	0.642	0.640	0.631
	S_1*	0	0	0	0	S_2*	0	0	0	0.019
22	S_1	0.360	0.319	0.274	0.047	S_2	1	1	0.851	0.831
	S_1*	0	0	0	0	S_2*	0	0.148	0.380	0.817
23	S_1	0.693	0.535	0.535	0.051	S_2	1	0.760	0.677	0.667
	S_1*	0	0	0	0	S_2*	0	0	0.065	0.272
24	S_1	0.986	0.382	0.381	0.196	S_2	1	0.990	0.988	0.862
	S_1*	0	0	0	0	S_2*	0	0	0	0.228
25	S_1	0.850	0.290	0.290	0.219	S_2	1	1	1	0.833
	S_1*	0	0	0	0	S_2*	0	0.227	0.227	0.524
26	S_1	0.353	0.247	0.218	0.209	S_2	1	1	0.908	0.791
	S_1*	0	0	0	0	S_2*	0	0.341	0.460	0.690

第11表 S_1 の確率を最大にする分布（上段は確率の存在する点の座標，下段が確率）

質問番号	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
1	0 0.4	0 0.6 1	0.0002 0.4 1	0.004 0.4 0.6 0.996
	0.318 0.682	0.665 0.156 0.179	0.634 0.156 0.210	0.644 0.135 0.009 0.212
2	0.484	0 0.6 1	0 0.4 0.6 1	0.049 0.6 0.944
	1	0.338 0.444 0.218	0.318 0.099 0.345 0.238	0.399 0.299 0.302
3	0.414	0 0.6 1	0 0.4 0.6 1	0.055 0.4 0.6 0.945
	1	0.409 0.442 0.149	0.345 0.325 0.116 0.214	0.451 0.153 0.135 0.261
4	0.6 1	0 0.6 1	0 0.4 0.6 1	0.054 0.4 0.6 0.946
	0.964 0.036	0.154 0.580 0.266	0.149 0.025 0.554 0.272	0.179 0.051 0.415 0.355
5	0.404	0 0.6 1	0 0.4 0.6 1	0.060 0.4 0.6 0.940
	1	0.363 0.584 0.053	0.279 0.417 0.167 0.137	0.377 0.245 0.212 0.166
6	0.565	0 0.6 1	0 0.4 0.6 1	0.060 0.4 0.6 0.940
	1	0.255 0.450 0.295	0.210 0.225 0.225 0.340	0.263 0.241 0.039 0.457
7	0 0.4	0 0.6 1	0.020 0.4 1 1	0.050 0.6 0.940
	0.477 0.523	0.681 0.274 0.045	0.672 0.220 0.108	0.787 0.090 0.123
8	0.440	0 0.6 1	0 0.4 0.6 1	0.044 0.4 0.6 0.956
	1	0.368 0.480 0.152	0.301 0.336 0.144 0.219	0.369 0.238 0.133 0.260
9	0 0.4	0 0.6 1	0 0.4 0.6 1	0.028 0.4 0.6 0.972
	0.094 0.906	0.406 0.579 0.015	0.300 0.533 0.045 0.122	0.344 0.450 0.075 0.131
10	0.595	0 0.6 1	0 0.4 0.6 1	0.198 0.4 0.895
	1	0.182 0.557 0.261	0.128 0.269 0.288 0.315	0.346 0.119 0.535

第11表 続 き

質問番号	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
11	0.535 1	0 0.6 1 0.230 0.587 0.183	0 0.4 0.6 1 0.183 0.236 0.351 0.230	0.052 0.4 0.6 0.948 0.227 0.213 0.267 0.293
12	0.592 1	0 0.6 1 0.154 0.636 0.210	0 0.4 0.6 1 0.125 0.145 0.490 0.240	0.066 0.4 0.6 0.934 0.156 0.181 0.329 0.334
13	0.6 1 0.429 0.571	0 0.6 1 0.055 0.292 0.653	0 0.6 0.999 0.055 0.289 0.656	0.027 0.4 0.6 0.973 0.043 0.137 0.067 0.753
14	0.6 1 0.385 0.615	0 0.6 1 0.012 0.354 0.634	0 0.6 0.976 0.023 0.285 0.692	0.163 0.4 0.945 0.007 0.171 0.822
15	0 0.4 0.343 0.657	0 0.6 1 0.575 0.406 0.019	0 0.4 0.6 1 0.511 0.317 0.089 0.083	0.051 0.6 0.901 0.668 0.234 0.098
16	0.6 1 0.335 0.665	0 0.6 1 0.005 0.323 0.672	0 0.6 0.980 0.014 0.263 0.723	0.037 0.4 0.6 0.963 0.003 0.100 0.104 0.793
17	0.6 1 0.490 0.510	0 0.6 1 0.045 0.379 0.576	0 0.6 0.994 0.047 0.364 0.589	0.042 0.4 0.6 0.958 0.032 0.171 0.083 0.714
18	0.404 1	0 0.6 1 0.357 0.597 0.046	0 0.4 0.6 1 0.257 0.498 0.099 0.146	0.036 0.4 0.6 0.964 0.306 0.417 0.112 0.165
19	0.468 1	0 0.6 1 0.277 0.637 0.086	0 0.4 0.6 1 0.193 0.423 0.214 0.170	0.161 0.4 0.6 0.839 0.453 0.118 0.051 0.378
20	0.6 1 0.283 0.717	0 0.6 1 0.004 0.274 0.722	0 0.6 0.985 0.011 0.226 0.763	0.029 0.4 0.6 0.972 0.002 0.083 0.096 0.819
21	0.540 1	0 0.6 1 0.215 0.613 0.172	0 0.4 0.6 1 0.161 0.269 0.344 0.226	0.087 0.4 0.6 0.913 0.230 0.254 0.168 0.348
22	0.6 1 0.360 0.640	0 0.6 1 0.017 0.319 0.664	0 0.6 0.484 0.023 0.274 0.703	0.368 0.4 0.953 0.122 0.047 0.831
23	0.6 1 0.693 0.307	0 0.6 1 0.063 0.535 0.402	0 0.4 0.6 1 0.052 0.058 0.477 0.143	0.336 0.4 0.914 0.285 0.051 0.664
24	0 0.4 0.014 0.986	0 0.6 1 0.453 0.382 0.165	0.0004 0.4 1 0.377 0.381 0.242	0.059 0.4 0.6 0.941 0.501 0.190 0.006 0.303
25	0 0.4 0.150 0.850	0 0.6 1 0.544 0.290 0.166	0 0.4 0.6 1 0.495 0.246 0.044 0.215	0.023 0.4 0.6 0.977 0.552 0.140 0.079 0.229
26	0 0.4 0.647 0.353	0 0.4 1 0.711 0.247 0.042	0.010 0.4 1 0.735 0.218 0.047	0 0.100 0.4 1 0.642 0.101 0.209 0.048

第12表 S_2 の確率を最大にする分布と S_2* の確率を最小にする分布

質問番号		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
1	S_2	0 1 0.727 0.273	0.052 1 0.767 0.233	0.031 0.939 0.734 0.266	0 0.1 0.463 1 0.594 0.074 0.124 0.208
	S_2*	0.273 1	0 0.1 1 0.352 0.417 0.231	0 0.1 0.9 1 0.476 0.261 0.156 0.107	0 0.1 0.463 1 0.594 0.074 0.124 0.208
2	S_2	0 1 0.516 0.484	0.1 0.5 0.9 0.468 0.103 0.429	0 0.1 0.618 0.9 0.096 0.351 0.172 0.381	0 0.1 0.5 0.9 1 0.197 0.185 0.234 0.349 0.035
	S_2*	0.484 1	0.1 0.5 0.9 0.468 0.103 0.429	0 0.1 0.853 0.019 0.468 0.513	0 0.1 0.5 0.9 1 0.197 0.185 0.234 0.349 0.035

第12表 続 き

質問番号		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
3	S_2	0 1 0.586 0.414	0.1 0.5 0.9 0.558 0.100 0.342	0 0.1 0.618 0.9 0.019 0.543 0.122 0.316	0 0.1 0.5 0.9 1 0.143 0.344 0.224 0.211 0.078
	S_2*	0.414 1	0.1 0.5 0.9 0.558 0.100 0.342	0.108 0.860 0.593 0.407	0 0.1 0.5 0.9 1 0.143 0.344 0.224 0.211 0.078
4	S_2	0 1 0.386 0.614	0.1 0.5 0.9 0.203 0.307 0.490	0.1 0.549 1 0.220 0.312 0.468	0 0.1 0.5 0.9 1 0.103 0.050 0.393 0.404 0.050
	S_2*	0.614 1	0.1 0.5 0.9 0.203 0.307 0.490	0.189 0.844 0.351 0.649	0 0.1 0.5 0.9 1 0.103 0.050 0.393 0.404 0.050
5	S_2	0 1 0.596 0.404	0.1 0.5 0.9 0.463 0.314 0.223	0.1 0.553 0.9 0.481 0.319 0.199	0 0.1 0.5 0.9 1 0.093 0.327 0.386 0.160 0.034
	S_2*	0.404 1	0.1 0.5 0.9 0.463 0.314 0.223	0.140 0.785 0.591 0.409	0 0.1 0.5 0.9 1 0.093 0.327 0.386 0.160 0.034
6	S_2	0 1 0.435 0.565	0.1 0.5 0.9 0.362 0.113 0.525	0.1 0.382 0.9 1 0.320 0.165 0.448 0.067	0 0.1 0.5 0.9 1 0.029 0.297 0.218 0.297 0.159
	S_2*	0.565 1	0.1 0.5 0.9 0.362 0.113 0.525	0.152 0.899 0.447 0.553	0 0.1 0.5 0.9 1 0.029 0.297 0.218 0.297 0.159
	S_2	0 1 0.791 0.299	0.083 1 0.863 0.137	0 0.1 0.618 0.9 0.316 0.499 0.028 0.157	0 0.1 0.5 0.9 1 0.330 0.475 0.035 0.156 0.004
	S_2*	0.299 1	0 0.1 1 0.134 0.730 0.136	0 0.1 0.879 0.302 0.519 0.179	0 0.1 0.5 0.9 1 0.330 0.475 0.035 0.156 0.004
8	S_2	0 1 0.560 0.440	0.1 0.5 0.9 0.496 0.158 0.346	0.1 0.533 0.9 0.502 0.159 0.339	0 0.1 0.5 0.9 1 0.137 0.285 0.302 0.158 0.118
	S_2*	0.440 1	0.1 0.5 0.9 0.496 0.158 0.346	0.125 0.857 0.570 0.430	0 0.1 0.5 0.9 1 0.137 0.285 0.302 0.158 0.118
9	S_2	0 1 0.638 0.362	0.1 0.5 0.9 0.519 0.306 0.175	0.1 0.514 0.9 0.524 0.306 0.170	0 0.1 0.487 1 0.148 0.286 0.453 0.113
	S_2*	0.362 1	0.1 0.5 0.9 0.519 0.306 0.175	0.141 0.779 0.653 0.347	0 0.1 0.487 1 0.148 0.286 0.453 0.113
10	S_2	0 1 0.405 0.595	0.1 0.5 0.9 0.244 0.274 0.482	0.1 0.382 0.9 1 0.173 0.332 0.442 0.053	0.1 0.252 0.748 0.9 0.057 0.388 0.056 0.499
	S_2*	0.595 1	0.1 0.5 0.9 0.244 0.274 0.482	0.228 0.887 0.443 0.557	0.1 0.252 0.748 0.9 0.057 0.388 0.056 0.499
11	S_2	0 1 0.465 0.535	0.1 0.5 0.9 0.297 0.318 0.385	0.1 0.492 0.9 0.294 0.318 0.388	0 0.1 0.5 0.9 1 0.074 0.180 0.406 0.257 0.083
	S_2*	0.535 1	0.1 0.5 0.9 0.297 0.318 0.385	0.181 0.840 0.462 0.538	0 0.1 0.5 0.9 1 0.074 0.180 0.406 0.257 0.083
12	S_2	0 1 0.408 0.592	0.1 0.5 0.9 0.190 0.391 0.419	0 0.1 0.50005 0.9 0.00002 0.190 0.391 0.419	0 0.1 0.5 0.9 1 0.042 0.124 0.438 0.354 0.042
	S_2*	0.592 1	0.1 0.5 0.9 0.190 0.391 0.419	0.228 0.836 0.402 0.598	0 0.1 0.5 0.9 1 0.042 0.124 0.438 0.354 0.042
13	S_2	0 1 0.172 0.828	0 0.915 0.095 0.905	0.1 0.382 0.9 1 0.056 0.137 0.364 0.443	0.1 0.485 0.9 1 0.073 0.150 0.290 0.487
	S_2*	0.828 1	0 0.9 1 0.094 0.779 0.127	0.246 0.9 1 0.171 0.426 0.403	0.1 0.485 0.9 1 0.073 0.150 0.290 0.467
14	S_2	0 1 0.154 0.846	0.1 0.9 1 0.075 0.868 0.057	0.1 0.382 0.9 1 0.006 0.154 0.532 0.308	0.374 0.9 0.963 0.166 0.299 0.535
	S_2*	0.846 1	0.1 0.9 1 0.075 0.868 0.057	0.360 0.9 1 0.155 0.546 0.299	0.374 0.9 0.963 0.166 0.299 0.535

第12表 続 き

質問番号		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
15	S_2	0 1 0.737 0.263	0.1 0.5 0.9 0.774 0.046 0.180	0 0.1 0.618 0.9 0.270 0.417 0.216 0.097	0 0.1 0.634 0.9 0.259 0.435 0.217 0.089
	S_2*	0.263 1	0.1 0.5 0.9 0.774 0.046 0.180	0 0.1 0.756 0.204 0.518 0.278	0 0.1 0.634 0.9 0.259 0.435 0.217 0.089
16	S_2	0 1 0.134 0.866	0 0.910 0.049 0.951	0.412 0.9 1 0.151 0.456 0.393	0.1 0.430 0.9 1 0.003 0.153 0.443 0.401
	S_2*	0.866 1	0 0.9 1 0.048 0.862 0.090	0.412 0.9 1 0.151 0.456 0.393	0.1 0.430 0.9 1 0.003 0.153 0.443 0.401
17	S_2	0 1 0.196 0.804	0.1 0.5 0.9 0.117 0.006 0.877	0.1 0.382 0.9 1 0.033 0.192 0.474 0.301	0.1 0.441 0.9 1 0.048 0.198 0.420 0.334
	S_2*	0.804 1	0.1 0.5 0.9 0.117 0.006 0.877	0.302 0.9 1 0.205 0.529 0.266	0.1 0.441 0.9 1 0.048 0.198 0.420 0.334
18	S_2	0 1 0.596 0.404	0.1 0.5 0.9 0.453 0.333 0.214	0.1 0.482 0.9 0.446 0.333 0.221	0 0.1 0.5 0.9 1 0.097 0.299 0.453 0.033 0.118
	S_2*	0.404 1	0.1 0.5 0.9 0.453 0.333 0.214	0.158 0.800 0.616 0.384	0 0.1 0.5 0.9 1 0.097 0.299 0.453 0.033 0.118
19	S_2	0 1 0.532 0.468	0.1 0.5 0.9 0.343 0.394 0.263	0.1 0.466 0.9 0.325 0.396 0.279	0.1 0.231 0.769 0.9 0.149 0.406 0.315 0.130
	S_2*	0.468 1	0.1 0.5 0.9 0.343 0.394 0.263	0.189 0.812 0.552 0.448	0.1 0.231 0.769 0.9 0.149 0.406 0.315 0.130
20	S_2	0 1 0.113 0.887	0 0.926 0.042 0.958	0.424 0.9 1 0.132 0.372 0.496	0.1 0.430 0.9 1 0.001 0.132 0.368 0.499
	S_2*	0.887 1	0 0.9 1 0.040 0.730 0.230	0.424 0.9 1 0.132 0.372 0.496	0.1 0.430 0.9 1 0.001 0.132 0.368 0.499
21	S_2	0 1 0.460 0.540	0.1 0.5 0.9 0.271 0.358 0.371	0.1 0.469 0.9 0.256 0.360 0.384	0.1 0.484 0.9 1 0.261 0.369 0.351 0.019
	S_2*	0.540 1	0.1 0.5 0.9 0.271 0.358 0.371	0.202 0.839 0.469 0.531	0.1 0.484 0.9 1 0.261 0.369 0.351 0.019
22	S_2	0 1 0.144 0.856	0 0.910 0.060 0.940	0.1 0.382 0.9 1 0.007 0.149 0.453 0.391	0.376 0.9 0.954 0.169 0.014 0.817
	S_2*	0.856 1	0 0.9 1 0.059 0.852 0.089	0.354 0.9 1 0.151 0.469 0.380	0.376 0.9 0.954 0.169 0.014 0.817
23	S_2	0 1 0.277 0.723	0.1 0.5 0.9 0.102 0.240 0.658	0.1 0.382 0.9 1 0.025 0.323 0.554 0.098	0.343 0.9 0.930 0.333 0.395 0.272
	S_2*	0.723 1	0.1 0.5 0.9 0.102 0.240 0.658	0.341 0.9 1 0.329 0.606 0.065	0.343 0.9 0.930 0.014 0.395 0.272
24	S_2	0 1 0.605 0.395	0.1 0.5 0.9 0.627 0.010 0.363	0 0.1 0.618 0.9 0.001 0.626 0.012 0.361	0 0.1 0.5 0.9 1 0.117 0.445 0.138 0.189 0.111
	S_2*	0.395 1	0.1 0.5 0.9 0.627 0.010 0.363	0.101 0.896 0.631 0.369	0 0.1 0.5 0.9 1 0.117 0.445 0.138 0.189 0.111
25	S_2	0 1 0.660 0.340	0.1 0.9 1 0.729 0.044 0.227	0 0.1 0.9 1 0.220 0.454 0.319 0.007	0 0.1 0.5 0.9 1 0.368 0.222 0.167 0.087 0.156
	S_2*	0.340 1	0.1 0.9 1 0.729 0.044 0.227	0 0.1 0.9 1 0.220 0.454 0.319 0.007	0 0.1 0.5 0.9 1 0.368 0.222 0.167 0.087 0.156
26	S_2	0 1 0.859 0.141	0.069 1 0.922 0.078	0 0.1 0.618 0.9 0.490 0.365 0.092 0.053	0 0.1 0.400 1 0.643 0.101 0.209 0.047
	S_2*	0.141 1	0 0.1 1 0.266 0.659 0.075	0 0.1 0.778 0.460 0.411 0.129	0 0.1 0.400 1 0.643 0.101 0.209 0.047

7.5 特定の分布型のあてはめ

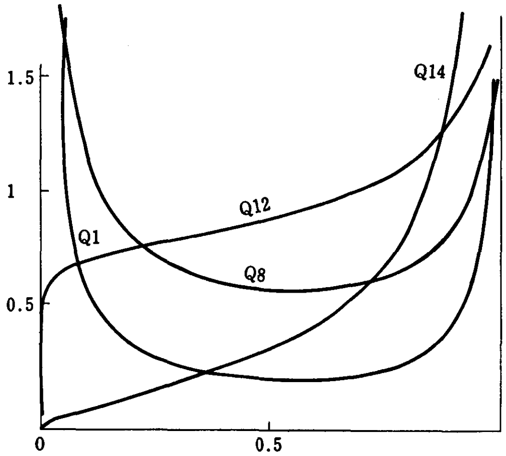
混合2項分布モデルだけを仮定して回答確率分布についてどの程度のことがいえるかを見てきたが，一般的にいって7.4の結果を見てもわかるように4回の調査結果からは“固い”グループや“浮動”グループの大きさの最大，最小の巾が実用に供しうる程せまいとはいえない．これは一つには回答確率分布として[0,1]上のすべての分布を考えているため，最大や最小を与える分布として離散的な分布が現われてくるためである．そこで回答確率分布に[0,1]上の連続分布の一つとしてBeta分布を仮定して，いわゆるBinomial-Beta分布をデータにあてはめてみる．また多項選択質問についてはMultinomial-Dirichlet分布をあてはめてみる．こうした分布型を仮定すると2回の調査結果によってパラメータを推定することができることになる．しかしながら2回の調査結果だけからでは，一般に前に述べた意味の対称性の検定が棄却されないときには混合2項分布モデルがあてはまればB-B分布もあてはまることになって妥当性の検討は出来ない．3回以上の調査結果があってはじめて妥当性に関連した意味でのあてはめに関する検定が意味をもってくる．

まず2項選択質問に対してB-B分布をあてはめた結果を示す．あてはめの方法については6.7に述べてある．使用したデータは4回の調査結果である．またデータはパターンの度数としてでなく4回中k回“1”を選んだものの度数という形で使用しているため対称性の検定にはずれたものでもここでは有意差の出ていないものもある．

その結果をみると第1に多くの質問についてかなりよく合っていること，第2にパラメータα, β (6.7ではα_1, α_2となっている）の両方が同時に1以上になっているものはない，すなわち単峰分布のものはないということに気がつく（次頁の図参照).

第13表 Binomial-Beta分布のあてはめ（二項）（α, β の推定値）

質問番号	調査票での質問番号	見出し	モーメント法		最尤法		χ^2	判定
			α	β	α	β		
1	Q 1 a)	生まれかわり	0.0636	0.1696	0.0628	0.1639	3.0150	○
2	Q 2	スジを通すか	0.3602	0.3836	0.3567	0.3887	2.6974	○
3	Q 4	礼服	0.3211	0.4550	0.3246	0.4561	0.4373	○
4	Q 6	しきたり	0.8741	0.5485	0.8690	0.5533	2.3947	○
5	Q 7 a)	先生の悪事	0.5633	0.8315	0.5613	0.8277	0.1291	○
6	Q11	恩人キトク	0.4434	0.3411	0.4478	0.3420	0.5473	○
7	Q14 a)	入社試験(シンセキ)	0.1377	0.5212	0.1490	0.5424	7.2651	**
8	Q14 b)	〃 (恩人)	0.3869	0.4928	0.3868	0.4887	0.5328	○
9	Q15 1)	親孝行	0.5460	0.9608	0.5426	0.9473	2.8886	○
10	2)	恩返し	0.7424	0.5053	0.7591	0.5109	4.6909	*
11	3)	個人の権利	0.6981	0.6066	0.6924	0.6029	0.4506	○
12	4)	自由尊重	1.0150	0.6997	1.0102	0.6989	0.4418	○
13	Q16	一万円の借用書	0.8064	0.1669	0.8075	0.1669	0.0266	○
14	Q21 1)	合理的	1.5844	0.2880	1.6216	0.2955	1.5579	○
15	2)	勤勉	0.2652	0.7442	0.2656	0.7515	1.3412	○
16	3)	自由を尊ぶ	1.7406	0.2696	1.7355	0.2679	0.4165	○
17	4)	淡白	1.0951	0.2672	1.0972	0.2671	0.1752	○
18	5)	ねばり強い	0.5934	0.8747	0.5904	0.8629	2.3808	○
19	6)	親切	0.7458	0.8476	0.7619	0.8608	2.9148	○
20	7)	独創性にとむ	1.6816	0.2145	1.6627	0.2108	0.5347	○
21	8)	礼儀正しい	0.7857	0.6689	0.7876	0.6696	0.0578	○
22	9)	明朗	1.4035	0.2364	1.4285	0.2404	1.7829	○
23	10)	理想を求める	1.2865	0.4938	1.2931	0.4927	2.6781	○
24	Q24	内閣支持	0.2456	0.3769	0.2548	0.3799	4.1066	○
25	Q27	安保条約	0.1527	0.2968	0.1535	0.2943	0.7086	○
26	宗教	宗教心は大切か	0.1350	0.8207	0.1338	0.8056	2.3701	○



あてはめたBeta分布の密度関数の例

次に3項選択質問への M-D 分布のあてはめの結果を示す．ここでは最初の2回の調査データによりパラメータを6.7で述べた方法で推定し，それから計算される3回の調査結果の回答パターンの期待値と実際に得られた3回調査結果を比較する形で示される．

第14表　3項質問への M-D 分布のあてはめ

質問番号	調査票の質問番号	項目	パラメータ α_1	パラメータ α_2	パラメータ α_3	パターン 1 1 1	2 2 2	3 3 3	1 1 2	1 1 3	1 2 2	1 3 3	2 2 3	2 3 3	1 2 3
1	1 b)	苦労どちらが多いか	0.244	0.111	0.645	73 67	13 14	99 108	14 17	71 66	9 13	78 75	22 17	44 26	7 18
2	1 c)	楽しみどちらが多いか	0.397	0.061	0.541	138 130	5 6	102 100	8 8	77 79	2 5	68 74	3 5	12 7	14 6
3	3	他人の子を養子にするか	0.123	0.112	0.764	48 37	37 31	136 141	6 13	27 37	4 13	69 50	31 32	58 44	12 16
4	5	人間らしさはへるか	0.255	0.615	0.131	53 47	166 161	6 12	49 55	11 9	66 74	7 7	37 27	18 16	15 12
5	7 b)	先生が悪いことをした	0.060	0.164	0.775	5 4	25 22	192 189	0 3	13 11	4 5	33 27	47 47	83 85	12 11
6	9	政治家にまかせるか	0.111	0.619	0.270	6 12	84 88	104 91	23 12	12 14	30 18	7 18	63 71	73 72	12 15
7	10	心の豊かさはへらないか	0.165	0.580	0.255	26 21	114 114	36 35	28 30	11 15	44 45	13 17	74 63	48 47	27 25
8	12	自然と人間の関係	0.197	0.520	0.283	25 23	154 147	32 34	24 27	13 11	36 41	12 12	50 54	41 39	25 15
9	17	3人の人物	0.341	0.371	0.288	76 74	96 88	37 42	34 36	24 21	29 37	24 19	25 25	27 22	11 12
10	18 a)	倒　産	0.520	0.381	0.099	256 244	28 29	2 6	49 58	14 14	37 37	7 8	9 2	5 2	6 3
11	18 b)	倒産（20歳位の人）	0.076	0.413	0.511	6 5	55 53	104 106	11 7	7 10	9 11	19 19	64 72	108 88	11 15

第 14 表 続 き

12	18 c)	倒産（60歳位の人）	0.724	0.181	0.095	300 10 4 43 22 11 6 2 2 6 292 8 4 40 21 18 9 1 1 3
13	20	日本人・西洋人の優劣	0.358	0.074	0.568	88 9 115 9 61 7 72 6 17 12 82 8 114 9 65 7 71 8 12 8
14	22	政治問題に関心があるか	0.160	0.776	0.064	111 125 17 55 6 56 3 27 17 2 101 132 18 53 11 56 9 14 10 7
15	23 a)	「憲法問題」に関心があるか	0.206	0.693	0.102	104 65 19 55 7 54 4 30 21 10 91 77 18 53 19 51 14 16 13 12
16	23 b)	「選挙」に関心があるか	0.099	0.770	0.131	41 100 49 31 5 47 5 57 45 9 32 114 44 28 15 36 16 45 36 15
17	23 c)	「社会保障の問題」に関心があるか	0.126	0.671	0.203	19 75 59 30 6 41 9 63 58 18 17 82 49 21 16 30 20 52 60 22
18	23 d)	「教育問題」に関心があるか	0.089	0.701	0.210	11 86 71 17 3 37 9 77 62 11 10 96 62 13 10 21 15 73 65 16
19	23 e)	「交通問題」に関心があるか	0.070	0.672	0.258	6 55 133 9 5 26 6 61 84 7 7 62 123 6 9 9 15 66 77 10
20	23 f)	「物価問題」に関心があるか	0.074	0.609	0.317	6 49 125 9 6 24 9 71 90 9 6 57 116 6 10 10 18 70 85 13
21	23 g)	「日本の防衛問題」に関心があるか	0.208	0.581	0.211	65 63 53 31 12 45 10 46 31 17 55 77 47 33 23 35 22 31 28 16
22	25	現在の憲法をどう思うか	0.145	0.725	0.130	19 174 35 21 3 47 3 43 21 14 19 177 24 23 6 36 6 43 29 9
23	26	天皇制のあり方	0.079	0.870	0.051	17 295 17 18 1 35 0 20 13 1 18 291 14 17 2 27 2 22 14 2
24	28	青少年の非行化	0.355	0.347	0.298	84 46 74 37 28 30 27 28 26 21 80 52 67 30 36 28 35 24 26 15
25	29	教育上のウソ	0.228	0.647	0.125	35 110 21 59 13 82 6 46 28 19 35 117 15 52 16 72 13 42 25 25

この結果をみると，2項質問への B-B 分布のあてはめと同じように，かなり多くの3項以上の質問について M-D 分布をあてはめて解析することが有効なように思われる．

7.6 一致率

6.8で述べた一致率を各質問について示す（第15表）．

第15表 一致率

2 項の質問

質問番号	調査票での質問番号	項目	単純一致率				一致率 C(2)				一致率 C(2)		
			I—II	II—III	I—III	平均	I—II	II—III	I—III	平均	I—IV	II—IV	III—IV
1	1 a)	男女の生まれかわり	0.89376	0.88222	0.87298	0.88299	0.75511	0.72117	0.70948	0.72859	0.79931	0.72576	0.79995
2	2	スジを通すか，丸くおさめるか	0.74365	0.75751	0.72979	0.74365	0.50269	0.53374	0.48066	0.50570	0.45723	0.55194	0.59894
3	4	校長の礼服	0.74365	0.76443	0.74131	0.74931	0.48275	0.51486	0.47199	0.48987	0.49403	0.51186	0.57388
4	6	しきたりに従うか	0.68129	0.66975	0.66744	0.67282	0.41831	0.38153	0.38130	0.39371	0.28911	0.38439	0.41826
5	7 a)	先生が悪いことをした	0.63741	0.65820	0.60970	0.63510	0.33168	0.40252	0.32062	0.36827	0.29315	0.34106	0.39069
6	11	恩人がキトクのとき	0.69977	0.75751	0.73210	0.72979	0.43146	0.53537	0.48309	0.48348	0.48790	0.46618	0.63975
7	14 a)	入社試験(親戚)	0.78060	0.79677	0.79903	0.79215	0.44538	0.48518	0.46105	0.46387	0.52943	0.55292	0.54289
8	14 b)	〃 (恩人の子)	0.67206	0.71132	0.67893	0.63745	0.40933	0.47217	0.40016	0.42740	0.46847	0.52140	0.58094
9	15 1)	親孝行	0.71363	0.72748	0.69746	0.71286	0.41060	0.41754	0.34779	0.39198	0.37143	0.31429	0.39476
10	2)	恩返し	0.69746	0.75520	0.69746	0.71670	0.37645	0.48316	0.36973	0.40978	0.47127	0.39574	0.48485
11	3)	個人の権利	0.69977	0.70670	0.69746	0.70131	0.40617	0.41686	0.40046	0.40783	0.39431	0.40968	0.45658
12	4)	自由の尊重	0.69746	0.67206	0.66975	0.67975	0.39159	0.33912	0.32490	0.35187	0.29201	0.33720	0.51365
13	16	一万円の借用書	0.79677	0.81062	0.81524	0.80754	0.42598	0.44738	0.46056	0.44464	0.35954	0.40285	0.56166
14	21 1)	合理的	0.85219	0.83603	0.82679	0.83834	0.43647	0.34746	0.31776	0.36723	0.38557	0.37381	0.19964
15	2)	勤勉	0.78753	0.79215	0.76443	0.78137	0.50672	0.49827	0.42035	0.47528	0.51108	0.56726	0.46721
16	3)	自由を尊ぶ	0.83834	0.84988	0.84065	0.84296	0.32373	0.31870	0.29775	0.31339	0.41823	0.37543	0.31297
17	4)	淡白	0.83603	0.82448	0.83603	0.83218	0.42526	0.42372	0.41187	0.42029	0.41333	0.41006	0.49209
18	5)	ねばり強い	0.68591	0.69515	0.69746	0.69284	0.36244	0.33081	0.38536	0.37620	0.33339	0.43201	0.44736
19	6)	親切	0.69746	0.70901	0.67436	0.69361	0.39531	0.41851	0.34867	0.38766	0.42350	0.40381	0.40176
20	7)	独創性にとむ	0.87991	0.88453	0.86143	0.87529	0.39707	0.34857	0.30963	0.35176	0.26918	0.32653	0.33672
21	8)	礼儀正しい	0.71594	0.73903	0.65820	0.70439	0.42407	0.47512	0.30325	0.40248	0.41252	0.47385	0.41595
22	9)	明朗	0.82448	0.86605	0.85681	0.84911	0.26577	0.44737	0.32248	0.34521	0.30471	0.40476	0.50166
23	10)	理想を求める	0.74827	0.78522	0.69284	0.74211	0.40954	0.48154	0.25386	0.38165	0.27236	0.37187	0.38837
24	24	内閣支持	0.67898	0.77598	0.69977	0.71824	0.43118	0.58668	0.47077	0.49721	0.43251	0.55828	0.60727
25	27	安保条約	0.72286	0.73441	0.69053	0.71593	0.54558	0.55484	0.48619	0.52887	0.46607	0.53785	0.64813
26	宗教b)	宗教心は大切か	0.80600	0.83603	0.83372	0.82525	0.39326	0.45397	0.42273	0.42332	0.36398	0.51062	0.48723

3 項の質問

質問番号	調査票での質問番号	項目	単純一致率 I—II	II—III	I—III	平均	一致率 C(3) I—II	II—III	I—III	平均	一致率 C(3) I—IV	II—IV	III—IV
1	1 b)	苦労どちらが多いか	0.57968	0.67667	0.57968	0.61201	0.30185	0.45221	0.30328	0.35245	0.32888	0.45472	0.56388
2	1 c)	楽しみどちらが多いか	0.67667	0.72748	0.69053	0.69823	0.40483	0.49346	0.43113	0.44314	0.45950	0.42725	0.59940
3	3	他人の子を養子にするか	0.65820	0.68129	0.64896	0.66282	0.41769	0.44653	0.40428	0.42283	0.38300	0.40323	0.50091
4	5	人間らしさはへるか	0.66282	0.68129	0.65358	0.66590	0.37246	0.39999	0.36476	0.37907	0.35511	0.35385	0.48060
5	7 b)	先生が悪いことをした	0.63972	0.67206	0.66513	0.65897	0.23633	0.29988	0.25106	0.21242	0.26507	0.33608	0.36072
6	9	政治家にまかせるか	0.59122	0.64434	0.61432	0.61663	0.32190	0.41427	0.35913	0.36510	0.29023	0.37790	0.39071
7	10	心の豊かさはへらないか	0.54734	0.62125	0.57275	0.58045	0.26539	0.36528	0.29615	0.30894	0.32855	0.28467	0.39625
8	12	自然と人間の関係	0.62587	0.64896	0.62818	0.63433	0.37169	0.38647	0.36531	0.37449	0.37118	0.40247	0.48220
9	17	3人の人物	0.60277	0.69053	0.63510	0.64280	0.42755	0.55404	0.47205	0.48455	0.44627	0.55554	0.60409
10	18 a)	倒産	0.74827	0.78060	0.76674	0.76520	0.38921	0.45528	0.42149	0.42199	0.45745	0.52217	0.49771
11	18 b)	倒産 (20歳位の人)	0.57737	0.56813	0.56351	0.56967	0.28347	0.26530	0.26218	0.27032	0.24641	0.26553	0.30845
12	18 c)	〃 (60歳位の人)	0.78984	0.83603	0.81062	0.81216	0.30588	0.38939	0.32719	0.34082	0.22900	0.34894	0.44421
13	20	日本人・西洋人の優劣	0.63741	0.66975	0.62125	0.64280	0.39962	0.43630	0.35364	0.39652	0.38245	0.46140	0.58063
14	22	政治問題に関心があるか	0.70670	0.72286	0.72979	0.71978	0.50861	0.52588	0.54546	0.52665	0.51410	0.55005	0.55543
15	23 a)	「憲法問題」に関心があるか	0.58430	0.61894	0.60046	0.60123	0.36486	0.40881	0.38577	0.38648	0.31790	0.38667	0.34963
16	23 b)	「選挙」 〃	0.57506	0.64203	0.59815	0.60508	0.35379	0.45423	0.37725	0.39509	0.36343	0.40358	0.38437
17	23 c)	「社会保障の問題」 〃	0.52425	0.58660	0.51039	0.54042	0.28291	0.37286	0.25658	0.30412	0.27882	0.22246	0.31443
18	23 d)	「教育問題」 〃	0.55889	0.57968	0.58199	0.57352	0.29823	0.32842	0.33073	0.31913	0.37479	0.35087	0.35788
19	23 e)	「交通問題」 〃	0.60277	0.64665	0.59353	0.61432	0.31897	0.39596	0.30408	0.33967	0.25238	0.31320	0.43126
20	23 f)	「物価問題」 〃	0.60046	0.61894	0.57275	0.59738	0.31510	0.34514	0.26571	0.30865	0.28266	0.32126	0.46920
21	23 g)	「日本の防衛問題」 〃	0.57968	0.58891	0.59584	0.58814	0.39578	0.40896	0.41732	0.40735	0.41403	0.37991	0.44477
22	25	現在の憲法をどう思うか	0.64203	0.67206	0.68822	0.66744	0.36233	0.40592	0.42899	0.39908	0.43442	0.42351	0.51633

23	26	天皇制のあり方	0.84065	0.84988	0.82679	0.83911	0.51574	0.53474	0.49157	0.51402	0.49601	0.56356	0.54036
24	28	青少年の非行化	0.63510	0.63741	0.59353	0.62202	0.46423	0.46855	0.40106	0.44461	0.44151	0.43293	0.51397
25	29	教育上のウソ	0.54734	0.60508	0.55658	0.56967	0.25374	0.32865	0.26477	0.28239	0.27288	0.25437	0.31874

4項以上の質問と基本項目

質問番号	調査票での質問番号	項目	r	単純一致率				一致率 C (r)				一致率 C (r)		
				I—II	II—III	I—III	平均	I—II	II—III	I—III	平均	I—IV	II—IV	III—IV
1	8	首相の伊勢参り	5	0.74596	0.81062	0.75520	0.77059	0.41251	0.57374	0.43153	0.47259	0.46716	0.60491	0.64281
2	13	くらし方	6	0.56813	0.58199	0.53811	0.56274	0.44930	0.46264	0.40643	0.43946	0.40066	0.42621	0.52732
3	19	大切なもの	8	0.55196	0.59584	0.56120	0.56967	0.46507	0.51844	0.47375	0.48575			
4	30	4人の政治家	4	0.54734	0.56351	0.50808	0.53965	0.40667	0.42215	0.35081	0.39321	0.39632	0.40392	0.47944
5	宗教a)	宗教を信じているか	11	0.75289	0.78522	0.75751	0.76520	0.62192	0.67122	0.62561	0.63959	0.59238	0.59469	0.68804
6		支持政党	6	0.73672	0.80831	0.73441	0.75981	0.61135	0.70026	0.59889	0.63683	0.62867	0.70542	0.72229
7		学歴	5	0.85681	0.86605	0.84296	0.85527	0.78827	0.80254	0.76713	0.78598	0.68991	0.75307	0.71089
8		職業	12	0.85912	0.84296	0.83834	0.84680	0.83202	0.81192	0.80568	0.81654			

7.7 そ の 他

これまでのことからわかるように特定の分布型を回答確率に仮定しない場合の混合2項分布モデルの解析は，[45] で詳述したようにモーメント問題あるいはチェビシェフ型の不等式の問題 [23] に帰着される部分が多い．したがってデータの解析の基礎になっているモーメントの値を2項選択質問について掲載しておこう．(μ_i はこの論文及び [45] では原点のまわりの i 次のモーメントを表わしている．)

第16表 モーメント

質問番号	見出し	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
1	生れかわり	0.27290	0.23537	0.22042	0.21374
2	スジか丸くか	0.48431	0.37778	0.31863	0.27843
3	校長の礼服	0.41379	0.30779	0.25958	0.22988
4	しきたりに従うか	0.61441	0.47528	0.39301	0.33898
5	先生の悪事	0.40385	0.26362	0.19952	0.16346
6	恩人きとく	0.56522	0.45718	0.40316	0.36759
7	親戚	0.20900	0.14333	0.12200	0.10800
8	恩人の子	0.43980	0.32449	0.27143	0.24082
9	親孝行	0.36236	0.22347	0.16573	0.13858
10	恩返し	0.59502	0.46125	0.39391	0.34686
11	個人の権利	0.53506	0.39422	0.32103	0.27675
12	自由の尊重	0.59191	0.43934	0.35478	0.30147
13	一万円借用	0.82849	0.75840	0.71608	0.68605
14	合理的	0.84615	0.76129	0.70421	0.65934
15	勤勉	0.26277	0.16545	0.12226	0.09489
16	自由を尊ぶ	0.86588	0.78832	0.73631	0.69708
17	淡白	0.80383	0.71289	0.65693	0.61679
18	ねばり強い	0.40420	0.26095	0.19890	0.16788
19	親切	0.46806	0.31508	0.24361	0.19708
20	独創性に富む	0.88686	0.82117	0.77737	0.74452
21	礼儀正しい	0.54015	0.39294	0.31752	0.27007
22	明朗	0.85584	0.77920	0.72901	0.68978
23	理想を求める	0.72263	0.59428	0.52007	0.46715
24	内閣支持	0.39456	0.30290	0.26630	0.24348
25	安保条約	0.33981	0.27023	0.24029	0.22330
26	宗教心	0.14126	0.08198	0.06098	0.05285

これまでの解析に用いたデータは岐阜市域で実施した4回パネル調査で得られたものであり数研研究リポート No. 26 [46] に掲載されているものであった．ここで 3.2 の第4表，第5表に示した Wiggins [49] の3回パネルデータについて簡単に考察してみよう．(第4表のデータをＷ1，第5表のデータをＷ2と引用する．)

回答パターンは 7.1 に示されている．そこで行われた対称性についての検定の結果をみるとよくあてはまっているようである．一致率はＷ1で 0.297, 0.310, 0.257, Ｗ2で 0.176, 0.223, 0.169 となっている (たゞし，それぞれ I-II, II-III, I-III の順)．これを第15表と

	Ｗ1	理論値	Ｗ2	理論値
0	734	741	106	106
1	180	158	168	168
2	42	64	173	173
3	30	23	114	114
計	986	986	561	561

比較するとW 1, W 2の一致率は低い．そこでB-B分布のあてはめを行なうと（モーメント法），W 1で $\alpha=0.296$, $\beta=2.180$, W 2で $\alpha=2.178$, $\beta=2.104$ となり前頁下表のような結果をうる．7.5でわれわれのデータにB-B分布をあてはめるとき，回答確率分布に対応するBeta分布としては単峰型（$\alpha>1$, $\beta>1$）のものは現われなかったがW 2では α も β も2を越えていることが注意をひく．なおW 1では $\mu_1=0.1197$, $\mu_2=0.0446$, $\mu_3=0.0304$, W 2では $\mu_1=0.5086$, $\mu_2=0.3060$, $\mu_3=0.2032$ である．

また最小次数分布は次のようになる．

W 1

$n=1$	x_k	0.11968	0	1		
	$P(x_k)$	1	0.88032	0.11968		
$n=2$	x_k	0	0.37288	0.08525	1	
	$P(x_k)$	0.67905	0.32095	0.96237	0.03763	
$n=3$	x_k	0.07204	0.75580	0	0.18919	1
	$P(x_k)$	0.93033	0.06967	0.48363	0.48926	0.02711

W 2

$n=1$	x_k	0.50862	0	1		
	$P(x_k)$	1	0.49138	0.50862		
$n=2$	x_k	0	0.60164	0.41233	1	
	$P(x_k)$	0.15461	0.84539	0.83616	0.16384	
$n=3$	x_k	0.28516	0.72034	0	0.50733	1
	$P(x_k)$	0.48652	0.51348	0.09201	0.81063	0.09736

7.8 まとめ

混合2項分布モデルによって解析をしてもさしつかえないと考えられデータはかなり多かった．7.2で述べたようにパターンの対称性があるからといって混合2項分布モデルでパターンが表現できるということにはならないのであるが，実際のデータでは対称性の仮説が棄却されなければ，いずれも混合2項分布モデルで表現できる．むしろ対称性が棄却されたときでもモーメント自身は混合2項分布によって表現できることがみられる．したがってパターンの対称性の成立，不成立が混合2項分布モデルの使用の可否にとって大きなウェイトをもっているといえるだろう．

混合2項分布モデルに対する判定用行列式（第7表）および最小次数分布（第8表）からQ 22, Q 23の回答確率分布が2点分布にかなり近いことが予想される．しかし残念なことにはQ 22とQ 23はパターンの対称性が成立しているとはいえないので，2クラスの潜在クラスモデルの例として挙げることはさしひかえなければなるまい．

次に7.4の“固い”グループや“浮動”グループの大きさの推定結果をみると，調査が4回行われた場合でも最大，最小の見積りの間にはかなりの開きがある．回答確率分布に何ら仮定をおかない解析においては，実際の分布が2点分布とか3点分布に近い場合を除いては，集合上の確率の評価の問題はなかなか難かしい．しかし第13表，第14表のB-B分布，M-D分布のあてはめの結果をみるとかなりよくあてはまっているものも多いので回答確率分布にBeta-分布やDirichlet-分布がいかなるとき仮定できるかといった問題は十分検討する価値があり，その結果によっては解析もかなり楽になることが考えられる．

参 考 文 献

[1] Anderson, T.W.: "Probability Models for Analyzing Time Changes in Attitude", in *Mathematial Thinking in The Social Sciences*, P.F. Lazarsfeld (ed.), New York; The Free Press of Glencoe, (1954), Ch. 1.
[2] Asai, Akira: "Some Consideration on Response Errors of Sample Surveys" *Journal of the College of Arts and Sciences*, Chiba University (1963) 9–12.
[3] 東 洋：「信頼性と妥当性」,「心理学評論」8 (1964) 70-81.
[4] Bailar, B.A.: "Recent Research in Reinterview Procedures" *J.A.S.A.*, 63 (1968).
[5] Cannel, C.F. and R.L. Kahn: "Interviewing" in G. Lindzey and E. Aronson (Ed), *Handbook of Social Psychology*, vol. II, Reading, Mass., Addison-Wesley (1968) 526–595.
[6] Cantril, H.: *Gauging Public Opinion*, Princeton Univ. Press (1944).
[7] Cochran, W.G.: *Sampling Techniques*, 2nd ed. John Wiley, (1963).
[8] Coleman, J.S.: *Models of Change and Response Uncertainty*, Prentice-Hall, (1964).
[9] Coleman, J.S.: *Introduction to Mathematical Sociology*, New York; The Free Press of Glencoe, (1964).
[10] Deming, W.E.: *Some Theory of Sampling*, John Wiley, (1950).
[11] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. II, John Wiley (1966).
[12] Guttman, L.: "The Test-Retest Reliability of Qualitative Data", *Psychometrica*, 11 (1946), 8–95.
[13] ————: "Problems of Reliability", in volume 4, Ch. 8, *Measurement and Prediction*, S.A. Stouffer et al., Princeton Univ. Press, (1950).
[14] Hansen, M.H., W.N. Hurwitz, and M. Bershad: "Measurement errors in censuses and surveys", *Bulletin of I.S.I.*, 38/2 (1961),359–374.
[15] Hansen, M.H., W.N. Hurwitz, and W.G. Madow,: *Sample Survey Methods and Theory*, New York: John Wiley, Vol I and II. (1953).
[16] Hansen, M.H., W.N. Hurwitz, and L. Pritzker,: "The estimation and interpretation of gross differences and the simple response variance", *Contributions to Statistics Presented to Professor P.C. Mahalanobis on the Occation of His 70th Birthday*. Pergamon Press, Calcutta, India, (1964) 111–36.
[17] 林知己夫：「サンプリング調査はどうおこなうか」東大出版 (1951).
[18] ————：「回答誤差等を考慮に入れた標本抽出計画」,「統計数理研究所彙報」第5巻1号(1957).
[19] ————：「態度数量化の一方法II」,「統計数理研究所彙報」第6巻1号, (1958) およびその訂正(第8巻1号).
[20] ————：「社会調査における回答誤差——それに基ずく歪みをどう補正するか」,「創立20年記念論文集」NHK 放送文化研究所 (1967).
[21] Hayashi, C.: "Response reliability and attitude change — Supplements to response errors and biased information", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 23, (1971).
[22] Hyman, H.H. et al.: *Interviewing in Social Research*, The Univ. of Chicago Press, (1954).
[23] Isii, K.: "The extrema of probability determined by generalized moments, (I) bounded random variables", *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 12 (1960), 119–134.
[24] Kish, L.: *Survey Sampling*, John Wiley, (1965).
[25] Lansing, J.B. and J.N. Morgan: *Economic Survey Methods*, Institute for Social Research, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan (1971).
[26] Lazarsfeld, P.F.: "Panel Studies", *Public Opinion Quartary*, 4 (1940) 122–128.
[27] ————: "The Logical and Mathematical Foundation of Latent Structure analysis", Ch. 10, *Measurement and Prediction*, S.A. Stouffer et al., Princeton Univ. Press, (1950).
[28] ————: "The Interpretation and Computation of Some Latent Structures", Ch 11, *Measurement and Prediction*, S.A. Stouffer et al., Princeton Univ, Press, (1950).
[29] ————: "A Conceptual Introduction to Latent Structure Analysis", *in Mathematical Thinking in the Social Sciences*, (1954) Ch. 7.
[30] ————: "Latent Structure Analysis" in *Psychology: A study of a Science, Conceptual and Systematics* Vol 3., (1959), 476-543.
[31] Lipset, Seymour, M, et al.: "The Analysis of Political Choice Behavior" in G. Lindzey (Ed.), *Handbook of Social Psychology*, Reading, Mass., Addison-Wesley, (1954) vol. 2, pp. 1124–1175.
[32] Marquis, Kent: "Effects of Social Reinforcement on Health Reporting in the Household Interview", *Sociometry*, 33 (1970) 202–215.
[33] 岡本栄一, 高橋宏一：「多問型多肢選択形式テストの偶然正答確率について」,「能力開発研究所紀要」II (1968) 14-25.

[34] O'Neill, H.W.: "Response Style Influence in Public Opinion Survey", *P.O.Q.*, 31 (1967) 95–102.
[35] Payne, S.L.: *The Art of Asking Questions*, Princeton University Press (1951).
[36] Polya, G. und G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, zweiter band, Springer, Berlin, (1925).
[37] Shohat, J.A. and J.D. Tamarkin: *The Problem of Moments*, American Mathematical Society, New York, (1943).
[38] Stephan, F.F., and P.J. McCarthy: "*Sampling Opinions*" John Wiley, (1958).
[39] 鈴木達三：「面接調査における回答誤差」,『統計数理研究所彙報』第 12 巻 1 号 (1964) 149-159.
[40] ———：「社会現象の統計的モデル化の研究」,『統計数理研究所，数研研究リポート』No. 19 (1968).
[41] ———：「面接調査における回答の安定性について」,『統計数理研究所彙報』第 16 巻 1 号 (1968) 47-102.
[42] ———：「面接調査と自記式調査の比較」,『統計数理研究所，数研研究リポート』No. 24 (1969).
[43] 鈴木達三，高橋宏一：「住宅の損耗度実態調査における統計的諸問題」,『統計数理研究所彙報』第 12 巻 1 号 (1964) 277-291.
[44] ———, ———：「パネル調査結果分析のための一致指数」,『統計数理研究所彙報』第 16 巻 1 号 (1968) 103-107.
[45] ———, ———：「調査における回答の機構について」,『統計数理研究所彙報』第 17 巻 2 号 (1969) 139-174.
[46] ———, ———：「調査における回答機構の統計的研究 (I. 調査方法と回答分布, II. 回答変動の解析)」,『統計数理研究所，数研研究リポート』No. 26 (1971).
[47] 富山小太郎：「現代物理学の論理」岩波書店 (1956).
[48] 津村善郎：標本調査法，岩波書店 (1956).
[49] Wiggins, Lee M.,: "*Mathematical Models For the Interpretation of Attitude and Behavior Change*": Doctoral Dissertation Series. Pub. No. 12,481 (1955) University Microfilms, Ann Arbor, Michigan.
[50] Williams, W.H. and C.L. Mallows: "Systematic Biases in Panel Surveys Due to Differential Nonresponse" *J.A.S.A.* 65 (1970) 1338–49.

付　録

(i) 定理 2 についての注意および証明

前の報告 [45] においては定理 2 の $n=2m-1$ の場合の一般形は

$$g(t)=(t-a)\left(\sum_{i=0}^{m-1} x_i t^i\right)^2+(b-t)\left(\sum_{i=0}^{m-1} y_i t^i\right)^2$$

であった．これは [37] の 77 ページの結果を用いているが，そこでは [36] を引用している．$n=2m$ の場合は [36] の 82 ページの 46. に示されているが，$n=2m-1$ のこの表現は見当らないし，今のところ著者達は証明を確認していないので証明の容易な現在の形を示しておく．しかしながら両者の相違は定理 3 に対しては影響しないことがわかる．（本文の定理 2′ のあとに説明がある.）

さて証明であるが $m=1$ の場合は [45] の 172 ページにもあるように

$$(t-a)x_0^2+(b-t)y_0^2$$

なる一般形をもつ．以下帰納法を用いる．$n=2m-1$ の場合は証明されたとして，$g(t)$ を $(2m+1)$ 次の多項式で [a, b] で非負なるものとする．$g(t)$ の [a, b] における最小値を K とし，$g(c)=K$, $a\leq c\leq b$ とする．$g_1(t)=g(t)-K$ とおくと $g_1(t)$ も [a, b] で非負であるが，さらに $g_1(c)=0$ である．c が a あるいは b と一致している場合は $g_1(t)$ は $(t-a)g_2(t)$ あるいは $(b-t)g_2(t)$，たゞし $g_2(t)$ は [a, b] で非負な $2m$ 次の多項式と書けるので，この $g_2(t)$ に偶数次の場合の一般形を代入することによって $g_1(t)$ が $(t-a)\times(m$ 次式$)^2+(b-t)\times(m$ 次式$)^2$ の形に書けることがわかる．また $a<c<b$ の場合には，$g_1(t)=(t-c)^2\times$ ($[a, b]$ で非負な $(2m-1)$ 次式) の形になることが容易にわかり，右辺の第 2 項に帰納法の仮定を用いると結局 $g_1(t)=(t-a)\times(m$ 次式$)^2+(b-t)\times(m$ 次式$)^2+((m-1)$ 次式$)^2+((m-1)$ 次式$)^2$ の形になることがわかる．よって，$g(t)=g_1(t)+K$ で $K\geqq 0$ であることと，恒等的に非負な多項式（したがって勿論偶数次）は (多項式$)^2+($多項式$)^2$ の形に表わされること ([36] の 82 ページの 44.) から証明は終る．

(ii) 定理 $2'$ の証明

$S=[a,b]\cup[c,d]$ とおく．n 次の多項式 $f(t)$ が S で非負ということは，① f は恒等的に非負，あるいは② f は S で非負で且つ S^c の少くも1点で負，のいずれかが成立することと同値である．②の場合を考察する．$f=0$ は少くも1実根 ξ をもつから $f=(t-\xi)f_{n-1}$ の形に表わされる．f_{n-1} は $(n-1)$ 次の多項式を表わす．ξ が S の内点の場合は，f_{n-1} は $t=\xi$ で符号が変わらねばならない．したがって $f_{n-1}=(t-\xi)f_{n-2}$ の形をもつ．すなわち $f=(t-\xi)^2f_{n-2}$ である．ところで f_{n-2} は S で非負でなければならないから，結局 f は1次式の2乗と S で非負な $(n-2)$ 次式の積の形をしている．次に ξ が S の内点でないから，$t-\xi$ は $[a,b]$, $[c,d]$ のそれぞれで一定符号をもつ．したがって f_{n-1} についても同じことがいえる．$t-\xi$ が二つの区間で同符号ならば，f_{n-1} も二つの区間で同符号で，両者の符号は一致する．したがって，この場合には f は S で非負な1次式と S で非負な $(n-1)$ 次式の積である．$(t-\xi)$ が二つの区間で異符号の場合には f_{n-1} も二つの区間で異符号である．したがって $f_{n-1}=(t-\eta)f_{n-2}$，すなわち $f=(t-\xi)(t-\eta)$，ξ，$\eta\in[b,c]$ の形をしている．$(t-\xi)(t-\eta)$ は S で非負であるから f_{n-2} も S で非負でなければならない．結局，この場合は f は S で非負な2次式と S で非負な $(n-2)$ 次式の積をしている．以上をまとめて

補題 1.

f が S で非負なら，f は恒等的に非負か，S で非負な1次式と S で非負な $(n-1)$ 次式の積か，S で非負な2次式と S で非負な $(n-2)$ 次式の積のいづれかである．ところで，この条件が十分であることは明らかである．

次に恒等式に非負な多項式（偶数次）の二つの一般形を与えておく．

補題 2.

恒等的に非負な $2m$ 次の多項式の一般形に次の i)，ii) がある．

(i)
$$\left(\sum_{i=0}^{m}x_i t^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{m-1}y_i t^i\right)^2+\cdots+\left(\sum_{i=0}^{1}z_i t^i\right)^2+w_0^2$$

すなわち，m 次以下の各次式の2乗和である．

証明は2次の場合 $(u_0+u_1t)^2+v_0^2$ となることと，帰納法によって容易である．

(ii) もう一つは定理 $2'$ の証明中に出てきた

$$\left(\sum_{i=0}^{m}x_i t^i\right)^2+\left(\sum_{i=0}^{m}y_i t^i\right)^2$$

すなわち，二つの m 次式の平方和である．

補題2の (i) の証明

m までを仮定する．$f_{2(m+1)}(x)$ を非負な $2(m+1)$ 次式，その最小値を $l^2\geq0$ とし $h(x)=f_{2(m+1)}(x)-l^2$ とおくと $h(x)$ も非負で且つある ξ に対し $h(\xi)=0$．したがって $h(x)=(x-\xi)h_1(x)$ ($h_1(x)$ は $2\bar{m}+1$ 次，たゞし $\bar{m}$ は $h(x)$ の exact な次数 $2\bar{m}$ よりきまる．$\bar{m}<m$ なら証明は仮定により済んでいるので $\bar{m}=m$ として考えればよい)．$h(x)\geqq0$ であることと，$(x-\xi)$ は ξ で符号が変わることから $h_1(\xi)=0$．故に $h(x)=(x-\xi)^2h_2(x)$，$h_2(x)$ は $2m$ 次で非負．

仮定より $h(x)=(x-\xi)^2[(m\text{ 次式})^2+\cdots+(1\text{ 次式})^2+(\text{定数})^2]$

故に $f_{2(m+1)}(x)=((m+1)\text{次式})^2+(m\text{ 次式})^2+\cdots+(1\text{ 次式})^2+(\text{定数})^2$

S で非負な2次式が定理 $2'$ の ii) の形になることは [45] の付録における定理 $2'$ の証明にある．たゞし，その証明の最後の部分で恒等的に非負な2次式の一般形を補題2の (i) 形のものに訂正する（補題2の (ii) を用いてもよい）．

ここで定理 $2'$ の iii)，iv) の証明に入る．補題1より S で非負な3次式は S で非負な1次式と S で非負な2次式の積である．したがって定理 $2'$ の i)，ii) より

$$\begin{aligned}f&=\{x_0^2(t-a)+y_0^2(d-t)\}\{u_0^2+(v_0+v_1t)^2+w_0^2(t-a)(d-t)\\&\quad+z_0^2(t-b)(t-c)\}\\&=x_0^2(t-a)\{u_0^2+(v_0+v_1t)^2\}+y_0^2w_0^2(t-a)(d-t)^2\end{aligned}$$

$$+ y_0^2(d-t)\{u_0^2+(v_0+v_1t)^2\} + x_0^2w_0^2(d-t)(t-a)^2$$
$$+ x_0^2z_0^2(t-a)(t-b)(t-c) + y_0^2z_0^2(t-b)(t-c)(d-t)$$
$$=(t-a)\cdot(\text{非負な 2 次式}) + (d-t)\cdot(\text{非負な 2 次式})$$
$$+(t-a)(t-b)(t-c)\cdot(\text{定数})^2 + (t-b)(t-c)(d-t)\cdot(\text{定数})^2$$

となり iii) が示された．f が S で非負な 4 次式ならば，補題 1 より，f は恒等的に非負な 4 次式か，S で非負な 1 次式と S で非負な 3 次式との積か，S で非負な二つの 2 次式の積である．第 2，第 3 の場合ともに

$$f=(t-a)(d-t)\{\text{非負な 2 次式}\} + (t-b)(t-c)\{\text{非負な 2 次式}\}$$
$$+(t-a)(t-b)(t-c)(d-t)\cdot\{\text{定数}\}^2$$
$$+\{\text{非負な 4 次式}\}$$

の形になることは容易にわかる．したがって iv) の形になることは補題 2 によって明らかである．