二次元離散型分布の集中多面体，集中係数及び新たな各種相関係数について

——企業集中の多次元的解析法——

田　口　時　夫

(1972年12月　受付)

Concentration Polyhedron, Two Dimensional Concentration Coefficient For Discrete Type Distribution And Some New Correlation Coefficients etc.

—On an analytical method of business concentration—

Tokio Taguchi

In our paper [4] and [5], we treated already concentration surface, two dimensional concentration coefficient and some new correlation coefficients, etc. for continuous density function. Now, we will do so for discrete type distribution. Furthermore, we will give newly the notion and deffinition of two dimensional relative mean deviation. In §9 and §10 we will concretely discuss relationship among them through some simple models and real examples. And in the final section we suggest that this paper is ready to lead to share (percentage distribution) analysis.

The Institute of Statistical Mathematics

は し が き

我々は既に後掲の論文[4]，[5]に於て連続型分布の集中曲面，集中係数及び其等に関聯した新たな諸相関係数を提案しその性格を明かにした．

此処では更に其等を離散型分布の場合，又は有限箇の観測結果の処理について考察することにする．

この考察の結果（§1～§8）により初めて§9の理論的モデルによる実験及び§10の経験資料への適用が可能となった．特に§9における具体例に基づく各種相関係数及び散布度についての計算結果及び集中係数についての算定結果は，相関，散布度，集中度等の統計的諸概念のより広汎な視野の下でより具体的に理解することに役立つであろう．

同時に此等の全体は構成比と密接に関係するものであり，その解析に通ずることを§11に於て明かにした．

最後に集中係数の機能をもつ二次元相対平均偏差の概念は[4]，[5]にない新たな定義であり計算例であることを附記する．

§1　集中多面体の定義と性質

[A]　集中多面体の定義

本篇で扱う対象は x, y に関する $m\times n$ 分割表*1) である．第1表は相対度数によるその具体的表現である．

この表に基づいて先集中多面体を次のように定義する．

定義1　『狭義の集中多面体をその各頂点が原点及び次の (1) 式をみたす凡ての点 $X^{(1)}_{hk}$,

*1　我々は屢々可附番無限の分割を想定して極限法則と収斂速度を究明した．

第1表 理論的な相対的二次元度数分布表

x \ y	y_1	y_2	……	y_n	計
x_1	f_{11}	f_{12}	……	f_{1n}	$f_{1\cdot}$
x_2	f_{21}	f_{22}	……	f_{2n}	$f_{2\cdot}$
⋮					⋮
x_m	f_{m1}	f_{m2}	……	f_{mn}	$f_{m\cdot}$
計	$f_{\cdot 1}$	$f_{\cdot 2}$	……	$f_{\cdot n}$	1

$\overset{(1)}{Y}_{hk}$, $\overset{(1)}{Z}_{hk}$) により構成される $2mn$ 面体として定義する．即

$$(1)\qquad \overset{(1)}{X}_{hk}=\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}f_{ij},\quad \overset{(1)}{Y}_{hk}=\frac{1}{\mu_x}\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}x_i f_{ij},\quad \overset{(1)}{Z}_{hk}=\frac{1}{\mu_y}\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}y_j f_{ij}\ ;$$

$$h=1,2,\cdots,m,\quad k=12,\cdots,n$$

ここで μ_x, μ_y*2) はそれぞれ x 及び y に関する平均値を表わすものとする．

又集中多面体の各側面は次の三種の面によって構成される．即

(a) (x_h, y_k), (x_{h+1}, y_k), (x_h, y_{k+1}) に対応する三点 $\overset{(1)}{P}_{hk}$, $\overset{(1)}{P}_{h+1k}$, $\overset{(1)}{P}_{h,k+1}$ を含む面及び (x_{h+1}, y_k), (x_{h+1}, y_{k+1}), (x_h, y_{k+1}) に対応する三点 $\overset{(1)}{P}_{h+1,k}$, $\overset{(1)}{P}_{h+1,k+1}$, $\overset{(1)}{P}_{h,k+1}$ を含む面,

(b) 原点と (x_h, y_1), (x_{h+1}, y_1) に対応する二点 $\overset{(1)}{P}_{h1}$, $\overset{(1)}{P}_{h+1,1}$ を含む面及び原点と (x_1, y_k), (x_1, y_{k+1}) に対応する二点 $\overset{(1)}{P}_{1k}$, $\overset{(1)}{P}_{1k+1}$ を含む面

(c) 原点と (x_h, y_n), (x_{h+1}, y_n) に対応する二点 $\overset{(1)}{P}_{hn}$, $\overset{(1)}{P}_{h+1,n}$ を含む諸面及び原点と (x_n, y_k), (x_m, y_{k+1}) に対応する二点 $\overset{(1)}{P}_{mk}$, $\overset{(1)}{P}_{mk+1}$ を含む諸面である．但し以上を通じて $h=1, 2, \cdots, m-1$, $k=1, 2, \cdots, n-1$ である．

今定義1の多面体を仮に第一集多面体 $\Pi^{(1)}$ とするとき次の各式 (2), (3), (4) について同様に第2, 3, 4集中多面体 $\Pi^{(2)}$, $\Pi^{(3)}$, $\Pi^{(4)}$ を定義することが出来る．即

$$(2)\qquad \overset{(2)}{X}_{hk}=\sum_{i=h}^{m}\sum_{j=1}^{k}f_{ij},\quad \overset{(2)}{Y}_{hk}=\frac{1}{\mu_x}\sum_{i=h}^{m}\sum_{j=1}^{k}x_i f_{ij},\quad \overset{(2)}{Z}_{hk}=\frac{1}{\mu_y}\sum_{i=h}^{m}\sum_{j=1}^{k}y_j f_{ij},$$

$$(3)\qquad \overset{(3)}{X}_{hk}=\sum_{i=h}^{m}\sum_{j=k}^{n}f_{ij},\quad \overset{(3)}{Y}_{hk}=\frac{1}{\mu_x}\sum_{i=h}^{m}\sum_{j=k}^{m}x_i f_{ij},\quad \overset{(3)}{Z}_{hk}=\frac{1}{\mu_y}\sum_{i=h}^{m}\sum_{j=k}^{n}y_j f_{ij},$$

及び

$$(4)\qquad \overset{(4)}{X}_{hk}=\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=k}^{n}f_{ij},\quad \overset{(4)}{Y}_{hk}=\frac{1}{\mu_x}\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=k}^{n}x_i f_{ij},\quad \overset{(4)}{Z}_{hk}=\frac{1}{\mu_y}\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=k}^{n}y_j f_{ij}$$

である．但し $h=1, 2, \cdots, m$, $k=1, 2, \cdots, n$ とする．

この時各多面体の各側面は $\overset{(i)}{P}_{hk}$ を $\overset{(i)}{P}_{hk}$;$i=2, 3, 4$ とすることによって前記の (a) (b) (c) によって与えられる．

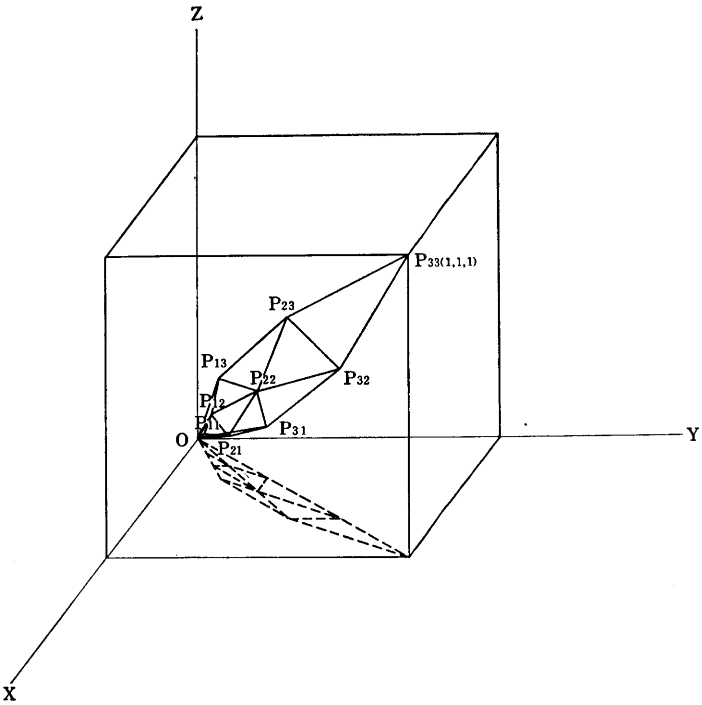
連続型分布関数については [5] に於て閉じた二次元多様体として完全集中曲面 (Lorenz 多様体) が定義されたが，上記の各多面体 $\Pi^{(i)}$ は互に重なり合うことがなく且隣接する二つの多面体は原点と i を適当に選ぶとき頂点 $P_{hn}{}^{(i)}$; $h=12\cdots\cdot m$ 又は $P_{mk}{}^{(i)}$; $k=12\cdots\cdot n$ の何れかを共有するから，同様に次の定義を与えることが出来る

定義 2 『四つの $2mn$ 面体 $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, $\Pi^{(3)}$, $\Pi^{(4)}$ の組合せによって得られる $8mn-4(m+n)$ 面体を完全集中多面体或は Lorenz 多面体といい Π で表わす．この多面体の各側面は $\overset{(1)}{P}_{hk}$ を $\overset{(i)}{P}_{hk}$ $i=1, 2, 3, 4$ でおきかえることによって前記の (a) (b) によって与えられる．』

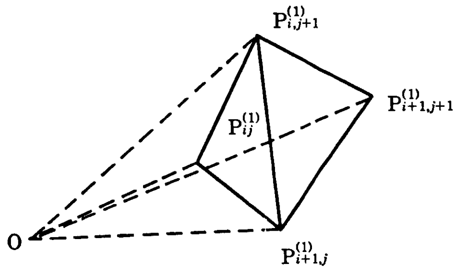
つまり (c) の側面は何れも $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, $\Pi^{(3)}$, $\Pi^{(4)}$ の何れか二つによって共有されるからで

---

*2 以下特に断りのない限り，μ_x, μ_y は常に正であると仮定した．



(i)　m=n=3 の場合
§9 第2表 model 1 に関する集中多面体



(ii)　一般の場合
第1図　$\Pi^{(1)}$ 多面体の図解

ある．

[B]　完全集中多面体の体積

[A] の定義によると完全集中曲面の場合と同様に次の定理が成立する．

定理 1　『正値分布の完全集中多面体は常に単位方分体の内部にある』

定義2により Π は，体積確定であるからそれを U で表わすと

$$U = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + U^{(4)} \tag{5}$$

である．ここで

$$U^{(i)} = \frac{1}{6}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\begin{vmatrix} X^{(i)}_{hk} & Y^{(i)}_{hk} & Z^{(i)}_{hk} \\ X^{(i)}_{h+1\ k} & Y^{(i)}_{h+1\ k} & Z^{(i)}_{h+1\ k} \\ X^{(i)}_{h\ k+1} & Y^{(i)}_{h\ k+1} & Z^{(i)}_{h\ k+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X^{(i)}_{h+1\ k} & Y^{(i)}_{h+1\ k} & Z_{h+1\ k} \\ X^{(i)}_{h+1\ k+1} & Y^{(i)}_{h+1\ k+1} & Z_{h+1\ k+1} \\ X^{(i)}_{h\ k+1} & Y^{(i)}_{h\ k+1} & Z_{h\ k+1} \end{vmatrix}\right\} \tag{6}$$

$i=1, 2, 3, 4$

今 $U^{(1)}$ についてその第一行列式の第二，三行から第一行を引き，一方第二行列式の一，三行から第二行を引いて整理すると (1) の関係により

$$(7)\qquad U^{(1)}=\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{h}\sum_{t=1}^{k}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_{h+1} & y_j\\ 1 & x_i & y_{k+1}\end{vmatrix} f_{st}\,f_{h+1\ j}\,f_{i\ k+1}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{h+1}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{s=1}^{h+1}\sum_{t=1}^{k+1}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_{h+1} & y_j\\ 1 & x_i & y_{k+1}\end{vmatrix} f_{st}\,f_{h+1\ j}\,f_{i\ k+1}\right\}$$

を得る．ここで $h+1$ を新たに h で表わし同様に $k+1$ を k で表わすと

$$(8)\qquad U^{(1)}=\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=2}^{m}\sum_{k=2}^{m}\left\{\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_h & y_j\\ 1 & x_i & y_k\end{vmatrix} f_{st}\,f_{hj}\,f_{ik}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=1}^{h}\sum_{t=1}^{k}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_h & y_j\\ 1 & x_i & y_k\end{vmatrix} f_{st}\,f_{hj}\,f_{ik}\right\}$$

$h=1$ 又は $k=1$ のとき第一行列式は 0 となるから今

$$(9)\qquad A(h,\ k,\ i,\ j,\ s,\ t)=\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_h & y_j\\ 1 & x_i & y_k\end{vmatrix} f_{st}f_{hj}f_{ik}$$

とすれば結局

$$(10)\qquad U^{(1)}=\frac{1}{3\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{h-1}\sum_{t=1}^{k-1}A(h,k,i,j,s,t)+E^{(1)}+e^{(1)}$$

となる．但し

$$(11)\qquad E^{(1)}=\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{h-1}\sum_{t=1}^{k-1}A(h,k,h,j,s,t)\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{s=1}^{h-1}\sum_{t=1}^{k-1}A(h,k,i,k,s,t)+\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{t=1}^{k-1}A(h,k,i,j,h,t)$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{h-1}A(h,k,i,j,s,k)\right\}$$

$$(12)\qquad e^{(1)}=\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{h-1}A(h,k,h,j,s,k)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{t=1}^{k-1}A(h,k,i,k,h,t)+\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}A(h,k,i,j,h,k)\right\}$$

である．

同様にして

$$(13)\qquad U^{(2)}=-\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\sum_{i=h}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=h}^{m}\sum_{t=1}^{k}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_h & y_j\\ 1 & x_i & y_{k+1}\end{vmatrix} f_{st}\,f_{hj}\,f_{i\ k+1}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{s=h+1}^{m}\sum_{t=1}^{k+1}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_h & y_j\\ 1 & x_i & y_{k+1}\end{vmatrix} f_{st}\,f_{hj}\,f_{i\ k+1}\right\}$$

ここで $k+1$ を新たに k で表わすことにより

$$(14)\qquad U^{(2)}=-\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=2}^{n}\left\{\sum_{i=h}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{s=h}^{m}\sum_{t=1}^{k-1}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_h & y_j\\ 1 & x_i & y_k\end{vmatrix} f_{st}\,f_{hj}\,f_{ik}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=t+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=h+1}^{m}\sum_{t=1}^{k}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_h & y_j\\ 1 & x_i & y_k\end{vmatrix} f_{st}\,f_{hj}\,f_{ik}\right\}$$

となる．更にこれを整理すれば結局

(15) $$U^{(2)}=-\frac{1}{3\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{s=h+1}^{m}\sum_{t=1}^{k-1}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_h & y_j\\ 1 & x_i & y_k\end{vmatrix} f_{st}f_{hj}f_{ik}+E^{(2)}$$

を得る．ここで

(16) $$E^{(2)}=-\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{s=h+1}^{m}\sum_{t=1}^{k-1}A(h,k,h,j,s,t)\right.$$
$$+\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{s=h+1}^{m}\sum_{t=1}^{k-1}A(h,k,i,k,s,t)+\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{t=1}^{k-1}A(h,k,i,j,h,t)$$
$$\left.+\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{s=h+1}^{m}A(h,k,i,j,s,k)\right\}$$

かくして全く同様に

(17) $$U^{(3)}=\frac{1}{3\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{s=h+1}^{m}\sum_{t=k+1}^{n}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_h & y_j\\ 1 & x_i & y_k\end{vmatrix} f_{st}f_{hj}f_{ik}+E^{(3)}+e^{(3)}$$

ここで

(18) $$E^{(3)}=\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{s=h+1}^{m}\sum_{t=k+1}^{n}A(h,k,h,j,s,t)\right.$$
$$+\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{S=h+1}^{m}\sum_{t=k+1}^{n}A(h,k,i,k,s,t)+\sum_{i=h+1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{t=k+1}^{n}A(h,k,i,j,h,t)$$
$$\left.+\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{s=h+1}^{m}A(h,k,i,j,s,k)\right\}$$

(19) $$e^{(3)}=\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{s=h+1}^{m}A(h,k,h,j,s,k)\right.$$
$$\left.+\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{t=k+1}^{n}A(h,k,i,k,h,t)+\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=k+1}^{n}A(h,k,i,j,h,k)\right\}$$

であり又

(20) $$U^{(4)}=\frac{-1}{3\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{s=1}^{h-1}\sum_{t=k+1}^{n}\begin{vmatrix}1 & x_s & y_t\\ 1 & x_h & y_j\\ 1 & x_i & y_k\end{vmatrix} f_{st}f_{hj}f_{ik}+E^{(4)}$$

ここで

(21) $$E^{(4)}=-\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{s=1}^{h-1}\sum_{t=k+1}^{n}A(h,k,h,j,s,t)\right.$$
$$+\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{s=1}^{h-1}\sum_{t=k+1}^{n}A(h,k,i,k,s,t)+\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{t=k+1}^{n}A(h,k,i,j,h,t)$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{s=1}^{h-1}A(h,k,i,j,s,k)\right\}$$

である．

以上 (10)～(21) の各式によって U も亦 (5) 式から

(22) $$U=U'+E'+e'$$

と表わすことが出来る．

ここで

(23) $$U'=\frac{1}{3\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i,s<h}\sum_{j,t<k}A(h,k,i,j,s,t)\right.$$
$$-\sum_{i,s>h}\sum_{j,t<k}A(h,k,i,j,s,t)+\sum_{i,s>h}\sum_{j,t>k}A(h,k,i,j,s,t)$$
$$\left.-\sum_{i,s<h}\sum_{j,t>k}A(h,k,i,j,s,t)\right\}$$
$$=\frac{1}{3\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{(i-h)\\(j-k)}}\cdots\sum_{\substack{(s-h)>0\\(t-k)>0}}|A(h,k,i,j,s,t)|$$

又

$$(24)\quad E' = E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)} + E^{(4)}$$

$$= \frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{s=1\cdots\check{h}\cdots m}\sum_{(j-k)}\sum_{(t-k)>0}|A(h, k, h, j, s, t)$$

$$+\sum_{t=1\cdots\check{k}\cdots n}\sum_{(i-h)}\sum_{(s-h)>0}|A(h, k, i, k, s, t)|$$

$$+\sum_{i=1\cdots\check{h}\cdots m}\sum_{(j-k)}\sum_{(t-k)>0}\operatorname{sgn}(i, h)\operatorname{sgn}(j, k)\,A(h, k, i, j, h, t)$$

$$+\sum_{j=1\cdots\check{k}\cdots n}\sum_{(i-h)}\sum_{(s-h)>0}\operatorname{sgn}(i, h)\operatorname{sgn}(j, k)\,A(h, k, i, j, s, k)\Big]$$

$$= \frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{s=1}^{m}\sum_{(j-k)}\sum_{(t-k)>0}|A(h, k, h, j, s, t)|$$

$$+\sum_{t=1}^{n}\sum_{(j-h)}\sum_{(s-h)>0}|A(h, k, i, k, s, t)| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{(j-k)}\sum_{(t-k)>0}\operatorname{sgn}(i, h)\operatorname{sgn}(j, k)$$

$$\times A(h, k, i, j, h, t) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{(i-h)}\sum_{(s-h)>0}\operatorname{sgn}(i, h)\operatorname{sgn}(j, k)\,A(h, k, i, j, s, k)\Big]$$

であるがこの各項は行列式を展開すれば容易に次式の各項に等しいことが分る．つまり

$$(25)\quad E' = \frac{1}{6\mu_x\mu_y}\Big[\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{(j-k)}\sum_{(t-k)>0}|A(h, k, s, j, s, t)|$$

$$+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{(i-h)}\sum_{(S-h)>0}|A(h, k, i, t, s, t)|$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum_{(j-k)}\sum_{(t-k)>0}\operatorname{sgn}(i, s)\operatorname{sgn}(j, k)\,A(s, k, i, j, s, t)$$

$$+\sum_{h=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{(i-h)}\sum_{(s-h)>0}\operatorname{sgn}(i, h)\operatorname{sgn}(j, t)\,A(h, t, i, j, s, t)\Big]$$

となる．

更に例えば $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$ に関する $t>j$ の場合の第三項は，それぞれ $\Pi^{(3)}$, $\Pi^{(4)}$ に関する $t>j$ の場合の第一項と相殺され，逆に $\Pi^{(3)}$, $\Pi^{(4)}$ に関する $t<j$ の場合の第三項はそれぞれ $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$ に関する $t<j$ の場合の第一項と相殺される等の事情を考えると

$$(26)\quad E' = \frac{1}{6\mu_x\mu_y}\Big\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{S=1}^{m}\sum\sum_{\substack{t<j<k\\t>j>k}}|A(h, k, s, j, s, t)|$$

$$+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{s<i<h\\s>i>h}}|A(h, k, i, t, s, t)|$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{t<j<k\\t>j>k}}|A(s, k, i, j, s, t)|$$

$$+\sum_{h=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{s<i<h\\s>i>h}}|A(h, t, i, j, s, t)|\Big\}$$

が成立する．

ここで中括弧内の第一項と第三項を併せ考えると A を展開し，一方の項について置換 (s, h), (j, k) を施すと容易に

$$(27)\quad \sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,n\\j\neq k}}\cdots\sum|A(h, k, s, j, s, t)| - \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{j<t<k\\j>t>k}}|A(h, k, s, j, s, t)|$$

$$= \sum_{\substack{i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,n\\j\neq k}}\cdots\sum|A(s, k, i, j, s, t)| - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{j<t<k\\j>t>k}}|A(s, k, i, j, s, t)|$$

に等しいことが分る．従って又これは

(28) $$\frac{1}{2}\overbrace{\sum\cdots\sum}^{\leq 5}_{\substack{(h-s)(i-s)=0\\h,i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,n}}|A(h,k,i,j,s,t)|-\frac{1}{2}\left\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{j\leq t<k\\j\geq t>k}}|A(h,k,s,j,s,t)|\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{j\leq t<k\\j\geq t>k}}|A(s,k,i,j,s,t)|\right\}$$

に等しいとも云える．
同様にして第二項と第四項を加えると

(29) $$\frac{1}{2}\overbrace{\sum\cdots\sum}^{\leq 5}_{\substack{(k-t)(j-t)=0\\h,i,s=1,2,\cdots,m\\h,j,t=1,2,\cdots,n}}|A(h,k,i,j,s,t)|-\frac{1}{2}\left\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{i\leq s<h\\i\geq s>h}}|A(h,k,i,t,s,t)|\right.$$
$$\left.+\sum_{h=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{i\leq s<h\\i\geq s>h}}|A(h,t,i,j,s,t)|\right\}$$

を得るから結局

(30) $$E'=\frac{1}{12\mu_x\mu_y}\overbrace{\sum\cdots\sum}^{\leq 5}_{\substack{(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)=0\\h,i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,n}}|A(h,k,i,j,s,t)|$$
$$-\frac{1}{12\mu_x\mu_y}\left\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{j\leq t<k\\j\geq t>k}}|A(h,k,s,j,s,t)|\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{j\leq t<k\\j\geq t>k}}|A(s,k,i,j,s,t)|+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{i\leq s<h\\i\geq s>h}}|A(h,k,i,t,s,t)|$$
$$\left.+\sum_{h=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{i\leq s<h\\i\geq s>h}}|A(h,t,i,j,s,t)|\right\}-\frac{1}{12\mu_x\mu_y}\left\{\sum\sum\sum\sum_{\substack{i,s=1,2,\cdots,m\\j,t=1,2,\cdots,n}}|A(s,t,i,j,s,t)|\right.$$
$$\left.+\sum\sum\sum\sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\k,t=1,2,\cdots,n}}|A(h,k,s,t,s,t)|\right\}>0$$

が成立する．
一方

(31) $$e'=e^{(1)}+e^{(3)}=\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum\sum_{(j-k)(s-h)>0}A(h,k,h,j,s,k)\right.$$
$$\left.+\sum\sum_{(i-h)(t-k)>0}A(h,k,i,k,h,t)+\sum\sum_{(i-h)(j-k)>0}A(h,k,i,j,h,k)\right\}$$

であるが，この場合中括弧内の各項は展開することにより絶対値に於て相等しく且又次の(23)式に等しい結果が得られる．即

(32) $$\sum\sum\sum\sum_{\substack{(i-s)(j-t)>0\\i,s=1,2,\cdots,m\\j,t=1,2,\cdots,n}}|A(s,t,i,j,s,t)|=\sum\sum\sum\sum_{\substack{(h-s)(k-t)>0\\h,s=1,2,\cdots,m\\k,t=1,2,\cdots,n}}A(h,k,s,t,s,t)$$

更に，第一，第二項が常に正であるのに対し第三項は負値をとるから結局

(33) $$e'=\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum\sum\sum\sum_{\substack{(h-s)(k-t)>0\\h,s=1,2,\cdots,m\\k,t=1,2,\cdots,n}}A(h,k,s,t,s,t)$$

と表わすことが出来る．

処で一方 (23) 式の U' は更に $i\neq s,\ j\neq t$ の項の総和 U_0 と $i=s,\ j\neq t$ 及び $i\neq s,\ j=t$ の項の総和 E_0 及び $i=s,\ j=t$ の項の総和 e_0 に分解される．即

(34) $$U'=U_0+E_0+e_0$$

である．この内 U_0 については拙稿 [5] の Proposition 21 から 23 に至る一連の証明が殆どそのまま適用出来るので結局

(35) $$U_0=\frac{1}{4\mu_x\mu_y}\sum\cdots\sum_{\substack{(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)<0\\h,i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,n}}\left|\det\begin{pmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{pmatrix}\right|f_{hk}f_{ij}f_{st}$$

が得られる．

又 E_0, e_0 はそれぞれ

$$(36)\qquad E_0=\frac{1}{3\mu_x\mu_y}\Bigg\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{\substack{(j-k)(t-k)>0\\ j\neq t}}\sum|A(h,k,s,j,s,t)|$$
$$+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{(i-h)(s-h)>0\\ i\neq s}}\sum|A(h,k,i,t,s,t)|\Bigg\}$$

$$(37)\qquad e_0=\frac{1}{3\mu_x\mu_y}\sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\ k,t=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum|A(h,k,s,t,s,t)|$$

E_0 については更に

$$(38)\qquad E_0=\frac{1}{3\mu_x\mu_y}\Bigg[\Bigg\{\sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\ k,j,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum|A(h,k,s,j,s,t)|$$
$$-\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{\substack{t<k\leqq j\\ t>k\geqq j}}\sum|A(h,k,s,j,s,t)|\Bigg\}$$
$$+\Bigg\{\sum_{\substack{h,i,s=1,2,\cdots,m\\ k,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum|A(h,k,i,t,s,t)|-\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{s<h\leqq i\\ s>h\geqq i}}\sum|A(h,k,i,t,s,t)|\Bigg\}\Bigg]$$

と表わすことが出来，最初の中括弧の内部は

$$\sum_{\substack{i,s=1,2,\cdots,m\\ k,j,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum|A(s,k,i,j,s,t)|-\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{t<j\leqq k\\ t>j\geqq k}}\sum|A(h,t,i,j,s,t)|$$

に等しく後の中括弧の内部は

$$\sum_{\substack{h,i,s=1,2,\cdots,m\\ j,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum|A(h,t,i,j,s,t)|-\sum_{h=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{s<i\leqq h\\ s>i\geqq h}}\sum|A(h,t,i,j,s,t)|$$

に等しいことを考えると結局 E' について (26) 式より (30) 式を誘導したのと同様にして

$$(39)\qquad E_0=\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\overbrace{\sum_{\substack{(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)=0\\ h,i,s=1,2,\cdots,m\\ k,j,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum}^{\leqq 5}|A(h,k,i,j,s,t)|$$
$$-\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\Bigg\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{\substack{t<k\leqq j\\ t>k\geqq j}}\sum|A(h,k,s,j,s,t)|$$
$$+\sum_{h=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{t<j\leqq k\\ t>j\geqq k}}\sum|A(s,k,i,j,s,t)|+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{s<h\leqq i\\ s>h\geqq i}}\sum|A(h,k,i,t,s,t)|$$
$$+\sum_{h=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{s<i\leqq h\\ s>i\geqq h}}\sum|A(h,t,i,j,s,t)|\Bigg\}-\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\Bigg\{\sum_{\substack{i,s=1,2,\cdots,m\\ j,t=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum|A(s,t,i,j,s,t)|$$
$$+\sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\ k,t=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum|A(h,k,s,t,s,t)|$$

を得ることが出来る.

以上 (22), (30), (33), (34), (35), (37), (39) の諸式を纏めると一方では

$$(40)\qquad U=U_0+E'+E_0+e'+e_0$$
$$\geqq U_0=\frac{1}{4\mu_x\mu_y}\sum_{\substack{(h-s)(i-s)(h-t)(j-t)<0\\ h,i,s=1,2,\cdots,m\\ k,j,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum\left|\det\begin{pmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{pmatrix}\right|f_{hk}f_{ij}f_{st}$$

が成立つが他方

$$(41)\qquad \sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\ k,t=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum|A(h,k,s,t,s,t)|=\sum_{\substack{i,s=1,2,\cdots,m\\ j,t=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum|A(s,t,i,j,s,t)|$$
$$=\sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\ k,t=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum|A(h,k,s,h,s,t)|=\sum_{\substack{i,s=1,2,\cdots,m\\ k,t=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum|A(s,k,i,k,s,t)|$$
$$=\sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\ k,t=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum|A(h,k,h,t,s,t)|=\sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\ j,t=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum|A(h,t,h,j,s,t)|$$

の関係を考慮すると容易に

$$(42)\qquad U=U_1-E-e$$

$$\leqq U_1=\frac{1}{4\mu_x\mu_y}\sum_{\substack{(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)\leqq 0\\ h,i,s=1,2,\cdots,m\\ k,j,t=1,2,\cdots,n}}\!\!\!\cdots\sum \left|\det\begin{pmatrix} x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{pmatrix}\right| f_{hk}f_{ij}f_{st}$$

を得ることが出来る．

ここで

$$(43)\qquad E=\frac{1}{12\mu_x\mu_y}\left\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{j<t<k\\ j>t>k}} A(h,k,s,j,s,t)+\sum_{h=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{j<t<k\\ j>t>k}}|A(s,k,i,j,s,t)|\right.$$

$$\left.+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{j<s<h\\ i>s>h}}|A(h,k,i,t,s,t)|+\sum_{h=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{i<s<h\\ i>s>h}}|A(h,t,i,j,s,t)|\right\}$$

$$+\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\left\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum\sum_{\substack{t<k<j\\ t>k>j}}|A(h,k,s,j,s,t)|+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{t<j<k\\ t>j>k}}|A(s,k,i,j,s,t)|\right.$$

$$\left.+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{s<h<i\\ s>h>i}}|A(h,k,i,t,s,t)|+\sum_{h=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum\sum_{\substack{s<i<h\\ s>i>h}}|A(h,k\ i,j,s,t)|\right\}$$

$$=\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\left\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{j<t<k\\ j>t>k}}|A(h,k,s,j,s,t)|+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{i<s<h\\ i>s>h}}|A(h,k,i,t,s,t)|\right\}$$

$$+\frac{1}{3\mu_x\mu_y}\left\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\sum\sum_{\substack{t<k<j\\ t>k>j}}|A(h,k,s,j,s,t)|+\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum\sum_{\substack{s<h<i\\ s>h>i}}|A(h,k,i,t,s,t)|\right\}$$

$$>0.$$

又

$$(44)\qquad e=\frac{7}{6\mu_x\mu_y}\sum\sum\sum\sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\ k,t=1,2,\cdots,n}}|A(h,k,s,t,s,t)|-\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum\sum\sum\sum_{(h-s)(k-t)>0}|A(h,k,s,t,s,t)|$$

$$=\frac{1}{\mu_x\mu_y}\sum\sum\sum\sum_{\substack{h,s=1,2,\cdots,m\\ k,t=1,2,\cdots,n}}|A(h,k,s,t,s,t)|+\frac{1}{6\mu_x\mu_y}\sum\sum\sum\sum_{(h-s)(k-t)<0}|A(h,k,s,t,s,t)|\ >0.$$

かくして次の定理が成立する．

定理 2 『完全集中多面体の確定する体積 U は一般に次の関係を満足する．即

$$(45)\qquad \frac{1}{4\mu_x\mu_y}\sum_{\substack{(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)<0\\ h,i,s=1,2,\cdots,m\\ k,j,t=1,2,\cdots,n}}\!\!\!\cdots\sum \left|\det\begin{pmatrix} x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{pmatrix}\right|$$

$$\leqq U\leqq \frac{1}{4\mu_x\mu_y}\sum_{\substack{(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)\leqq 0\\ h,i,s=1,2,\cdots,m\\ k,j,t=1,2,\cdots,n}}\!\!\!\cdots\sum \left|\det\begin{pmatrix} x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{pmatrix}\right|\text{。』}$$

従って

系 1 『一般に次式が成立する．

$$(46)\qquad U_1-U_0=O\left(\sum_{i=1}^{m}f_{i\cdot}^2+\sum_{j=1}^{n}f_{\cdot j}^2\right)$$

従って又

$$(47)\qquad U=\frac{1}{4\mu_x\mu_y}\sum_{\substack{(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)<0\\ h,i,s=1,2,\cdots,m\\ k,j,t=1,2,\cdots,n}}\!\!\!\cdots\sum \left|\det\begin{pmatrix} x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{pmatrix}\right|+O\left(\sum_{i=1}^{n}f_{i2}^2+\sum_{j=1}^{n}f_{2j}^2\right)\text{』}$$

［C］ 集中多面体群の射影面積

各集中多面体の各座標面への正射影の面積を考察することは §2 における諸測度の幾何学的意味づけに役立つ．

今第 i 集中多面体 $\Pi^{(i)}$; $i=1,2,3,4$ の XY, YZ, ZX 各面への正射影の面積（有向量）をそれぞれ $\overset{(i)}{H}_{SZ}$, $\overset{(i)}{H}_{SX}$, $\overset{(i)}{H}_{SY}$ とする．この時 $\Pi^{(1)}$ 多面体の $\overset{(1)}{P}_{hk}\overset{(1)}{P}_{h+1k}\overset{(1)}{P}_{hk+1}$ 側面及び $\overset{(1)}{P}_{h+1k}\overset{(1)}{P}_{h+1k+1}\overset{(1)}{P}_{hk+1}$ 側面の XY 面への正射影の有向面積 $\Delta_{hk}\overset{(1)}{H}_{SZ}$ は

$$\Delta_{hk} H^{(1)}_{SZ} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{vmatrix} X^{(1)}_{h+1\,k} - X^{(1)}_{hk} & X^{(1)}_{h\,k+1} - X^{(1)}_{hk} \\ Y^{(1)}_{h+1\,k} - Y^{(1)}_{hk} & Y^{(1)}_{h\,k+1} - Y^{(1)}_{hk} \end{vmatrix} \right. \tag{48}$$
$$\left. + \begin{vmatrix} X^{(1)}_{h\,k+1} - X^{(1)}_{h+1\,k+1} & X^{(1)}_{h+1\,k} - X^{(1)}_{h+1\,k+1} \\ Y^{(1)}_{h\,k+1} - Y^{(1)}_{h+1\,k+1} & Y^{(1)}_{h+1\,k} - Y^{(1)}_{h+1\,k+1} \end{vmatrix} \right\}$$
$$= \frac{1}{2\mu_x}\left\{ \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{h+1} & x_i \end{vmatrix} f_{h+1\,j} f_{i\,k+1} + \sum_{i=1}^{h+1}\sum_{j=1}^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{h+1} & x_i \end{vmatrix} f_{h+1\,j} f_{i\,k+1} \right\}$$

となるから $\overset{(1)}{H}_{SZ}$ は上式で $h+1$, $k+1$ を改めてそれぞれ h, k で表わすと

$$H^{(1)}_{SZ} = \frac{1}{2\mu_x}\sum_{h=2}^{m}\sum_{k=2}^{n}\left\{ \sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}(x_i - x_h) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_i - x_h) f_{hj} f_{ik} \right\} \tag{49}$$

同様にして

$$\begin{cases} H^{(2)}_{SZ} = -\dfrac{1}{2\mu_x}\displaystyle\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=2}^{n}\left\{ \sum_{i=h}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}(x_i - x_h) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}(x_i - x_h) f_{hj} f_{ik} \right\} \\ H^{(3)}_{SZ} = \dfrac{1}{2\mu_x}\displaystyle\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{ \sum_{i=h}^{m}\sum_{j=k}^{n}(x_i - x_h) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=k+1}^{m}\sum_{j=k+1}^{n}(x_i - x_h) f_{hj} f_{ik} \right\} \\ H^{(4)}_{SZ} = -\dfrac{1}{2\mu_x}\displaystyle\sum_{h=2}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{ \sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=k}^{n}(x_i - x_h) f_{hj} f_{ih} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=k+1}^{n}(x_i - x_h) f_{hj} f_{ik} \right\} \end{cases} \tag{49'}$$

が得られる．又 $\overset{(i)}{H}_{SX}$ に関して

$$\begin{cases} H^{(1)}_{SY} = \dfrac{1}{2\mu_y}\displaystyle\sum_{h=2}^{m}\sum_{k=2}^{n}\left\{ \sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}(y_j - y_k) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(y_j - y_k) f_{hj} f_{ik} \right\} \\ H^{(2)}_{SY} = -\dfrac{1}{2\mu_y}\displaystyle\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=2}^{n}\left\{ \sum_{i=h}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}(y_j - y_k) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}(y_j - y_k) f_{hj} f_{ik} \right\} \\ H^{(3)}_{SY} = \dfrac{1}{2\mu_y}\displaystyle\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{ \sum_{i=h}^{m}\sum_{j=k}^{n}(y_j - y_k) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=k+1}^{n}(y_j - y_k) f_{hj} f_{ik} \right\} \\ H^{(4)}_{SY} = -\dfrac{1}{2\mu_y}\displaystyle\sum_{h=2}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{ \sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=k}^{n}(y_j - y_k) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=k+1}^{n}(y_j - y_k) f_{hj} f_{ik} \right\} \end{cases} \tag{50}$$

となる．

更に

$$\begin{cases} H^{(1)}_{SX} = \dfrac{1}{2\mu_x\mu_y}\displaystyle\sum_{h=2}^{m}\sum_{k=2}^{n}\left\{ \sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}(x_h y_k - x_i y_j) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_h y_k - x_i y_j) f_{hj} f_{ik} \right\} \\ H^{(2)}_{SX} = -\dfrac{1}{2\mu_x\mu_y}\displaystyle\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=2}^{n}\left\{ \sum_{i=h}^{m}\sum_{j=1}^{k-1}(x_h y_k - x_i y_j) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=1}^{k}(x_h y_k - x_i y_j) f_{hj} f_{ik} \right\} \\ H^{(3)}_{SX} = \dfrac{1}{2\mu_x\mu_y}\displaystyle\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{ \sum_{i=h}^{m}\sum_{j=k}^{n}(x_h y_k - x_i y_j) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=k+1}^{n}(x_h y_k - x_i y_j) f_{hj} f_{ik} \right\} \\ H^{(4)}_{SX} = -\dfrac{1}{2\mu_x\mu_y}\displaystyle\sum_{h=2}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{ \sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=k}^{n}(x_h y_k - x_i y_j) f_{hj} f_{ik} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=k+1}^{n}(x_h y_k - x_i y_j) f_{hj} f_{ik} \right\} \end{cases} \tag{51}$$

が成立する．

従って以上の結果から容易に次の定理が得られる．

定理 3 『$\overset{(i)}{H}_{SX}$, $\overset{(i)}{H}_{SY}$, $\overset{(i)}{H}_{SZ}$ につき次の諸関係が成立する．

$$\begin{cases} -H^{(1)}_{SZ} - H^{(2)}_{SZ} + H^{(3)}_{SZ} + H^{(4)}_{SZ} = \dfrac{\Delta_x}{\mu_x} - \dfrac{1}{2\mu_x}\displaystyle\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} |x_h - x_i| (f_{h1} f_{i1} + f_{hn} f_{in}) \\ -H^{(1)}_{SZ} + H^{(2)}_{SZ} + H^{(3)}_{SZ} - H^{(4)}_{SZ} = \dfrac{-1}{\mu_x}\displaystyle\sum_{h,i=1}^{m}\sum_{k,j=1}^{n} \mathrm{sgn}\,(j, k)\,(x_h - x_i) f_{hj} f_{ik} \\ H^{(1)}_{SZ} - H^{(2)}_{SZ} + H^{(3)}_{SZ} - H^{(4)}_{SZ} = 0 \end{cases} \tag{52}$$

$$\begin{cases} -H^{(1)}_{SY} - H^{(2)}_{SY} + H^{(3)}_{SY} + H^{(4)}_{SY} = \dfrac{-1}{\mu_y}\displaystyle\sum_{h,i=1}^{m}\sum_{k,j=1}^{n} \mathrm{sgn}\,(i, h)\,(y_k - y_j) f_{hj} f_{ik} \\ -H^{(1)}_{SY} + H^{(2)}_{SY} + H^{(3)}_{SY} - H^{(4)}_{SY} = \dfrac{\Delta_y}{\mu_y} - \dfrac{1}{2\mu_y}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |y_k - y_j| (f_{1k} f_{1j} + f_{mk} f_{mj}) \\ H^{(1)}_{SY} - H^{(2)}_{SY} + H^{(3)}_{SY} - H^{(4)}_{SY} = 0 \end{cases} \tag{53}$$

及び

$$
(54)\quad
\begin{cases}
-H_{SX}^{(1)}-H_{SX}^{(2)}+H_{SX}^{(3)}+H_{SX}^{(4)} = \dfrac{1}{\mu_X}\displaystyle\sum_{h,i=1}^{m}\sum_{k,j=1}^{n}\mathrm{sgn}\,(h,\,i)\,(x_x y_k - x_i y_j)\, f_{hj} f_{ik} \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{2\mu_x\mu_y}\displaystyle\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|\,x_h - x_i\,|\,(y_1 f_{h1} f_{i1} + y_n f_{hn} f_{in}) \\
-H_{SX}^{(1)}+H_{SX}^{(2)}+H_{SX}^{(3)}-H_{SX}^{(4)} = \dfrac{1}{\mu_X}\displaystyle\sum_{h,i=1}^{m}\sum_{k,j=1}^{n}\mathrm{sgn}\,(k,\,j)\,(x_h y_k - x_i y_j)\, f_{hj} f_{ik} \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{2\mu_x\mu_y}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\,y_k - y_j\,|\,(x_1 f_{1k} f_{1j} + x_m f_{mk} f_{mj}) \\
H_{SX}^{(1)}-H_{SX}^{(2)}+H_{SX}^{(3)}-H_{SX}^{(4)} = 0
\end{cases}
$$

但し，Δ_x, Δ_y はそれぞれ x 及び y に関する平均差を表わす

即

$$
(55)\quad
\begin{cases}
\Delta_x = \displaystyle\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}|\,x_h - x_i\,|\,f_{h\cdot}\, f_{i\cdot} \\
\Delta_y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\,y_k - y_j\,|\,f_{\cdot k}\, f_{\cdot j}
\end{cases}
$$

である.』

証明 (52) の第二式について考えると (59) 式から

$$
-H_{SZ}^{(1)} + H_{SZ}^{(2)} + H_{SZ}^{(3)} - H_{SZ}^{(4)} = \frac{-1}{\mu_X}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{sgn}\,(j,\,k)\,(x_h - x_i)\, f_{hj} f_{ik}
$$

$$
+\ \frac{1}{2\mu_X}\Big\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{h}(x_i - x_h)\, f_{h1} f_{i1} + \sum_{h=1}^{m}\sum_{i=h+1}^{n}(x_i - x_h)\, f_{h1} f_{i1}
$$

$$
-\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=h}^{m}(x_i - x_h)\, f_{hn} f_{in} - \sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{h-1}(x_i - x_h)\, f_{hn} f_{in}
$$

$$
= \frac{1}{\mu}\sum_{h,i=1}^{m}\sum_{k,j=1}^{n}\mathrm{sgn}\,(k,\,j)\,(x_h - x_i)\, f_{hj} f_{ik}
$$

同様にして他の諸関係が得られる. (証明了)

更に立入って詳組に $\overset{(i)}{H}_{SX}$, $\overset{(i)}{H}_{SY}$, $\overset{(i)}{H}_{SZ}$ を検討すると次の結果が得られる.

定理 4 『$\overset{(i)}{H}_{SX}$, $\overset{(i)}{H}_{SY}$, $\overset{(i)}{H}_{SZ}$ の間には，更に次の諸関係が成立する

$$
(56)\quad
\begin{cases}
H_{SZ}^{(1)} + H_{SZ}^{(3)} = \varepsilon_Z^{(1)} - \varepsilon_Z^{(3)}, \quad H_{SZ}^{(2)} + H_{SZ}^{(4)} = \varepsilon_Z^{(2)} - \varepsilon_Z^{(4)} \\
H_{SY}^{(1)} + H_{SY}^{(3)} = \varepsilon_Y^{(1)} - \varepsilon_Y^{(3)}, \quad H_{SY}^{(2)} + H_{SY}^{(4)} = \varepsilon_Y^{(2)} - \varepsilon_Y^{(4)} \\
H_{SX}^{(1)} + H_{SX}^{(3)} = \varepsilon_X^{(1)} - \varepsilon_X^{(3)}, \quad H_{SX}^{(2)} + H_{SX}^{(4)} = \varepsilon_X^{(2)} - \varepsilon_X^{(3)}
\end{cases}
$$

$$
(57)\quad
\begin{cases}
-H_{SZ}^{(1)} + H_{SZ}^{(4)} = \dfrac{\Delta_x}{2\mu_x} - \varepsilon_Z^{(1)} + \varepsilon_Z^{(4)}, \quad -H_{SZ}^{(2)} + H_{SZ}^{(3)} = \dfrac{\Delta_x}{2\mu_x} - \varepsilon_Z^{(2)} + \varepsilon_Z^{(3)} \\
-H_{SY}^{(1)} + H_{SY}^{(2)} = \dfrac{\Delta_y}{2\mu_x} - \varepsilon_Y^{(1)} + \varepsilon_Y^{(2)}, \quad H_{SY}^{(3)} - H_{SY}^{(4)} = \dfrac{\Delta_y}{2\mu_y} + \varepsilon_Y^{(3)} - \varepsilon_Y^{(4)}
\end{cases}
$$

及び

$$
(58)\quad H_Y^{(1)} H_Z^{(1)} + H_Y^{(2)} H_Z^{(2)} + H_Y^{(3)} H_Z^{(3)} + H_Y^{(4)} H_Z^{(4)}
$$

$$
= \frac{-1}{4\mu_x\mu_y}\Big\{\Delta_x\sum_{h,i=1}^{m}\sum_{k,j=1}^{n}\mathrm{sgn}\,(i,\,h)\,(y_k - y_j)\, f_{hj} f_{ik} + \Delta_y\sum_{h,i=1}^{m}\sum_{k,j=1}^{n}\mathrm{sgn}\,(j,\,k)\,(x_h - x_i)\, f_{hj} f_{ik}\Big\}
$$

$$
+\ O\,(\varepsilon)
$$

但し

$$
\begin{cases}
\varepsilon_Z^{(1)} = \dfrac{1}{2\mu_x}\displaystyle\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{h}(x_h - x_i)\, f_{h1} f_{i1}, \quad \varepsilon_Z^{(2)} = \dfrac{-1}{2\mu_x}\displaystyle\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=h+1}^{m}(x_h - x_i)\, f_{h1} f_{i1} \\
\varepsilon_Z^{(3)} = \dfrac{1}{2\mu_x}\displaystyle\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=h}^{m}(x_h - x_i)\, f_{hn} f_{in}, \quad \varepsilon_Z^{(4)} = \dfrac{-1}{2\mu_x}\displaystyle\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{h-1}(x_h - x_i)\, f_{hn} f_{in} \\
\varepsilon_Y^{(1)} = \dfrac{1}{2\mu_y}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(y_k - y_j)\, f_{1k} f_{1j}, \quad \varepsilon_Y^{(2)} = \dfrac{-1}{2\mu_y}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}(y_k - y_j)\, f_{mk} f_{mj}
\end{cases}
$$

$$(59)\quad \begin{cases} \varepsilon_Y^{(3)} = \dfrac{-1}{2\mu_y}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(y_k-y_j)f_{mk}f_{mj}\,,\ \varepsilon_Y^{(4)} = \dfrac{1}{2\mu_y}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}(y_k-y_j)f_{1k}f_{1j} \\ \varepsilon_X^{(1)} = \dfrac{-1}{2\mu_x\mu_y}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}x_1(y_k-y_j)f_{1k}f_{1j} + \sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{h}y_1(x_h-x_i)f_{h1}f_{i1}\right\} \\ \varepsilon_X^{(2)} = \dfrac{1}{2\mu_x\mu_y}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}x_m(y_k-y_j)f_{mk}f_{mj} + \sum_{h=1}^{m}\sum_{i=h+1}^{m}(x_h-x_i)f_{h1}f_{i1}\right\} \\ \varepsilon_X^{(3)} = \dfrac{-1}{2\mu_x\mu_y}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}x_m(y_k-y_j)f_{mk}f_{mj} + \sum_{h=1}^{m}\sum_{i=h}^{m}y_n(x_h-x_i)f_{hn}f_{in}\right\} \\ \varepsilon_X^{(4)} = \dfrac{1}{2\mu_x\mu_y}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n}x_1(y_k-y_j)f_{1j}f_{1k} + \sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{h-1}y_m(x_h-x_i)f_{hn}f_{in}\right\} \end{cases}$$

及び

$$(60)\qquad \varepsilon = \sum_{i=1}^{4}(|\varepsilon_Y^{(i)}| + |\varepsilon_Z^{(i)}|)$$

である.」

証明

例えば (56) の第一式を考えると, (49) 及び (59) の第一式により

$$H_{SZ}^{(1)} = \frac{1}{2\mu_x}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}(x_i-x_h)f_{hj}f_{ik} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_i-x_h)f_{hj}f_{ik}\right\} + \varepsilon_Z^{(1)}$$

今 h, i 及び k, j の加算の順序をかえると

$$H_{SZ}^{(1)} = \frac{1}{2\mu_x}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{h=i+1}^{m}\sum_{k=j+1}^{n}(x_i-x_h)f_{hj}f_{ik} + \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=j}^{n}(x_i-x_h)f_{hj}f_{ik}\right\} + \varepsilon_Z^{(1)}$$

ここで h, i 及び k, j の記号を交換すると

$$H_{SZ}^{(1)} = \frac{-1}{2\mu_x}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=h+1}^{m}\sum_{j=k+1}^{n}(x_i-x_h)f_{hj}f_{ik} + \sum_{i=h}^{n}\sum_{j=k}^{n}(x_i-x_h)f_{hj}f_{ik}\right\} + \varepsilon_Z^{(1)}$$

$$= -H_{SZ}^{(3)} - \varepsilon_Z^{(3)} + \varepsilon_Z^{(1)}$$

同様にして (56) の他の諸式が得られる.

他方 (57) の第一式を考えると (49) 及び (49′) から

$$\begin{aligned} -H_{SZ}^{(1)} + H_{SZ}^{(4)} &= \frac{1}{2\mu_x}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{k-1}(x_h-x_i)f_{hj}f_{ik} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_h-x_i)f_{hj}f_{ik}\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_x}\sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=k}^{n}(x_h-x_i)f_{hj}f_{ik} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=k+1}^{n}(x_h-x_i)f_{hj}f_{ik}\right\} \\ &\quad - \varepsilon_Z^{(1)} + \varepsilon_Z^{(4)} \\ &= \frac{1}{2\mu_x}\left\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{h-1}(x_h-x_i)f_{h\cdot}f_{i\cdot} + \sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{h}(x_h-x_i)f_{h\cdot}f_{i\cdot}\right\} - \varepsilon_Z^{(1)} + \varepsilon_Z^{(4)} \end{aligned}$$

処で h, i の加等の順序をかえ更に i, h の記号を交換すると

$$\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{h-1}(x_h-x_i)f_{h\cdot}f_{i\cdot} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=i+1}^{m}(x_h-x_i)f_{h\cdot}f_{i\cdot} = -\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=h+1}^{m}(x_h-x_i)f_{h\cdot}f_{i\cdot}$$

であるから

$$\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{h-1}(x_h-x_i)f_{h\cdot}f_{i\cdot} = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|x_h-x_i|f_{h\cdot}f_{i\cdot} = \frac{\Delta_x}{2}$$

が成立することを考慮すれば容易に

$$-\overset{(1)}{H}_{SZ} + \overset{(1)}{H}_{SZ} = \frac{\Delta_x}{2\mu_x} - \overset{(1)}{\varepsilon}_Z + \overset{(4)}{\varepsilon}_Z$$

を得ることが出来る. (50) の他の諸式についても同様である.

今定理 3 (52) (53) を考慮すると

$$\frac{-1}{\mu_x\mu_y}\left\{\Delta_x\sum_{h,i=1}^{m}\sum_{k,j=1}^{n}\operatorname{sgn}(i,h)(y_k-y_j)f_{hj}f_{ik}\right.$$

$$\left.+\Delta_y\sum_{h,i=1}^{m}\sum_{k,j=1}^{n}\operatorname{sgn}(j,k)(x_h-x_i)f_{hj}f_{ik}\right\}$$

$$= \{ - H_{SY}^{(1)} - H_{SY}^{(2)} + H_{SY}^{(3)} + H_{SY}^{(4)} \} \{ - H_{SZ}^{(1)} - H_{SZ}^{(2)} + H_{SZ}^{(3)} + H_{SZ}^{(4)} \}$$
$$+ \{ - H_{SY}^{(1)} + H_{SY}^{(2)} + H_{SY}^{(3)} - H_{SY}^{(4)} \} \{ - H_{SZ}^{(1)} + H_{SZ}^{(2)} + H_{SZ}^{(3)} - H_{SZ}^{(4)} \} + O(\varepsilon)$$
$$= 2 \{ H_{SY}^{(1)} H_{SZ}^{(1)} + H_{SY}^{(2)} H_{SZ}^{(2)} + H_{SY}^{(3)} H_{SZ}^{(3)} + H_{SY}^{(4)} H_{SZ}^{(4)} \}$$
$$- \{ H_{SY}^{(1)} + H_{SY}^{(2)} \} \{ H_{SZ}^{(3)} + H_{SZ}^{(4)} \} - \{ H_{SY}^{(3)} + H_{SY}^{(4)} \} \{ H_{SZ}^{(1)} + H_{SZ}^{(2)} \}$$
$$- \{ H_{SY}^{(1)} - H_{SY}^{(2)} \} \{ H_{SZ}^{(3)} - H_{SZ}^{(4)} \} - \{ H_{SY}^{(3)} - H_{SY}^{(4)} \} \{ H_{SZ}^{(1)} - H_{SZ}^{(2)} \} + O(\varepsilon)$$

こゝで (67) 式を適用すると

$$= 2 \sum_{i=1}^{4} H_{SY}^{(i)} H_{SZ}^{(i)}$$
$$- 2 \{ H_{SY}^{(1)} H_{SZ}^{(3)} + H_{SY}^{(2)} H_{SZ}^{(4)} + H_{SY}^{(3)} H_{SZ}^{(1)} + H_{SY}^{(4)} H_{SZ}^{(2)} \} + O(\varepsilon)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{4} H_{SY}^{(i)} H_{SZ}^{(i)} + 2 \{ H_{SY}^{(1)} H_{SZ}^{(1)} + H_{SY}^{(2)} H_{SZ}^{(2)} + H_{SY}^{(3)} H_{SZ}^{(3)}$$
$$+ H_{SY}^{(4)} H_{SZ}^{(4)} \} + O(\varepsilon)$$
$$= 4 \sum_{i=1}^{4} H_{SY}^{(i)} H_{SZ}^{(i)} + O(\varepsilon)$$

これにより (58) 式の成立を知ることが出来る（証明了）

［D］ 集中多面体の境界の性質

隣接する集中多面体 $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}; \Pi^{(2)}, \Pi^{(3)}; \Pi^{(3)}, \Pi^{(4)}; \Pi^{(4)}, \Pi^{(1)}$ の境界線をそれぞれ B_1, B_2, B_3, B_4 で表わすと境界線上の頂点によってそれぞれ

$$B_1 ; \overset{(1)}{P}_{mj} = \overset{(2)}{P}_{mj} \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$
$$B_2 ; \overset{(2)}{P}_{in} = \overset{(3)}{P}_{in} \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$
$$B_3 ; \overset{(3)}{P}_{mj} = \overset{(4)}{P}_{mj} \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$
$$B_4 ; \overset{(4)}{P}_{in} = \overset{(1)}{P}_{in} \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

のように決定される．

この各頂点より均等線に垂線を下しその足を $\overset{(s)}{P}_{mj}, \overset{(s)}{P}_{in}$ に対応して $\overset{(s)}{Q}_{mj}, \overset{(s)}{Q}_{in}$ で示すと，線分 $\overline{\overset{(s)}{P}_{mj} \overset{(s)}{Q}_{mj}}$ 及び $\overline{\overset{(s)}{P}_{in} \overset{(s)}{Q}_{in}}$ の YZ, ZX, XY 各面への正射影の長さはそれぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\overset{(s)}{Z}_{mj} - \overset{(s)}{Y}_{mj}|, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} |\overset{(s)}{X}_{mj} - \overset{(s)}{Z}_{mj}|, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} |\overset{(s)}{Y}_{mi} - \overset{(s)}{X}_{mj}|$$

及び

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\overset{(s)}{Z}_{in} - \overset{(s)}{Y}_{in}|, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} |\overset{(s)}{X}_{in} - \overset{(s)}{Z}_{in}|, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} |\overset{(s)}{Y}_{in} - \overset{(s)}{X}_{in}|$$

で与えられよう．

今此等の大きさに付号を考慮した量 $\overset{(s)}{l}_X(m, j)$, $\overset{(s)}{l}_Y(m, j)$, $\overset{(s)}{l}_Z(m, j)$ 及び $\overset{(s)}{l}_X(i, n)$, $\overset{(s)}{l}_Y(i, n)$, $\overset{(s)}{l}_Z(i, n)$ を次のように表わす．即

$$(61) \quad \begin{cases} \overset{(s)}{l}_X(m, j) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\overset{(s)}{Z}_{mj} - \overset{(s)}{Y}_{mj}), \quad \overset{(s)}{l}_Y(m, j) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\overset{(s)}{X}_{mj} - \overset{(s)}{Z}_{mj}), \\ \qquad \overset{(s)}{l}_Z(m, j) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\overset{(s)}{Y}_{mj} - \overset{(s)}{X}_{mj}) \\ \overset{(s)}{l}_X(i, n) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\overset{(s)}{Z}_{in} - \overset{(s)}{Y}_{in}), \quad \overset{(s)}{l}_Y(i, n) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\overset{(s)}{X}_{in} - \overset{(s)}{Z}_{in}), \\ \qquad \overset{(s)}{l}_Z(i, n) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\overset{(s)}{Y}_{in} - \overset{(\ )}{X}_{in}) \end{cases}$$

更に此等の関数として

$$
(62)\quad \begin{cases} L_Y = \overset{(1)}{l}_Y(m, j_\mu) + \overset{(2)}{l}_Y(m, j_\mu) - \overset{(3)}{l}_Y(m, j_\mu') - \overset{(4)}{l}_Y(m, j_\mu') \\ L_Z = \overset{(1)}{l}_Z(m, j_\mu) + \overset{(2)}{l}_Z(m, j_\mu) - \overset{(3)}{l}_Z(m, j_\mu') - \overset{(4)}{l}_Z(m, j_\mu') \\ L_Y' = \overset{(1)}{l}_Y(i_\mu, n) - \overset{(2)}{l}_Y(i_\mu', n) - \overset{(3)}{l}_Y(i_\mu', n) + \overset{(4)}{l}_Y(i_\mu, n) \\ L_Z' = \overset{(1)}{l}_Z(i_\mu, n) - \overset{(2)}{l}_Z(i_\mu', n) - \overset{(3)}{l}_Z(i_\mu', n) + \overset{(4)}{l}_Z(i_\mu, n) \end{cases}
$$

但し

y_{j_μ} は μ_y より小さい値の中で最も μ_y に近い値をとるものとする．又 y_{j_μ}' は μ_y より大きい値の中で最も μ_y に近い値をとるものとする．同様に x_{i_μ} は μ_x より小さい値の中で最も μ_x に近い値をとり x_{i_μ}' は μ_x より大きい値の中で最も μ_x に近い値をとるものとする．

更に

$$
(63)\quad \begin{cases} M = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sqrt{|\overset{(1)}{l}_Y(m, j) + \overset{(2)}{l}_Y(m, j) - \overset{(3)}{l}_Y(m, j) - (\overset{(4)}{l}_Y m, j)|} \right\} \\ \qquad \times \left\{ \sqrt{|\overset{(1)}{l}_Z(m, j) + \overset{(2)}{l}_Z(m, j) - \overset{(3)}{l}_Z(m, j) - \overset{(4)}{l}_Z(m, j)|} \right\} f_{i\cdot} \\ M' = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sqrt{|\overset{(1)}{l}_Y(i, n) - \overset{(2)}{l}_Y(i, n) - \overset{(3)}{l}_Y(i, n) + \overset{(4)}{l}_Y(i, n)|} \right\} \\ \qquad \times \left\{ \sqrt{|\overset{(1)}{l}_Z(i, n) - \overset{(2)}{l}_Z(i, n) - \overset{(3)}{l}_Z(i, n) + \overset{(4)}{l}_Z(i, n)|} \right\} f_{\cdot j} \end{cases}
$$

とすると次の定理が成立する

定理 5 「L_Z, L_Z, L_Y', L_Z' はそたぞれ次式で与えられる

$$
(64)\quad \begin{cases} L_Y = \dfrac{\sqrt{2}}{\mu_y} \delta_y \\ L_Z = \dfrac{-\sqrt{2}}{\mu_x} \sum_{k=1}^{n} sgn(y_k, \mu_y)(\mu_{x/}y_k - \mu_y) \\ L_Y' = \dfrac{\sqrt{2}}{\mu_y} \sum_{h=1}^{m} sgn(x_h, \mu_x)(\mu_{y/}x_h - \mu_y) \\ L_Z' = \dfrac{-\sqrt{2}}{\mu_x} \delta_x \end{cases}
$$

但し $\delta_x = \sum_{h=1}^{m} |x_h - \mu_x| f_{h\cdot}$, $\delta_y = \sum_{k=1}^{n} |y_k - \mu_y| f_{\cdot k}$ とする．

特に常に x_h 及び y_k が常に正ならば

$$
(65)\qquad L_Y,\ |L_Z|,\ |L_Y'|,\ |L_Z'| \leqq 2\sqrt{2}
$$

が成立する」．

証明 (61) (62) の定義により

$$
\begin{aligned} L_Y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (\overset{(1)}{X}_{mj_\mu} - \overset{(1)}{Z}_{mj_\mu} + (\overset{(2)}{X}_{mj_\mu} - \overset{(2)}{Z}_{mj_\mu}) \right. \\ &\quad \left. - (\overset{(3)'}{X}_{mj_\mu} - \overset{(3)'}{Z}_{mj_\mu}) - (\overset{(4)}{X}_{mj_\mu'} - \overset{(4)}{Z}_{mj_\mu'}) \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}\mu_y} \left\{ \sum_{k=1}^{j_\mu} (\mu_y - y_k) f_{\cdot k} - \sum_{k=j_\mu'} (\mu_v - y_k) f_{\cdot k} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\mu_y} \sum_{k=1}^{n} |y_k - \mu_y| f_{\cdot k} = \frac{\sqrt{2}}{\mu_v} \delta_y \end{aligned}
$$

(64) の他の諸式も同様にして証明出来る．

特に x_k 及び y_k が常に正ならば集中多面体は常に単位立方体内にあろから．

$$|l_X^{(s)}(m,j)|,\ |l_Y^{(s)}(m,j)|,\ |l_Z^{(s)}(m,j)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{又}\quad |l_X^{(s)}(i,n)|,\ |l_Y^{(s)}(i,n)|,\ |l_Z^{(s)}(i,n)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

が成立する．従って (62) の定義から (65) が明かとなる（証明３）．
(63) における M 及び M' は (61) により次のように表現される．

$$(66)\quad M=\frac{2}{\sqrt{\mu_x\mu_y}}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}sgn\,(i,\ k)\,(\mu_y-y_k)f_{\cdot k}}\ \sqrt{|\sum_{k=1}^{n}sgn\,(j,\ k)\,(\mu_{x/yk}-\mu_x)f_{\cdot k}|\ f_{\cdot j}}$$

$$(66')\quad M'=\frac{2}{\sqrt{\mu_x\mu_y}}\sum_{i=1}^{m}\sqrt{\sum_{h=1}^{m}sgn\,(i,\ h)\,(\mu_x-x_h)f_{h\cdot}}\ \sqrt{|\sum_{h=1}^{m}sgn\,(i,h)\,(\mu_{y/}x_h-\mu_y)f_{h\cdot}|\ f_{i\cdot}}$$

補助定理 1 「一般に次の関係が成立する．

$$(67)\qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}sgn\,(i,\ k)\,(\mu_y-y_k)\,f_{\cdot k}f_{\cdot j}=\frac{\Delta_y}{2}$$

$$(67')\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}sgn\,(i,\ h)\,(\mu_x-x_h)\,f_{h\cdot}f_{i\cdot}=\frac{\Delta_x}{2}$$

又

$$(68)\qquad \sum_{j=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}sgn\,(j,\ k)\,(\mu_{x/yk}-\mu_x)f_{\cdot k}|\,f_{\cdot j}\leqq\frac{\Delta_x}{2}+O\left(\sum_{j=1}^{m}f_{i\cdot}^{2}+\sum_{j=1}^{n}f_{\cdot j}^{2}\right)$$

$$(68')\qquad \sum_{i=1}^{m}|\sum_{h=1}^{m}sgn\,(i,\ h)\,(\mu_{y}/x_h-\mu_y)f_{h\cdot}|\,f_{i\cdot}\leqq\frac{\Delta_y}{2}+O\left(\sum_{i=1}^{m}f_{i\cdot}^{2}+\sum_{j=1}^{n}f_{\cdot j}^{2}\right)$$」

証明

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}sgn\,(j,\ k)\,(\mu_y-y_k)f_{\cdot k}f_{\cdot j}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}(\mu_y-y_k)f_{\cdot k}f_{\cdot j}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n}(\mu_y-y_k)f_{\cdot k}f_{\cdot j}$$

ここで第二項について

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=j+1}^{n}(\mu_y-y_k)f_{\cdot k}f_{\cdot j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}(\mu_y-y_k)f_{\cdot k}f_{\cdot j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}(\mu_y-y_j)f_{\cdot k}f_{\cdot j}$$

が成り立つから

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}(y_j-y_k)f_{\cdot k}f_{\cdot j}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|y_j-y_k|f_{\cdot k}f_{\cdot j}=\frac{\Delta_y}{2}$$

同様にして (67′) が得られる．
一方

$$T=\sum_{j=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}sgn\,(j,\ k)\,(\mu_x-\mu_x/y_k)f_{\cdot k}f_{\cdot j}$$

$$\leqq\sum_{j=1}^{n}\left\{|\sum_{k=1}^{j-1}(\mu_{x/}y_k-\mu_x)f_{\cdot k}|+|\sum_{k=j+1}^{n}(\mu_{x/}y_k-\mu_x)f_{\cdot k}|\right\}f_{\cdot j}$$

ここで一般に

$$\sum_{s=1}^{i}\sum_{t=1}^{n}x_sf_{st}\leqq\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{j-1}x_sf_{st}\leqq\sum_{s=i_2}^{m}\sum_{t=1}^{n}x_sf_{st},$$

但し

$$\sum_{s=1}^{i_1}f_s\leqq\sum_{t=1}^{j-1}f_{\cdot t}\leqq\sum_{s=1}^{i_1+1}f_s.$$

$$\sum_{s=i_2+1}^{m} f_{s\cdot} \leqq \sum_{t=1}^{j-1} f_{\cdot t} \leqq \sum_{s=i_2}^{m} f_{s\cdot},$$

が成立することを考えると

$$\sum_{s=1}^{i_1} (x_s - \mu_x) f_{s\cdot} - \mu_x f_{i+1\cdot} \leqq \sum_{t=1}^{j-1} (\mu_{x/} y_t - \mu_x) f_{\cdot t} \leqq \sum_{s=i_2}^{m} (x_s - \mu_x) f_{s\cdot} + \mu_x f_{i\cdot}$$

及び

$$\sum_{s=1}^{i_2-1} (x_s - \mu_x) f_{s\cdot} - \mu_x f_{i_2\cdot} \leqq \sum_{t=j}^{n} (\mu_{x/} y_t - \mu_x) f_{\cdot t} \leqq \sum_{s=i_1+1}^{m} (x_s - \mu_x) f_{s\cdot} + \mu_x f_{i_1+1\cdot}$$

が得られる.
従ってもし

$$\sum_{t=1}^{j-1} (\mu_{x/} y_t - \mu_x) f_{\cdot t} \geqq 0 \text{ ならば } \sum_{t=j}^{n} (\mu_{x/} y_t - \mu_x) f_{\cdot t} \leqq 0$$

故に

$$\left| \sum_{t=1}^{j-1} (\mu_{x/} y_t - \mu_x) f_{\cdot t} \right| \leqq \sum_{s=i_2}^{m} (x_s - \mu_x) f_{s\cdot} + \mu_x f_{i2}$$

$$\left| \sum_{t=j}^{n} (\mu_{x/y t} - \mu_x) f_{\cdot t} \right| \leqq \sum_{s=1}^{i_2-1} (\mu_x - x_s) f_{s\cdot} + \mu_x f_{i2}.$$

逆にもし

$$\sum_{t=1}^{j-1} (\mu_{x/} y_t - \mu_x) f_{\cdot t} \leqq 0 \text{ ならば } \sum_{t=j}^{n} (\mu_{x/} y_t - \mu_x) f_{\cdot t} \geqq 0$$

故に

$$\left| \sum_{t=1}^{j-1} (\mu_{x/} y_t - \mu_x) f_{\cdot t} \right| \leqq \sum_{s=1}^{i_1} (\mu_x - x_s) f_{s\cdot} + \mu_x f_{i_1+1\cdot}$$

且

$$\sum_{t=j}^{n} (\mu_{x/} y_t - \mu_x) f_{\cdot t} \leqq \sum_{s=i_1+1}^{m} (x_s - \mu_x) f_{s\cdot} + \mu_x f_{i_1+1\cdot}$$

結局

$$T \leqq \sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{s=1}^{i-1} (\mu_x - x_s) f_{s\cdot} + \sum_{s=i}^{m} (x_s - \mu_x) f_{s\cdot} \right\} f_{i\cdot} + 2\mu_x \sum_{i=1}^{m} f_{i\cdot}{}^2 + O\left(\sum_{j=1}^{n} f_{\cdot j}{}^2 \right)$$

ここで第二項について

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=i}^{m} (x_s - \mu_x) f_{s\cdot} \} f_{i\cdot} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{s} (x_s - \mu_l) f_{i\cdot} \} f_s = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{i} (x_i - \mu_x) f_{s\cdot} \} f_{i\cdot}$$

を考慮すると,

$$T \leqq \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{i} (x_i - x_s) f_{s\cdot} f_{i\cdot} + O\left(\sum_{i=1}^{m} f_{i\cdot}^2 + \sum_{j=1}^{n} f_{\cdot j}^2 \right)$$

$$= \frac{\Delta_x}{2} + O\left(\sum_{i=1}^{m} f_{i\cdot}^2 + \sum_{j=1}^{n} f_{\cdot j}^2 \right)$$

が得られる.
同様にして (68′) も証明される (証明了).

補助定理 2 「x, y の間に

(69) $$y - \mu_y = \lambda (x - \mu_x)\ ;\ \lambda \neq 0$$

の関係がある時且この時に限り

(70) $$M=M'=\sqrt{\frac{\Delta_x\Delta_y}{\mu_x\mu_y}}$$

が成立する.』

証明 (69) が成立する時 (66) より直ちに

$$M=\frac{2}{\sqrt{|\lambda|\mu_x\mu_y}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}sgn\,(j,\ k)\,(\mu_y-y_k)f_{\cdot k}f_{\cdot j}$$

が得られる.

從って Lemma 1 により

$$M=\frac{\Delta_y}{\sqrt{|\lambda|\mu_x\mu_y}}$$

処で一方 (69) が成立すれば

$$\Delta_v=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|y_j-y_k|f_{\cdot j}f_{\cdot k}=|\lambda|\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}|x_i-x_h|f_{i\cdot}f_{k\cdot}=|\lambda|\Delta_x$$

となるから結局

$$M=\sqrt{\frac{\Delta_x\Delta_y}{\mu_x\mu_y}}$$

が成立する. M' についても同様である. (証明了)

以上の補助定理から，次の定理が得られる.

定理 6 『M, M' は一般に次の関係を満足する. 即

(71) $$0\leqq M,\ M'\leqq\sqrt{\frac{\Delta_x\Delta_y}{\mu_x\mu_y}}+O\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}f_{i\cdot}^2+\sum_{j=1}^{n}f_{\cdot j}^2}\right)$$

特に x, y が完全直線相関々係にあれば

(72) $$M=M'=\sqrt{\frac{\Delta_x\Delta_y}{\mu_x\mu_y}}$$

が成立し逆に x, y が独立ならば

(73) $$M=M'=0$$

である』

証明 (66) に Schwarz の不等式を適用すれば

$$M\leqq\frac{2}{\sqrt{\mu_x\mu_y}}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}sgn\,(j,\ k)\,(\mu_y-y_k)f_{\cdot k}f_{\cdot j}}$$
$$\times\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}sgn\,(j,\ k)\,(\mu_{x/y_k}-\mu_x)f_{\cdot k}\right|f_{\cdot j}}$$

が成立する. 従って，補助定理 1 により

$$M=\sqrt{\frac{\Delta_x\Delta_y}{\mu_x\mu_y}}$$

となる. M' についても同様である

又，補助定理 2 により (68) の成立は明かである.

更に今 x, y が独立ならば

$$\sum_{k=1}^{n}sgn\,(j,\ k)\,(\mu_{x/y_k}-\mu_x)f_{\cdot k}=0$$

となるから (73) が成立する. (証明了)

§ 2 二次元平均差及び二次元集中係数の諸定義と性質

屢々 Gini の名を冠される一次元の平均差は各測定値或はその代表値 x_h, $h=12\cdots m$ の相対度数を f_h とした時

$$\Delta_x=\sum_{h=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}|x_h-x_s|f_hf_s \tag{74}$$

で定義されるが，これを二次元の場合に拡張する場合には多様な形式が考えられる．以下其等を個別的に解明する．

[A] 第一種二次元平均差と集中係数

定義 3 『第一種二次元平均差 $\overset{(1)}{\Delta}_{xy}$ を第一表に基づいて次のように定義する．即

$$\overset{(1)}{\Delta}_{xy}=\sum_{\substack{h,i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum sgn(h,s)\,sgn(j,t)\begin{vmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{vmatrix}f_{hk}f_{ij}f_{st} \tag{75}$$

ここで

$$sgn\,x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases} \tag{76}$$

である．

又これに対する二つの擬似平均差 Δ_{xy}', Δ_{xy}'' を次のように定義する．

$$\Delta_{xy}'=\sum_{\substack{(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)<0\\h,i,s=12\cdots n\\k,j,t=12\cdots n}}\cdots\sum\left|det\begin{pmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{pmatrix}\right|f_{hk}f_{ij}f_{st} \tag{77}$$

$$\Delta_{xy}''=\sum_{\substack{(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)\leqq 0\\h,i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots n}}\cdots\sum\left|det\begin{pmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{pmatrix}\right|f_{hk}f_{ij}f_{st} \tag{78}$$

(77) (78) の両式はそれぞれ第一及び第二擬似平均差として区別することが出来る』

この時容易に次の補助定理が得られる．

補助定理 3 『Δ_{xy}' 及び $\Delta_{xy}'-\Delta_{xy}''$ は次のように表現される．即

$$\Delta_{xy}=2\sum_{\substack{(h-s)(j-t)>0\\(i-s)(k-t)<0\\h,i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum\begin{vmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{vmatrix}f_{hk}f_{ij}f_{st} \tag{79}$$

$$\Delta_{xy}''-\Delta_{xy}'=2\sum_{(i-s)(k-t)=0}\cdots\sum|x_h-x_s|\,|y_j-y_t|f_{hk}f_{ij}f_{st}\text{』} \tag{80}$$

証明 (79) 式は

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}'=&\sum_{\substack{(h-s)(j-t)>0\\(i-s)(k-t)<0}}\cdots\sum\begin{vmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{vmatrix}f_{hk}f_{ij}f_{st}\\&-\sum_{\substack{(h-s)(j-t)<0\\(i-s)(k-t)>0}}\cdots\sum\begin{vmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-x_t\end{vmatrix}f_{hk}f_{ij}f_{st}\end{aligned} \tag{81}$$

であるから第二項の行列式の列を入れかえ且置換 (h,i) (k,j) を行なえば直ちに得られる．

又 (80) 式は

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}''-\Delta_{xy}'&=\sum_{(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)=0}\cdots\sum\left|det\begin{pmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{pmatrix}\right|f_{hk}f_{ij}f_{st}\\&=\sum_{(h-s)(j-t)=0}\cdots\sum\ \text{〃}\ +\sum_{(k-t)(t-s)=0}\cdots\sum\ \text{〃}\end{aligned} \tag{82}$$

であるから第一項について上記と同様な変換を行うことによって得られる．（証明了）

扨 $\overset{(1)}{\Delta}_{xy}$, Δ_{xy}', Δ_{xy}'' の間には次の関係が成立する．

定理 7 『一般に $\overset{(1)}{\Delta}_{xy}$ は $\Delta_{xy}{}'$ と $\Delta_{xy}{}''$ の算術平均で与えられる．即

(83) $$\overset{(1)}{\Delta}_{xy}=\frac{\Delta_{xy}{}'+\Delta_{xy}{}''}{2}$$

が成立する』

証明

$$\sum_{\substack{(h-s)(j-t)>0\\(t-s)(k-t)>0\\h,i,s=1,2,\cdots m\\k,j,t=1,2\cdots m}}\cdots\sum\begin{vmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{vmatrix}f_{hk}f_{ij}f_{st}=0$$

等を考えると (81) 式から

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}{}' &= \sum_{\substack{(h-s)(j-t)<0\\(i-s)(k-t)\geqq 0}}\cdots\sum\begin{vmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{vmatrix}f_{hk}f_{ij}f_{st}\\ &= \sum_{\substack{(h-s)(j-t)<0\\(t-s)(k-t)\geqq 0}}\cdots\sum \quad \text{〃}\\ &= \sum_{\substack{h,i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,m}}\cdots\sum sgn\{(h,s)\,sgn(j,t)\}\begin{vmatrix}x_h-x_s & x_i-x_s\\ y_k-y_t & y_j-y_t\end{vmatrix}f_{hk}f_{ij}f_{st}\\ &\quad -\sum_{(i-s)(k-t)=0}\cdots\sum|x_h-x_s||y_j-y_t|f_{hk}f_{ij}f_{st}\\ &= \overset{(1)}{\Delta}_{xy}-\frac{\Delta_{xy}{}''-\Delta_{xy}{}'}{2}\end{aligned}$$

これによって (83) が得られる．(証明了)

定理 7 と系 1 (47) 式を併せ考えると

系 2 『一般に

(84) $$\Delta''-\Delta'=O\left(\sum_{i=1}^{m}f_{i\cdot}^{2}+\sum_{j=1}^{m}f_{\cdot j}^{2}\right)$$

従って又

(85) $$\overset{(1)}{\Delta}_{xy}=\Delta'+O\left(\sum_{i=1}^{m}f_{i\cdot}^{2}+\sum_{j=1}^{n}f_{\cdot j}^{2}\right)=4\mu_x\mu_y U+O\left(\sum_{i=1}^{m}f_{i\cdot}^{2}+\sum_{j=1}^{n}f_{\cdot j}^{2}\right)$$

が成立する．

扨 $\overset{(1)}{\Delta}_{xy}$ の性質に関しては次の関係が認められる．

定理 8 『もし，x, y が独立ならば

(86) $$\overset{(1)}{\Delta}_{xy}=\frac{3}{4}\Delta_x\Delta_y$$

であり，又 x, y が単調増大又は減少の関数関係にあれば

(87) $$\overset{(1)}{\Delta}_{xy}=0$$

となる』．

証明，もし x, y が独立ならば定義から直ちに

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}=&\sum_{h,s=1,2,\cdots,m}\sum|x_h-x_s|f_{h\cdot}f_{s\cdot}\sum_{j,t=1,2,\cdots,n}\sum|y_j-y_t|f_{\cdot j}f_{\cdot t}\\ &-\sum_{h,s=1,2,\cdots,m}\sum sgn(h,s)(\mu_x-x_s)f_{h\cdot}f_{s\cdot}\sum_{k,t=1,2,\cdots,n}\sum sgn(k,t)(\mu_y-y_t)f_{\cdot k}f_{\cdot t}\end{aligned}$$

ここで一次元平均差の定義により

$$\sum_{h,s=1,2,\cdots,m}\sum|x_h-x_s|f_{h\cdot}f_{s\cdot}=\Delta_x,\quad \sum_{k,t=1,2,\cdots,n}\sum|y_j-y_t|f_{\cdot j}f_{\cdot t}=\Delta_y$$

であり，他方

$$\sum_{h,s=1,2,\cdots,m}\sum sgn(h,s)(\mu_x-x_s)f_{h\cdot}f_{s\cdot}=\sum_{h=1}^{m}\sum_{s=1}^{h-1}(\mu_x-x_s)f_{h\cdot}f_{s\cdot}+\sum_{h=1}^{m}\sum_{s=h+1}^{m}(x_s-\mu_x)f_{h\cdot}f_{s\cdot}$$

となる．処でこの第二項は

$$\sum_{h=1}^{m}\sum_{s=h+1}^{m}(x_s-\mu_x)f_{h\cdot}f_{s\cdot}=\sum_{s=1}^{m}\sum_{h=1}^{s-1}(x_s-\mu_x)f_{h\cdot}f_{s\cdot}=\sum_{h=1}^{m}\sum_{s=1}^{h-1}(x_h-\mu_x)f_{h\cdot}f_{s\cdot}$$

となるからこれを上式に代入すると

$$\sum_{h,s=1,2,\cdots,m}\sum sgn(h,s)(\mu_x-x_s)f_{h\cdot}f_{s\cdot}=\sum_{h=1}^{m}\sum_{s=1}^{h-1}(x_h-x_s)f_{h\cdot}f_{s\cdot}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{h=1}^{m}\sum_{s=1}^{h-1}(x_h-x_s)f_{h\cdot}f_{s\cdot}+\sum_{h=1}^{m}\sum_{s=h+1}^{m}(x_s-x_h)f_{h\cdot}f_{s\cdot}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}|x_h-x_s|f_{h\cdot}f_{s\cdot}=\frac{\varDelta_x}{2}$$

同様にして

$$\sum_{k,t=1,2,\cdots,n}\sum sgn(k,t)(\mu_y-y_t)f_{\cdot k}f_{\cdot t}=\frac{\varDelta_y}{2}$$

となり結局 (86) 式が成立する．

又 x, y が単調な関数関係にあれば常に

$$(x_h-x_s)(x_i-x_s)(y_k-y_t)(y_j-y_t)>0$$

従って

$$(h-s)(i-s)(k-t)(j-t)>0$$

であるから．

$$\varDelta_{xy}'=\varDelta_{xy}''=0$$

従って又定理7により (87) が成立する．(証明了)

更に [5] Proposition 33 の証明と全く同様にして Schwarz の不等式を反復して適用すると

定理 9 「x, y に関する標準偏差をそれぞれ σ_x, σ_y とすると一般に

(88) $$0\leqq\varDelta_{xy}\leqq 2\sigma_x\sigma_y$$

が成立する.」

扨，次に集中度を考察することにする．

定義 4 「二次元集中係数 G_{xy} 及び二次元擬似集中係数 G_{xy}' を次のように定義する．即

(89) $$G_{xy}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\overset{(1)}{\varDelta}_{xy}}{\mu_x\mu_y}}$$

(90) $$G_{xy}'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varDelta_{xy}'}{\mu_x\mu_y}}$$ 」

この時，次の関係が成立する．

定理 10 「二次元集中係数 G_{xy} 及び擬似集中係数 G_{xy}' と二次元集中多面体が確定する体積 U との間に次の関係が成立する．即

(91) $$|U-G_{xy}^2|\leqq\frac{\varDelta_{xy}''-\varDelta_{xy}}{2}=\overbrace{\sum_{(i-s)(k-t)=0}\cdots\sum}^{\leqq 5}|x_h-x_s||y_j-y_t|f_{hk}f_{ij}f_{st}$$

(92) $$G_{xy}'^2<U$$

従って特に x, y が常に正ならば

(93) $$0\leqq G_{xy}'\leqq 1$$

が成立する.」

証明 (91) (92) の両式は定義4，定理2 (45) 式及び定理7 (83) 式から明かである．更に定理1を考慮すれば (89) 式を得ることが出来る (証明了)．

系 3 「一般に

(94) $$G_{xy}^2 = G_{xy}'^2 + O\left(\sum_{i=1}^{m} f_{i\cdot}^2 + \sum_{j=1}^{n} f_{\cdot j}^2\right)$$

及び

(95) $$G_{xy}^2 = U + O\left(\sum_{i=1}^{m} f_{i\cdot}^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} f_{\cdot j}^2\right)\right.$$

が成立する．特に x, y が正値ならば

(96) $$O \leqq G_{xy} \leqq 1 + O\left(\sqrt{\sum_{t=1}^{m} f_{i\cdot}^2 + \sum_{j=1}^{n} f_{\cdot j}^2}\right)$$

となる』．

この証明は系1及び系2に照して明かである．

[B] 第2種二次元平均差

定義 5 『第2種二次元平均差 $\stackrel{(2)}{\varDelta}_{xy}$ を次式によって定義する．

(97) $$\stackrel{(2)}{\varDelta}_{xy} = \begin{vmatrix} \varDelta_x & \mathrm{codif}^{(1)}(x, y) \\ \mathrm{codi\,f}^{(1)}(y, x) & \varDelta_y \end{vmatrix}$$

ここで

(98) $$\mathrm{codif}^{(1)}(x, y) = \sum_{\substack{h,i=1,2,\cdots,m \\ k,j=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum sgn(k, j)\ (x_h - x_i) f_{hk} f_{ij}$$

(98′) $$\mathrm{codfi}^{(1)}(y, x) = \sum_{\substack{h,i=1,2,\cdots,m \\ k,j=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum sgn(h, i)\ (y_k - y_i) f_{hk} f_{ij}$$

である』．

この時定理4, 5に対応して次の関係が成立する．

定理 11 『もし x, y が独立ならば

(99) $$\stackrel{(2)}{\varDelta}_{xy} = \varDelta_x \varDelta_y$$

又もし x, y が単調増大又は減少の関数関係にあるならば

(100) $$\stackrel{(2)}{\varDelta}_{xy} = 0$$

が成立する．

又一般に

(101) $$0 \leqq \stackrel{(2)}{\varDelta}_{xy} \leqq 2\varDelta_x \varDelta_y \text{*3)}$$

である』．

証明，x, y が独立ならば

$$\mathrm{codif}^{(1)}(x, y) = \mathrm{codif}^{(1)}(y, x) = 0$$

従って (99) 式が成立する．他方，x, y が単調増大又は減少の関数関係にあれば

$$\mathrm{codif}^{(1)}(x, y)\,\mathrm{codif}^{(1)}(y, x) = \sum_{\substack{h,i=1,2,\cdots,m \\ k,j=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum |x_h - x_i| f_{hk} f_{ij} \cdot \sum_{\substack{h,i=1,2,\cdots,m \\ k,j=1,2,\cdots,n}}\sum\sum\sum |y_k - y_j| f_{hk} f_{ij}$$
$$= \varDelta_x \varDelta_y$$

となり (100) が成立する．更に一般に

$$\mathrm{codif}^{(1)}(x, y) \leqq \sum_{h,i=1,2,\cdots,m}\sum |x_h - x_i| f_{h\cdot} f_{i\cdot} = \varDelta_x$$
$$\mathrm{codif}^{(1)}(y, x) \leqq \sum_{k,j=1,2,\cdots,n}\sum |y_k - y_j| f_{\cdot k} f_{\cdot j} = \varDelta_y$$

であるから (101) 式が成立する．(証明了)

扨，定理3の (52)，(53) 両式を考慮すると定義5の (98)，(98′) 両式について次の関係が成立する．

---

*3) (97) 式の代りに $\stackrel{(2)*}{\varDelta}_{xy} = \begin{vmatrix} \varDelta_x & |\mathrm{codif}^{(1)}(x, y)| \\ |\mathrm{codif}^{(1)}(y, x)| & \varDelta_y \end{vmatrix}$ を定義すれば常に $0 \leqq \stackrel{(2)*}{\varDelta}_{xy} \leqq \varDelta_x \varDelta_y$ が成立する．

定理 12 「codif$^{(1)}$ (x, y) 及び codif$^{(1)}$ (y, x) は次の関係をみたす．

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{codif}^{(1)}(x, y)=\mu_x\{\overset{(1)}{H}_{SZ}-\overset{(2)}{H}_{SZ}-\overset{(3)}{H}_{SZ}+\overset{(4)}{H}_{SZ}\} \\ \mathrm{codif}^{(1)}(y, x)=\mu_y\{\overset{(1)}{H}_{SZ}+\overset{(2)}{H}_{SZ}-\overset{(3)}{H}_{SZ}-\overset{(4)}{H}_{SZ}\}\end{array}\right. \tag{102}$$

一方，Δ_x, Δ_y は次の関係を有する．

$$\begin{array}{l}\Delta_x=\mu_x\{-\overset{(1)}{H}_{SZ}-\overset{(2)}{H}_{SZ}+\overset{(3)}{H}_{SZ}+\overset{(4)}{H}_{SZ}\}+O(f_{\cdot 1}^2+f_{\cdot n}^2) \\ \Delta_y=\mu_y\{-\overset{(1)}{H}_{SY}+\overset{(2)}{H}_{SY}+\overset{(3)}{H}_{SY}-\overset{(4)}{H}_{SY}\}+O(f_{1\cdot}^2+f_{m\cdot}^2)\end{array} \tag{102'}$$

これは [5] の Proposition 24 及び Proposition 40 に対応する関係であり $\overset{(2)}{\Delta}_{xy}$ に一つの幾何学的意味を与えるものである．

[c]　第3種二次元平均差

定義 6 「第3種二次元平均差 $\overset{(3)}{\Delta}_{xy}$ を次式によって定義する．即

$$\overset{(3)}{\Delta}_{xy}=\left|\begin{array}{cc}\Delta_x & \mathrm{codif}^{(2)}(x, y) \\ \mathrm{codif}^{(2)}(y, x) & \Delta_y\end{array}\right| \tag{103}$$

ここで

$$\mathrm{codif}^{(2)}(x, y)=2\sum_{h=1}^{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} sgn(i, h)(x_i-\mu_x)f_{i\cdot}}\sqrt{\left|\sum_{i=1}^{m} sgn(i, h)(\mu_{y/xi}-\mu_i)f_{i\cdot}\right|f_{h\cdot}} \tag{104}$$

$$\mathrm{codif}^{(2)}(y, x)=2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} sgn(j, k)(y_j-\mu_y)f_{\cdot j}}\sqrt{\left|\sum_{j=1}^{n} sgn(j, k)(\mu_{x/}y_j-\mu_x)f_{\cdot j}\right|f_{0k}} \tag{104'}$$

である．但 (μ_{y/x_i}, μ_{x/y_j} はそれぞれ x_i における y の条件附平均及び y_j における x の条件附平均を示すものとする」．

この場合 (66) 及び (66′) 両式に対する定理 6 の成立と全く同様な証明法により [5] Proposition 41 に対応する次の定理が得られる．

定理 13 「もし x, y が独立ならば

$$\overset{(3)}{\Delta}_{xy}=\Delta_x\Delta_y \tag{105}$$

が成立する．一方，x, y が完全直線相関々係にあれば

$$\overset{(3)}{\Delta}_{xy}=0 \tag{106}$$

となる．又一般に

$$0\leqq\overset{(3)}{\Delta}_{xy}\leqq\Delta_x\Delta_y+O\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}f_{i\cdot}^2+\sum_{j=1}^{n}f_{\cdot j}^2}\right) \tag{107}$$

が成立する」．

codif$^{(2)}$ (x, y) 及び codif$^{(2)}$ (y, x) の幾何学的意味は (66) (66′) と (104) 及び (104′) を比較した場合

$$\mathrm{codif}^{(2)}(y, x)=\sqrt{\mu_x\mu_y}\,M \tag{108}$$

$$\mathrm{codif}^{(2)}(x, y)=\sqrt{\mu_x\mu_y}\,M' \tag{108'}$$

が得られることによって端的に知ることが出来る．

以上三種の平均差をもって二次元平均差の代表的なものとすることが出来よう．

§3　二次元平均偏差の定義と性質

一次元の平均偏差 δ_x は §2 の当初の記号を用いると

(109) $$\delta_x=\sum_{i=1}^{m}|x_i-\mu_x|f_i$$

で定義されるが，この場合も二次元への次のような拡張が考えられる．

定義 7 『二次元平均偏差 δ_{xy} を第1表により次のように定義する．

(110) $$\delta_{xy}=\begin{vmatrix}\delta_x & \mathrm{codev}\,(x,\ y)\\ \mathrm{codev}\,(y,\ x) & \delta_y\end{vmatrix}$$

ここで

(111) $$\mathrm{codev}\,(x,\ y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}sgn\,(y_j,\ \mu_y)\,(x_i-\mu_x)f_{ij},$$

(111′) $$\mathrm{codev}\,(y,\ x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}sgn\,(x_i,\ \mu_x)\,(y_j-\mu_y)f_{ij}.$$』

この時 δ_{xy} は定理3と全く同様な証明過程により次のように表現される．即

定理 14 『δ_{xy} は次の関係をみたす．

(112) $$\delta_{xy}=\frac{\delta_{xy}'+\delta_{xy}''}{2},$$

ここで

(113) $$\delta_{xy}'=\sum_{(x_h-\mu_x)(x_i-\mu_x)(y_k-\mu_y)(y_j-\mu_y)<0}\sum\sum\sum\left|\det\begin{pmatrix}x_h-\mu_y & x_i-\mu_x\\ y_k-\mu_y & y_j-\mu_y\end{pmatrix}\right|f_{hk}f_{ij}$$

及び

(114) $$\delta_{xy}''=\sum_{(x_h-\mu_x)(x_i-\mu_x)(y_h-\mu_y)(y_j-\mu_y)\leq 0}\sum\sum\sum\left|\det\begin{pmatrix}x_h-\mu_x & x_i-\mu_x\\ y_k-\mu_y & y_j-\mu_y\end{pmatrix}\right|f_{hk}f_{ij}$$

である．

更に定理7と全く同様な証明過程により次の関係が得られる．

定理 15 『もし $x,\ y$ が独立ならば

(115) $$\delta_{xy}=\delta_x\delta_y$$

となり，又 $x,\ y$ が単調増大又は減少の関数関係にあれば

(116) $$\delta_{xy}=0$$

が成立する．一般に

(117) $$0\leqq\delta_{xy}\leqq 2\,\delta_x\delta_y\ ^{*4)}$$

である』．

処で§1 [D] 定理5によれば

定理 16 『δ_x, δ_y, codev $(x,\ y)$, codev $(y,\ x)$ はそれぞれ次のように幾何学的量と関係する．

(118) $$\begin{cases}\delta_x=-\dfrac{\mu_x}{\sqrt{2}}L_Z',\quad \delta_y=\dfrac{\mu_y}{\sqrt{2}}L_Y\\[2ex] \mathrm{codev}\,(x,\ y)=-\dfrac{\mu_x}{\sqrt{2}}L_Z,\quad \mathrm{codev}\,(y,\ x)=\dfrac{\mu_y}{\sqrt{2}}L_Y'.\end{cases}$$』

扨，一次元の場合の相対平均偏差[*5] (relative mean deviation) T_x 即

(119) $$T_x=\frac{\sum_{i=1}^{m}|x_i-\mu_x|f_i.}{2\,\mu_x}$$

---

*4) 今 (110) 式の代りに $\overset{*}{\delta}_{xy}=\begin{vmatrix}\delta_x & |\mathrm{codev}\,(x,\ y)|\\ |\mathrm{codev}\,(x,\ y)| & \delta_x\end{vmatrix}$ を定義すれば明かに $0\leqq\overset{*}{\delta}_{xy}\leqq\delta_x\delta_y$ となる．

*5) 例えば Yaakov Kondor: An old new measure of income inequality, Econometrica, Vol. 39, No. 6 (November, 1971) をみよ．

を考慮すると，Gini 集中係数と同様に正値分布に於ては

(120) $$T_x \leqq 1$$

の成立が知られている．今 T_x を二次元の場合に拡張することを試みる．

定義 9 『二次元相対平均偏差 T_{xy} 及び $\overset{*}{T}_{xy}$ を次のように定義する．

(121) $$T_{xy} = \frac{\delta_{xy}}{4\mu_x\mu_y}, \quad \overset{*}{T}_{xy} = \frac{\overset{*}{\delta}_{xy}}{4\mu_x\mu_y}$$

この時定理15の (117) 式とその註及び (120) 式とにより次の定理が得られる．

定理 17 「x, y が常に正ならば

(122) $$0 \leqq T_{xy} \leqq 2$$

及び

(122′) $$0 \leqq \overset{*}{T}_{xy} \leqq 1$$

が成立する』．

§ 4 平均差を基礎にした曲線相関係数の諸定義と性質

§2の諸結果から幾つかの曲線及び直線相関係数を与えることが出来るが，その為に予め次の符号決定に有効な測度 $\Theta_{xy:\Delta}$ の性質を知る必要がある．

定義 10 『$\Theta_{xy:\Delta}$ を定義5 (98) 及び (98′) 式で与えた $\mathrm{codif}^{(1)}(x, y)$，$\mathrm{codif}^{(1)}(y, x)$ により次のように定義する．

(123) $$\Theta_{xy:\Delta} = \frac{1}{2}\left\{\Delta_y \,\mathrm{codif}^{(1)}(x, y) + \Delta_x \,\mathrm{codif}^{(1)}(y, x)\right\}$$

この時定義5及び定理7の証明から殆ど直ちに次の定理が得られる．

定理 18 「$\Theta_{xy:\Delta}$ は常に次の関係をみたす．即

(124) $$-\Delta_x\Delta_y \leqq \Theta_{xy:\Delta} \leqq \Delta_x\Delta_y$$

特に x, y が独立ならば

(125) $$\Theta_{xy:\Delta} = 0$$

であり，x, y が単調増大な関数関係にあれば

(126) $$\Theta_{xy:\Delta} = \Delta_x\Delta_y$$

逆に x, y が単調減少な関数関係にあれば

(127) $$\Theta_{xy:\Delta} = -\Delta_x\Delta_y$$

となる』．

$\Theta_{xy:\Delta}$ の幾何学的意味については §1 [C] 定理4の (58) により

$$\Theta_{xy} = -2\sum_{i=1}^{4} \overset{(i)}{H}_{SY} \overset{(i)}{H}_{SZ} + O(f_{1\cdot}^2 + f_{m\cdot}^2 + f_{\cdot 1}^2 + f_{\cdot n}^2)$$

であることが容易に得られる．

扨，以上の性質に基づいて各種の相関係数を定義することにしよう．

[A] 平均差に基づく第1種の曲線相関係数

定義 11 『平均差に基づく第1種の曲線相関係数 $\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\Delta}$ を次のように定義する．

(128) $$\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\Delta} = \pm\left|1 - \frac{\Delta_{xy}}{3\Delta_x\Delta_y}\right|^{1/3}$$ *6)

ここで符号は $\Theta_{xy:\Delta}$ の符号により決定される』

この時定理8, 9及び定理18により次の定理が直ちに得られる．即

定理 19 『もし x, y が独立ならば

*6) ここで立方根を用いたのは $\overset{(1)}{\Delta}_{xy}$ が§2で述べたように体積 U と一定の関係をもつからである．

(129)
$$\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\Delta}=0$$
である．

又 x, y が単調増大．又は単調減少な関数関係にあればそれぞれ

(130)
$$\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\Delta}=1$$
及び

(131)
$$\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\Delta}=-1$$
が成立する．

[B] 平均差に基づく第２種の曲線相関係数

定義 12 『平均差に基づく第２種の曲線相関係数 $\overset{(2)}{\gamma}_{xy:\Delta}$ を次のようり定義する．

(132)
$$\overset{(2)}{\gamma}_{xy:\Delta}=(sgn\,\Theta_{xy:\Delta})\sqrt{\left|1-\frac{\overset{(2)}{\Delta}_{xy}}{\Delta_x\Delta_y}\right|}^{\,*7)}=(sgn\,\Theta_{xy:\Delta})\sqrt{1-\frac{\overset{(2)}{\Delta}_{xy}{}^{*}}{\Delta_x\Delta_y}}$$

この時定理 11 及び 18 から次の関係が成立成立する．

定理 20 『$\overset{(2)}{\gamma}_{xy:\Delta}$ は次のように表理される．

(133)
$$\overset{(2)}{\gamma}_{xy:\Delta}=(sgn\,\Theta_{xy:\Delta})\sqrt{\frac{|\mathrm{codif}\,f^{(1)}(x,y)\,\mathrm{codif}\,f^{(1)}(y,x)|}{\Delta_x\Delta_y}}$$

又 $\overset{(2)}{\gamma}_{xy:\Delta}$ は x, y が独立の場合

(134)
$$\overset{(2)}{\gamma}_{xy}=0$$
となる．一方 $\overset{(2)}{\gamma}_{xy}$ は x, y が単調増大或は単調減少な関数関係にあるかに応じて

(135)
$$\overset{(2)}{\gamma}_{xy}=1$$
或は

(135′)
$$\overset{(2)}{\gamma}_{xy}=-1$$
となる．更に一般に

(136)
$$-1\leqq\overset{(2)}{\gamma}_{xy:\Delta}\leqq1$$
が成立する．

[C] 平均差に基づく第３種の曲線相関係数

定義 13 『平均差に基づく第３種の曲線相関係数 $\overset{(3)}{\gamma}_{xy:\Delta}$ を次のように定義する．

(137)
$$\overset{(3)}{\gamma}_{xy:\Delta}=\frac{1}{2}(sgn\,\Theta_{xy:\Delta})\left\{\frac{|\mathrm{codif}^{(1)}(x,y)|}{\Delta_x}+\frac{|\mathrm{codif}^{(1)}(y,x)|}{\Delta_y}\right\}$$

この場合定理 11 及び
$$|\mathrm{codif}^{(1)}(x,y)|\leqq\Delta_x,\quad|\mathrm{codif}^{(1)}(y,x)|<\Delta_y$$
を考えると次の定理が得られる．

定理 21 『$\overset{(3)}{\gamma}_{xy:\Delta}$ は次のように表現される．

(138)
$$\frac{\Theta_{xy}}{\Delta_x\Delta_y}\leqq\overset{(3)}{\gamma}_{xy:\Delta}$$

又 $\overset{(3)}{\gamma}_{xy:\Delta}$ は x, y が独立の場合

(139)
$$\overset{(3)}{\gamma}_{xy:\Delta}=0$$
となる．一方 x, y が単調増大又は単調減少な関数関係にある時それぞれ

(140)
$$\overset{(3)}{\gamma}_{xy:\Delta}=1$$
及び

(140′)
$$\overset{(3)}{\gamma}_{xy:\Delta}=-1$$

---

*7) 根号は $\overset{(2)}{\Delta}_{xy}$ が §2 [13] 定理 12 で述べたように面積の二乗を示す量だからである．

となる．更に一般に

(141) $$-1 \leqq \overset{(3)}{\gamma}_{xy:\Delta} \leqq 1$$

が成立する』．

§5 平均偏差を基礎とした曲線相関係数の諸定義と性質

§3の結果から我々は次のような曲線相関係数を与えることが出来る．

[A] 平均偏差に基づく第1種の曲線相関係数

定義 14 『平均偏差に基づく第1種の曲線相関係数 $\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\delta}$ を次のように定義する．

(142) $$\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\delta} = \pm\sqrt{\left|1-\frac{\delta_{xy}}{\delta_x \delta_y}\right|} = \pm\sqrt{1-\frac{\delta_{xy}{}^*}{\delta_x \delta_y}}$$

ここで符号は

(143) $$\Theta_{xy:\delta} = \frac{1}{2}\{\delta_y \operatorname{codev}(x, y) + \delta_x \operatorname{codev}(y, x)\}$$

の符号によるものとする』

この時定理15により，$\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\delta}$ は次の諸関係をみたす．

定理 22 『もし x, y が独立ならば

(144) $$\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\delta} = 0$$

が成立する．他方 x, y が単調増大又は単調減少な関数関係にあるかに応じて

(145) $$\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\delta} = 1$$

又は

(145′) $$\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\delta} = -1$$

となる．』

この係数は然し曲線相関のそれとして極く大摑みな性質のものである．それは例えば y が x に対し，一意的にきまる場合のみでなく

(146) $$y-\mu_y = \lambda_1(x-\mu_x)$$

及び

(146′) $$y-\mu_y = \lambda_2(x-\mu_x)$$
$$\lambda_1,\ \lambda_2 \geqq 0$$

の間に (x, y) が観測される場合にも $\delta_{xy}=0$ 従って $\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\delta}=1$ となるからである．

[B] 平均偏差に基づく第2種の曲線相関係数

定義 15 『平均偏差に基づく第2種の曲線相関係数 $\overset{(2)}{\gamma}_{xy:\delta}$ を次のように定義する．

(147) $$\overset{(2)}{\gamma}_{xy:\delta} = \frac{1}{2}(sgn\ \Theta_{xy:\delta})\left\{\frac{|\operatorname{codev}(x, y)|}{\delta_x} + \frac{|\operatorname{codev}(y, x)|}{\delta_y}\right\}$$

この $\gamma^{(2)}$ に対しては，容易に定理22と同様な関係にあることを知ることが出来よう．

§6 平均差に基づく直線相関係数の定義と性質

直線相関係数に関しては §2 [C] における $\overset{(3)}{\Delta}_{xy}$ の性質により次のように定義することが出来る．

定義 16 『平均差に基づく直線相関係数 $\rho_{xy:\Delta}$ を次のように定義する．即

(148) $$\rho_{xy:\Delta} = (sgn\ \Theta_{xy:\Delta})\left\{1-\frac{\overset{(3)}{\Delta}_{xy}}{\Delta_x \Delta_y}\right\}$$ 』

この時定理13から直ちに次の定理が得られる．

定理 23『$\rho_{xy:\Delta}$ は次のように表現される．即

(149) $$\rho_{xy:\Delta}=(sgn\,\Theta_{xy:\Delta})\frac{\mathrm{codif}^{(2)}(x,y)\,\mathrm{codif}^{(2)}(y,x)}{\Delta_x\Delta_y}.$$

もし x, y が完全正又は完全負直線相関々係にあるならば，それぞれ

(150) $$\rho_{xy:\Delta}=1$$

及び

(150′) $$\rho_{xy:\Delta}=-1$$

となる．又 x, y が独立ならば

(151) $$\rho_{xy:\Delta}=0$$

である．更に一般に

(152) $$-1\leqq\rho_{xy:\Delta}+O\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}f_{i\cdot}^{2}+\sum_{j=1}^{n}f_{\cdot j}^{2}}\right)\leqq 1$$

が成立する．』

平均偏差を基礎にした相関係数については，見出すことが困難である．

§7 各種の相関比について

平均差及び平均偏差に基づく相関比を我々は次の二つの定義で与えることが出来る．

定義 17 『平均差に基づく y の x に関する相関比 $\eta_{y0x;\Delta}$ を次のように定義する．

(153) $$\eta_{y\cdot x;\Delta}=\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}|\mu_{y/x_h}-\mu_{y/x_i}|f_{h\cdot}f_{i\cdot}/\Delta_y$$

同様にして x の y に関する相関比 $\eta_{x\cdot y;\Delta}$ は

(153′) $$\eta_{x\cdot y;\Delta}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\mu_{x/y_k}-\mu_{x/y_j}|f_{\cdot k}f_{\cdot j}/\Delta_x$$

である．

定義 18 『平均偏差に基づく y の x に関する相関比 $\eta_{y\cdot x;\delta}$ を次のように定義する．即

(154) $$\eta_{y\cdot x;\delta}=\sum_{i=1}^{m}|\mu_{y/x_i}-\mu_y|f_{i\cdot}/\delta_y$$

又 x の y に関する相関比 $\eta_{x\cdot y;\delta}$ は

(154′) $$\eta_{x\cdot y;\delta}=\sum_{j=1}^{n}|\mu_{x/y_j}-\mu_x|f_{\cdot j}/\delta_x$$

とする』.

この時，[5] Proposition 43 と同様に定義から直ちに次の定理が得られる．

定理 24 『定義 17 及び 18 の各種相関比は常に次の関係を満足する．

(155) $$0\leqq\eta_{y\cdot x;\Delta}.\ \eta_{x\cdot y;\Delta},\ \eta_{y\cdot x;\delta},\ \eta_{x\cdot y;\delta}\leqq 1$$

特に x, y が 1 対 1 に対応する場合

(156) $$\eta_{y\cdot x;\Delta}=\eta_{x\cdot y;\Delta}=\eta_{y\cdot x;\delta}=\eta_{x\cdot y;\delta}=1$$

となり又 x, y が独立であれば

(157) $$\eta_{y\cdot x;\Delta}=\eta_{x\cdot y;\Delta}=\eta_{y\cdot x;\delta}=\eta_{x\cdot y;\delta}=0$$

である．』

§8 二次元の有限観測値系列に対する各種平均差及び平均偏差

§1 から §7 までに於て密度 f_{hk} をもつ離散型分布について扱ったが，ここでは N 箇の観測値系列

(158) $$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix}x_N\\y_N\end{pmatrix}$$

についての平均差，平均偏差について簡単に触れることにする．

定義 19 観測値系列 (158) に対して，第1種，第2種，第3種の各平均差，$\overset{(1)}{\Delta}_{xy}$, $\overset{(2)}{\Delta}_{xy}$, $\overset{(3)}{\Delta}_{xy}$ をそれぞれ次のように定義する．即

$$\overset{(1)}{\Delta}_{xy}=\sum\sum\sum_{i,j,k=1,2,\cdots,N} sgn(x_i,x_k)\,sgn(y_j,y_k)\begin{vmatrix} x_i-x_k & x_j-x_k \\ y_i-y_k & y_j-y_k \end{vmatrix} \tag{159}$$

$$\overset{(2)}{\Delta}_{xy}=\begin{vmatrix} \Delta_x & \mathrm{codif}^{(1)}(x,y) \\ \mathrm{codif}^{(1)}(y,x) & \Delta_y \end{vmatrix} \tag{160}$$

ここで

$$\mathrm{codif}^{(1)}(x,y)=\sum\sum_{i,j=1,2,\cdots,N} sgn(y_i,y_j)(x_i-x_j) \tag{161}$$

$$\mathrm{codif}^{(1)}(y,x)=\sum\sum_{i,j=1,2,\cdots,N} sgn(x_i,x_j)(y_i-y_j) \tag{161'}$$

$$\overset{(3)}{\Delta}_{xy}=\begin{vmatrix} \Delta_x & \mathrm{codif}^{(2)}(x,y) \\ \mathrm{codif}^{(2)}(y,x) & \Delta_y \end{vmatrix} \tag{162}$$

ここで

$$\mathrm{codif}^{(2)}(x,y)=2\sum_{j=1}^{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} sgn(x_i,x_j)(x_i-\mu_x)}\sqrt{\left|\sum_{i=1}^{N} sgn(x_i,x_j)(y_i-\mu_y)\right|} \tag{163}$$

$$\mathrm{codif}^{(2)}(y,x)=2\sum_{j=1}^{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} sgn(y_i,y_j)(y_i-\mu_y)}\sqrt{\left|\sum_{i=1}^{N} sgn(y_i,y_j)(x_i-\mu_x)\right|} \tag{163'}$$

である．

定義 20 『(158) に対する平均偏差 δ_{xy} を次のように定義する．

$$\delta_{xy}=\begin{vmatrix} \delta_x & \mathrm{codev}(x,y) \\ \mathrm{codev}(y,x) & \delta_y \end{vmatrix} \tag{164}$$

ここで

$$\mathrm{codev}(x,y)=\sum_{i=1}^{N} sgn(y_i,\mu_y)(x_i-\mu_x) \tag{165}$$

$$\mathrm{codev}(y,x)=\sum_{i=1}^{N} sgn(x_i,\mu_x)(y_i-\mu_y) \tag{165'}$$

である』．

§9 具体的モデルによる各種の統計測度の数量的比較について*8)

§1から§7に至る各節で検討した諸方式を具体的な数値例によって検討し，各種統計測度の機能と相互関係を明らかにすることが本節の目的である．

相関の種々相を比較的明快に表現するものとして我々は次の第2表の6箇の3×3相関表をモデルに採択し，これを各種の散布度及び相関係数算定の基礎とした．ここで欄内の数値は度数を表わすものである．

結果論的でにあるが各モデルについて聊か解説を加えるとモデル1は言うまでもなく，x, y が独立の場合の代表例といえる．モデル2は独立ではないが，所謂相関係数 $\rho_{xy:\sigma}=\dfrac{cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$ が0となる代表例である．モデル3, 4, 5は $\rho_{xy:\sigma}$ がそれぞれ $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$ を示す中間各段階を与える．モデル6は勿論完全正相関すをもつ極く単純な例である．第2表に基づく各種の相関係数の計算結果をまず第3表に示すことにする．この結果は $\overset{(1)}{\gamma}_{xy:\Delta}$ を除き各値は完全に一致する

*8) 理論的分布についての検討は [5] Example 5 を参照されたい．その結果は本節の結果と極めてよく符合している．

第2表　各種の相関表モデル

model 1

x＼y	1	2	3	計
1	1	1	1	3
2	1	1	1	3
3	1	1	1	3
計	3	3	3	9

model 2

x＼y	1	2	3	計
1	0	1	0	1
2	1	0	1	2
3	0	1	0	1
計	1	2	1	4

model 3

x＼y	1	2	3	計
1	1	2	0	3
2	2	1	2	5
3	0	2	1	3
計	3	5	3	11

model 4

x＼y	1	2	3	計
1	1	1	0	2
2	1	1	1	3
3	0	1	1	2
計	2	3	2	7

model 5

x＼y	1	2	3	計
1	2	1	0	3
2	1	2	1	4
3	0	1	2	3
計	3	4	3	10

model 6

x＼y	1	2	3	計
1	1	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	1
計	1	1	1	3

第3表　各種相関係数の比較（1）

Test NOMBER ＼ 相関係数の種類	model 1	model 2	model 3	model 4	model 5	model 6
$\rho_{xy}:\sigma$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\rho_{xy}:\Delta$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\gamma^{(1)}_{xy}:\Delta$	0.00001	0.56999	0.19079	0.55577	0.72921	1
$\gamma^{(2)}_{xy}:\Delta$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\gamma^{(3)}_{xy}:\Delta$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\gamma^{(1)}_{xy}:\delta$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\gamma^{(2)}_{xy}:\delta$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\eta_{y.x}:\Delta$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\eta_{x.y}:\Delta$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\eta_{y.x}:\delta$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\eta_{x.y}:\delta$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

ことを示している．これは一方では第2表の各モデルが適切なものであると云えるが，反面各種の相関係数の規定が適切であることを示すとも云えよう．更に $\gamma^{(1)}_{xy:\Delta}$ の数値に関しても何等不合理性を含むものではなく，モデル2に関する他の係数に対する異常性についても，このモデル自体が相関係数の弱点を示すものであることを考え合せれば，何れが妥当な数値であるとも判定し得ないのである．他方 $\gamma^{(1)}_{xy:\Delta}$ の特異性は集中概念の独自性を示すものとも云える．

次に第4表は各種散布度の比較を与えるものであるが，各測度によるモデル間の大小関係は殆ど完全に一致しているといえよう．逆に各モデルに関する各測度間の大小関係はこの表の如く一定したものではなく，分布の状態により大きく左右されることは次節の実例と比較して理解することが出来る．又一般に測度としての鋭敏性はモデルによる数値の変動の大少によって判断し得るが，これは $\Delta^{(3)}_{xy}$ に於て最も著しいことが分る．

扨，$\Delta^{(1)}_{xy}$ の著しい特徴はそれが二次元の Gini 係数を規定する点にあるが，その結果を 二次

第4表 各種散布度の比較（1）

散布度の種類 \ Test NUMBER	model 1	model 2	model 3	model 4	model 5	model 6
V_{xy}	0.44444	0.25000	0.26446	0.24490	0.20000	0.00000
$\Delta_{xy}^{(1)}$	0.59259	0.50000	0.46882	0.41399	0.32400	0.00000
$\Delta_{xy}^{(2)}$	0.79012	0.56250	0.55952	0.49979	0.39200	0.00000
$\Delta_{xy}^{(3)}$	0.79012	0.56250	0.41964	0.33319	0.23520	0.00000
δ_{xy}	0.44444	0.25000	0.26446	0.24489	0.20000	0.00000

但し $V_{xy}=\begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \mathrm{cov}(xy) \\ \mathrm{cov}(xy) & \sigma_y^2 \end{vmatrix}$

元の相対平均偏差 T_{xy} 及び変動係数 C.V $\left(ここでは仮に \dfrac{\sqrt{V_{xy}}}{\mu_x\mu_y} とした\right)$ と比較したのが第5表である.

この三つの係数は大小関係に於て殆ど一致しており，又相互の大小関係も次節の実例と照してみても一定しているようである.

第5表 各種の集中係数と変動係数との比較 (1)

係数の種類 \ Test NUMBER	model 1	model 2	model 3	model 4	model 5	model 6
$G=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta_{xy}^{(1)}}{\mu_x\mu_y}}$	0.19245	0.17678	0.17118	0.16086	0.14230	0.00000
$T_{xy}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta_{xy}}{\mu_x\mu_y}}$	0.16667	0.12500	0.12856	0.12372	0.11180	0.00000
$C\cdot V=\frac{\sqrt{V}}{\mu_x\mu_y}$	0.33333	0.25000	0.25713	0.24744	0.22361	0.00000

§ 10 経験データによる諸方式の比較

以上の各節に於て分散及びそれに基づく相関係数に代替する各種の散布度，相関係数を追求したそもそもの理由は経済現象等に屢々出現する歪み型分布を解析する目的に発している．つまりこの場合には評価し難い過大な分散が生じ，従来の解析的方法の適用の前提に抵触するからである．

又特に Gini 集中係数や相対平均偏差はその簡明な指数としての性格の故にある種の状態の判定基準に屢々用いられるからに他ならない．従って本節では実際に上記の諸方式が歪み形分布の表現に有効であるか否かを吟味することにする．

利用した資料は，事業所センサスの一つの結果報告にあたる会社企業名鑑（総理府統計局）1943 年版であり，第6表はそれに基づく相関表である．

この表により第 3, 4, 5 表に準じた計算を行った結果が次の第 7, 8, 9, 10 の各表である．

第6表の分布は第2, 3図に示されるような著しい歪み分布であることを前提にして，以下計算結果について解説すると，先第7表により相関係数は全般に variance, covariance による相関に比して高目に得られるのであるが，a, b, c, d の大小関係については一致性が認められる．

他面第8表の散布度については，variance, covariance によるそれに比して全般に著しく小さい数値が認められるのである．そしてこの場合に於ても a, b, c, d の大小関係については完全な一致性を示す．

第6表　産業別，従業員数と資本金額による相関表*9)*10)

(a) Fe 23 鉄　鋼　業

x コード(代表値) ＼ y コード(代表値)	1 (3.3)	2 (7.2)	3 (17.9)	4 (39.6)	5 (63.1)	6 (160.0)	7 (383.6)	8 (702.6)	9 (2071.1)	10 (20830.4)	計
1 (34.23)	5	25	200	139	52	8					429
2 (63.04)	5	18	42	122	101	50	1				339
3 (152.08)	2	7	30	57	126	88	4	2	1		317
4 (345.95)		3	3	7	18	47	2	2			82
5 (609.90)					19	46	8	7			80
6 (2749.11)			2	1	5	27	26	22	6		89
7 (20313.00)			1				2	11	20	2	36
8 (438935.07)									3	10	13
計	12	53	278	326	321	266	43	44	30	12	1,385

(b) Fe 25 金属製品製造業

x コード(代表値) ＼ y コード(代表値)	1 (3.3)	2 (7.0)	3 (16.7)	4 (37.4)	5 (68.4)	6 (158.8)	7 (375.3)	8 (687.3)	9 (1589.6)	10 (0.0)	計
1 (34.43)	22	164	900	434	239	49	4				1,812
2 (62.12)	27	53	345	412	370	111	3				1,321
3 (155.18)	3	17	96	161	380	281	17	4			959
4 (350.98)		2	8	6	26	89	11	7	1		150
5 (595.54)		1	5	6	16	66	24	8	1		127
6 (2300.37)				3	8	24	49	38	16		138
7 (15628.37)						1		4	6		11
8 (50000.00)									1		1
計	52	237	1,354	1,022	1,039	621	108	61	25	0	4,519

(c) Fe 27 電気機械器具製造業

x コード(代表値) ＼ y コード(代表値)	1 (3.0)	2 (7.0)	3 (17.6)	4 (38.0)	5 (68.8)	6 (1645)	7 (379.1)	8 (690.4)	9 (2039.0)	10 (20259.5)	計
1 (31.07)	10	50	332	186	180	77	3	2			840
2 (62.45)	8	27	190	182	243	122	11				783
3 (151.17)	1	5	42	74	203	266	44	13			648
4 (364.26)			3	3	17	85	28	12			148
5 (604.05)			1	1	7	54	20	15	3		101
6 (2995.79)			2	1	4	25	33	57	49	1	172
7 (18940.27)			1			1		2	29	3	36
8 (218527.69)									2	13	15
計	19	82	571	447	654	630	139	101	83	17	2,743

*9)　コードの説明

x　資本金額　1:300万～500万円未満　2:500万～1,000万　3:1,000万～3,000万　4:3,000万～5,000万　5:5,000万～1億　6:1億～10億　7:10億～50億　8:50億～

y　従業員数　1:1～4人　2:5～9　3:10～29　4:30～49　5:50～99　6:100～299　7:300～499　8:500～999　9:1,000～4,999　10:5,000～

*10)　代表値の算出の基礎

従業者コードの，代表値の算出は，昭和41年事業所統計調査報告第5巻企業編II第2表により，従業員階級別従業者総数を，従業員階級別，会社数で割ったものである．又，資本金コードの代表値の算出は同上巻，同上編第8表により，資本金額階級別資本金額を資本金階級別会社数で，割ったものである．

(d) Fe 29 精密機械器具製造業

x コード(代表値) \ y コード(代表値)	1 (3.3)	2 (7.0)	3 (16.9)	4 (37.5)	5 (68.5)	6 (159.9)	7 (381.4)	8 (683.4)	9 (2119.5)	10 (0.0)	計
1 (34.42)	4	31	131	92	49	12		1			320
2 (61.86)	2	13	76	84	78	49	2	1			305
3 (150.18)	3	1	19	24	79	84	9	6	1		226
4 (349.67)			1	2	8	13	3	2	1		30
5 (603.44)					3	14	7	5	2		31
6 (2349.46)						3	8	16	14		41
7 (21725.88)									13		13
8 (0.00)											0
計	9	45	227	202	217	175	29	31	31	0	966

会社企業名鑑 昭和43年版 総理府統計局編集より作成

第7表 各種相関係数の比較 (2)

相関係数の種類 \ 資料	a	b	c	d
$\rho_{xy}:\sigma$	0.82391	0.54064	0.83233	0.69471
$\rho_{xy}:\Delta$	0.96320	0.80329	0.93779	0.89265
$\gamma_{xy}^{(1)}:\Delta$	0.92200	0.82903	0.92216	0.88023
$\gamma_{xy}^{(2)}:\Delta$	0.89026	0.52015	0.84210	0.77681
$\gamma_{xy}^{(3)}:\Delta$	0.89212	0.55754	0.84515	0.78000
$\gamma_{xy}^{(1)}:\delta$	0.93522	0.77354	0.93091	0.83195
$\gamma_{xy}^{(2)}:\delta$	0.93551	0.77745	0.93091	0.83208
$\eta_{y\cdot x}:\Delta$	0.94980	0.75830	0.91688	0.85046
$\eta_{x\cdot y}:\Delta$	0.98033	0.86047	0.96405	0.94686
$\eta_{y\cdot x}:\delta$	0.95701	0.77719	0.93940	0.87755
$\eta_{x\cdot y}:\delta$	0.97395	0.85532	0.95666	0.95640

第8表　各種散布度の比較 (2)

資料 / 散布度の種類	a	b	c	d
V_{xy}	0.21774×10^{16}	0.20468×10^{11}	0.21158×10^{15}	0.47665×10^{12}
$\Delta_{xy}^{(1)}$	0.83404×10^{6}	0.91867×10^{4}	0.25196×10^{6}	0.44722×10^{5}
$\Delta_{xy}^{(2)}$	0.92196×10^{7}	0.20769×10^{5}	0.26607×10^{7}	0.30067×10^{6}
$\Delta_{xy}^{(3)}$	0.18917×10^{6}	0.56007×10^{4}	0.96988×10^{5}	0.20129×10^{5}
δ_{xy}	0.51575×10^{6}	0.71187×10^{4}	0.15523×10^{6}	0.39420×10^{5}

第9表　各種の集中係数と変動係数との比較 (2)

資料 / 係数の種類	a	b	c	d
G_{xy}	0.36419	0.37103	0.34998	0.38073
$\sqrt{T_{xy}}$	0.28639	0.32661	0.27469	0.35746
C·V	0.37217×10^{5}	0.11076×10^{4}	0.20283×10^{5}	0.24859×10^{4}

資料の単位（資本金十万円，従業員１人）

又第９表によれば G_{xy} と $\sqrt{T_{xy}}$ が比較的よい一致を示すのに対して，C. V の計算結果は，可成りのずれを示すもののようである．

§ 11　集中多面体の意義と諸方式の実用計算法

むすびにかえて本節では何故に moment に基づく従来の諸方式にかえて集中多面体の概念やその幾何学的性質に照応する諸方式を提起するかについて一言せねばならない．何故ならば §2 以下に定義した諸式は所謂，分散，相関係数の諸形式に較べて決して単純であるとは云えないからである．

勿論純粋に理論的な観点からは例えば Pareto 分布の特異性（分散が存在しない）等の事例によってローレンツ曲線の存在意義を説明することは従来屢々行われて来た処である．

然しここでは寧ろ実用上の観点から新方式を意味づけたいと思うのである．その為には現実に普及している統計資料の作製様式に遡らねばならない．

その時例えば経済諸量を対象とする諸業務統計表に認められるように統計利用の実用面からは，決してこれまで主として対象として考えて来た第１表のような度数分布表が必要視されていない，どころか寧ろ二義的な資料として扱われていることに気附くのである．

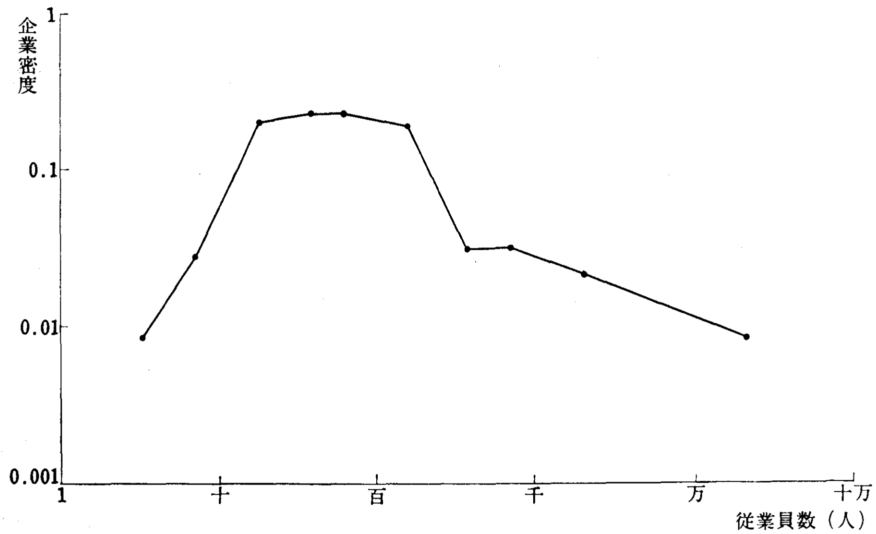
本来的統計資料は屢々各カテゴリー（代表値の算定を必ずしも必要としない）の占める総額及びその構成比率であり，後掲の第 11，12，13，14 の諸表の如き内容のものなのである．

然も X, Y, Z の定義式がこの一般の場合にも適用出来るのである．

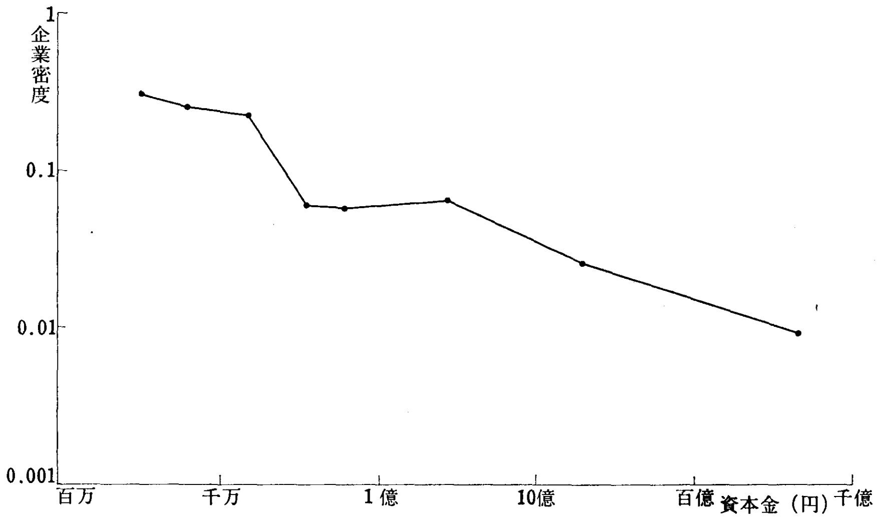
それによると第 11 表につき平均及び代表値は

第10表　各種の計算過程

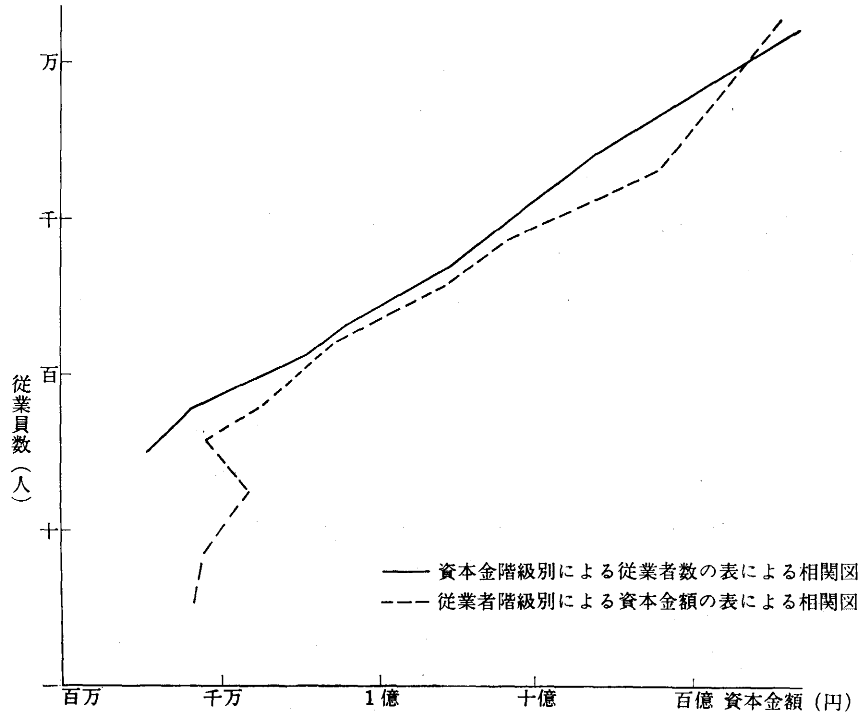
資料	a	b	c	d
σ_x	0.17952×10^{10}	0.12849×10^{7}	0.26342×10^{9}	0.63702×10^{7}
σ_y	0.37776×10^{7}	0.22509×10^{5}	0.26143×10^{7}	0.14462×10^{6}
cov(x,y)	0.67855×10^{8}	$0.9194\ \times10^{5}$	0.21842×10^{8}	0.66682×10^{6}
Δ_x	0.95596×10^{4}	0.30975×10^{3}	0.32769×10^{4}	0.83386×10^{3}
Δ_y	0.53802×10^{3}	0.91920×10^{2}	0.47505×10^{3}	0.22488×10^{3}
$\mathrm{codif}^{(1)}(x,y)$	-0.79770×10^{4}	0.11051×10^{3}	-0.25345×10^{4}	-0.59166×10^{3}
$\mathrm{codif}^{(1)}(y,x)$	0.51101×10^{3}	0.69703×10^{2}	0.43557×10^{3}	0.19125×10^{3}
$\mathrm{codif}^{(2)}(x,y)$	0.22086×10^{4}	0.14650×10^{3}	0.11932×10^{4}	0.39804×10^{3}
$\mathrm{codif}^{(2)}(y,x)$	0.22430×10^{4}	0.15612×10^{3}	0.12233×10^{4}	0.42053×103
δ_x	0.89462×10^{4}	0.25529×10^{3}	0.26342×10^{9}	0.73697×10^{3}
δ_y	0.45987×10^{3}	0.69427×10^{2}	0.26143×10 7	0.17375×10^{3}
codev(x,y)	0.85773×10^{4}	0.21836×10^{2}	0.27691×10^{4}	0.60264×10^{3}
codev(y,x)	0.41953×10^{3}	0.48569×10^{2}	0.36410×10^{3}	0.14707×10^{3}
H $_{xy}:\Delta$	0.29665×10^{6}	0.15874×10^{5}	0.11165×10^{6}	0.13212×10^{5}
$1-\dfrac{4\Delta_{xy}}{3\Delta_x\Delta_y}$	0.13322×10^{-14}	-0.18518	0.69444×10^{-2}	0.17166
H $_{xy}:\delta$	0.38488×10^{7}	0.13780×10^{5}	0.10831×10^{7}	0.10655×10^{6}



第2図　従業員数による企業の周辺密度分布（鉄鋼業）



第3図　資本金額による企業の周辺密度分布（鉄鋼業）



第4図　従業員数と資本金額との相関図（鉄鋼業）

(166)
$$\begin{cases} \dfrac{v_{..}}{u_{..}} = \mu_x & \dfrac{w_{..}}{u_{..}} = \mu_y \\[2ex] \dfrac{v_{i\cdot}}{u_{i\cdot}} = \mu_{x/y_{i-1}<x\leqq x_i}, & \dfrac{w_{i\cdot}}{u_{i\cdot}} = \mu_{y/x_{i-1}<x\leqq x_i}, \end{cases}$$

であり，一方一般に

(167)
$$\begin{cases} u_{i\cdot} = u_{..}\,(\overset{(1)}{X_{i\cdot}} - \overset{(1)}{X_{i-1\cdot}}) = u_{..}\,\varDelta \overset{(1)}{X_{i\cdot}} \\ v_{i\cdot} = \mu_x u_{..}\,(\overset{(1)}{Y_{i\cdot}} - \overset{(1)}{Y_{i-1\cdot}}) = v_{..}\,\varDelta \overset{(1)}{Y_{i\cdot}} \\ w_{i\cdot} = \mu_y u_{..}\,(\overset{(1)}{Z_{i\cdot}} - \overset{(1)}{Z_{i-1\cdot}}) = w_{..}\,\varDelta \overset{(1)}{Z_{i\cdot}} \end{cases}$$

従って亦

$$(168)\qquad \begin{cases} p_{i\cdot} = \Delta X^{(1)}_{i\cdot} \\ q_{i\cdot} = \Delta Y^{(1)}_{i\cdot} \\ r_{i\cdot} = \Delta Z^{(1)}_{i\cdot} \end{cases}$$

が得られる．

同様に第12表に関しては (166) (167) (168) に対応してそれぞれ

$$(169)\qquad \begin{cases} \dfrac{v_{\cdot\cdot}}{u_{\cdot\cdot}} = \mu_x, & \dfrac{w_{\cdot\cdot}}{u_{\cdot\cdot}} = \mu_y \\[2ex] \dfrac{v_{\cdot j}}{u_{\cdot j}} = \mu_{x/y_{j-1}<y\leqq y_j}, & \dfrac{w_{\cdot j}}{u_{\cdot j}} = \mu_{y/y_{j-1}<y\leqq y_j}, \end{cases}$$

$$(170)\qquad \begin{cases} u_{\cdot j} = u_{\cdot\cdot}\,\Delta X^{(1)}_{\cdot j} \\ v_{\cdot j} = v_{\cdot\cdot}\,\Delta Y^{(1)}_{\cdot j} \\ w_{\cdot j} = w_{\cdot\cdot}\,\Delta Z^{(1)}_{\cdot j} \end{cases}$$

及び

$$(171)\qquad \begin{cases} p_{\cdot j} = \Delta X^{(1)}_{\cdot j} \\ q_{\cdot j} = \Delta Y^{(1)}_{\cdot j} \\ r_{\cdot j} = \Delta Z^{(1)}_{\cdot j} \end{cases}$$

が成立する．

かくして又 $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $Z^{(1)}$ は累積構成比率に関係することが判明する．又 p, q, r は単に $\Pi^{(1)}$ の階差 $\Delta X^{(1)}_{i\cdot}$, $\Delta Y^{(1)}_{i\cdot}$, $\Delta Z^{(1)}_{i\cdot}$ に関係するのみでなく任意の $\Pi^{(k)}$ の階差 $\Delta X^{(k)}_{i\cdot}$, $\Delta Y^{(k)}_{i\cdot}$, $\Delta Z^{(k)}_{i\cdot}$ によって表現されうることも明かであろう．

更にこのことは第13表，第14表に関してより一層明瞭となるのである．つまりまず第13表に関して

$$(172)\qquad \begin{cases} u_{ij} = u_{\cdot\cdot}\{(X^{(1)}_{ij} - X^{(1)}_{i-j}) - (X^{(1)}_{ij-1} - X^{(1)}_{i-1j-1})\} \\ \quad = u_{\cdot\cdot}\,(X^{(1)}_{ij} - X^{(1)}_{i-1j} - X^{(1)}_{ij-1} + X^{(1)}_{i-1j-1}) = u_{\cdot\cdot}\,\Delta^2 X^{(1)}_{ij} \\ v_{ij} = \mu_x u_{\cdot\cdot}\,\{(Y^{(1)}_{ij} - Y^{(1)}_{i-1j}) - (Y^{(1)}_{ij-1} - Y^{(1)}_{i-1j-1})\} = v_{\cdot\cdot}\,\Delta^2 Y^{(1)}_{ij} \\ w_{ij} = \mu_y u_{\cdot\cdot}\{(Z^{(1)}_{ij} - Z^{(1)}_{i-j}) - (Z^{(1)}_{ij-1} - Z^{(1)}_{i-1j-1})\} = w_{\cdot\cdot}\Delta^2\, Z^{(1)}_{ij} \end{cases}$$

第11表 業務統計資料の理論的表見 (1)*11)

コード ＼ カテゴリー ＼ 総量(構成比率)		客体数の総計(比率)	x の総額(比率)	y の総額(比率)
C_1	$x \leqq x_1$	$u_{1\cdot}$ $(p_{1\cdot})$	$v_{1\cdot}$ $(q_{1\cdot})$	$w_{1\cdot}$ $(r_{1\cdot})$
C_2	$x_1 < x \leqq x_2$	$u_{2\cdot}$ $(p_{2\cdot})$	$v_{2\cdot}$ $(q_{2\cdot})$	$w_{2\cdot}$ $(r_{2\cdot})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_i	$x_{i-1} < x \leqq x_i$	$u_{i\cdot}$ $(p_{i\cdot})$	$v_{i\cdot}$ $(q_{i\cdot})$	$w_{i\cdot}$ $(r_{i\cdot})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_m	$x_{m-1} < x \leqq x_m$	$u_{m\cdot}$ $(p_{m\cdot})$	$v_{m\cdot}$ $(q_{m\cdot})$	$w_{m\cdot}$ $(r_{m\cdot})$
計	全	$u_{\cdot\cdot}$ (1)	$v_{\cdot\cdot}$ (1)	$w_{\cdot\cdot}$ (1)

11 *) コード C_{m+1} として $x_m < x$ を加えても事情は全く変らない．蓋しこの場合 $p_{m+1\cdot} = 1 - X_m = \Delta X_{m+1\cdot}$, $q_{m+1\cdot} = 1 - Y_m = \Delta Y_{m+1\cdot}$ $Y_{m+1\cdot} = 1 - Z_m = \Delta Z^{(1)}_{m+1\cdot}$ 等となるからである；以下の所論についても同様である；

第12表　業務統計資料の理論的表現 (2)

コード ＼ カテゴリー ＼ 総量(構成比率)		客体数の総計(比率)	x の総額(比率)	y の総額(比率)
D_1	$y \leqq y_1$	$u_{\cdot 1}$ $(p_{\cdot 1})$	$v_{\cdot 1}$ $(q_{\cdot 1})$	$w_{\cdot 1}$ $(r_{\cdot 1})$
D_2	$y_1 < y \leqq y_2$	$u_{\cdot 2}$ $(p_{\cdot 2})$	$v_{\cdot 2}$ $(p_{\cdot 2})$	$w_{\cdot 2}$ $(r_{\cdot 2})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
D_j	$y_{j-1} < y \leqq y_j$	$u_{\cdot j}$ $(p_{\cdot j})$	$v_{\cdot j}$ $(q_{\cdot j})$	$w_{\cdot j}$ $(r_{\cdot j})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
D_n	$y_{n-1} < y \leqq y_n$	$u_{\cdot n}$ $(p_{\cdot n})$	$v_{\cdot n}$ $(q_{\cdot n})$	$w_{\cdot n}$ $(r_{\cdot n})$
計	全	$u_{\cdot\cdot}$ (1)	$v_{\cdot\cdot}$ (1)	$w_{\cdot\cdot}$ (1)

第13表　業務統計資料の理論的表現 (3)
第 C_i 階層 $(x_{i-1} < x \leqq x_i)$；$i = 1, 2, \cdots, m$

コード ＼ カテゴリー ＼ 総量(構成比率)		客体数の総計(比率)	x の総額(比率)	y の総額(比率)
D_{i1}	$y \leqq y_1$	u_{i1} (p_{i1})	v_{i1} (q_{i1})	w_{i1} (r_{i1})
D_{i2}	$y_1 < y \leqq y_2$	u_{i2} (p_{i2})	v_{12} (q_{i2})	w_{i2} (r_{i2})
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
D_{ij}	$y_{j-1} < y \leqq y_j$	u_{ij} (p_{ij})	v_{ij} (q_{ij})	w_{ij} (r_{ij})
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
D_{in}	$y_{n-1} < y \leqq y_n$	u_{in} (p_{in})	v_{in} (q_{in})	w_{in} (r_{in})
計	C_i の全	$u_{i\cdot}$ $(p_{i\cdot})$	$v_{i\cdot}$ $(q_{i\cdot})$	$w_{i\cdot}$ $(r_{i\cdot})$

第14表　業務統計資料の理論的表現 (4)
第 D_j 階層 $(y_{j-1} < y \leqq y_j)$；$j = 1, 2, \cdots, n$

コード ＼ カテゴリー ＼ 総量(構成比率)		客体数の総計(比率)	x の総額(比率)	y の総額(比率)
C_{1j}	$x \leqq x_1$	u_{1j} (p_{1j})	v_{1j} (q_{1j})	w_{1j} (r_{1j})
C_{2j}	$x_1 < x \leqq x_2$	u_{2j} (p_{2j})	v_{2j} (q_{2j})	w_{2j} (r_{2j})
⋮				
C_{ij}	$x_{i-1} < x \leqq x_i$	u_{ij} (p_{ij})	v_{ij} (q_{ij})	w_{ij} (r_{ij})
⋮				
C_{mj}	$x_{m-1} < x \leqq x_m$	u_{mj} (p_{mj})	v_{mj} (q_{mj})	w_{mj} (r_{mj})
計	D_j の全	$u_{\cdot j}$ $(p_{\cdot j})$	$v_{\cdot j}$ $(q_{\cdot j})$	$w_{\cdot j}$ $(r_{\cdot j})$

従って又

$$(173)\qquad \begin{cases} p_{ij} = \Delta^2 X_{ij}^{(1)} \\ q_{ij} = \Delta^2 Y_{ij}^{(1)} \\ r_{ij} = \Delta^2 Z_{ij}^{(1)} \end{cases}$$

が成立するのである．

かくして§1に定義した集中多面体とは累積構成比率の幾何学的表現に他ならないことが明

かとなった．

扨，以上第 11, 12, 13, 14 の各表の数量によって §2 以下の各種の Δ, δ 及び ρ, γ の定義式はどのように表現されるであろうか．その際 (166)～(173) を考慮すれば容易に以下の諸表現を得ることが出来る．勿論以上の各表に於て *11に示したように，カテゴリー $C_{m+1}:x_m<x$ 或は $D_{n+1}:y_n<y$ を加えた場合についても各式は m 又は n を $m+1$ 又は $n+1$ とするのみで何等本質的な変化を齎さないのである．

a) まず $\overset{(1)}{\Delta}_{xy}$ について

$$\overset{(1)}{\Delta}_{xy}=\sum_{\substack{h,i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum sgn(h,s)\,sgn(j,t)\begin{vmatrix}u_{hk} & u_{ij} & u_{st}\\ v_{hk} & v_{ij} & v_{st}\\ w_{hk} & w_{ij} & w_{st}\end{vmatrix}\Big/\overset{3}{u}_{\cdot\cdot} \tag{174}$$

$$=\mu_x\mu_y\sum_{\substack{h,i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum sgn(h,s)\,sgn(j,(t)\begin{vmatrix}p_{hk} & p_{ij} & p_{st}\\ q_{hk} & q_{ij} & q_{st}\\ r_{hk} & r_{ij} & r_{st}\end{vmatrix}$$

が成立し，従って Gini 係数は

$$G_{xy}=\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{\substack{h,i,s=1,2,\cdots,m\\k,j,t=1,2,\cdots,n}}\cdots\sum sgn(h,s)\;sgn(j,t)\begin{vmatrix}p_{hk} & p_{ij} & p_{st}\\ q_{hk} & q_{ij} & q_{st}\\ r_{hk} & r_{ij} & r_{st}\end{vmatrix}} \tag{175}$$

となる．又 $\overset{2}{G}_{xy}$ の集中多面体の体積 U への収斂速度は

$$O\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\overset{2}{u}_{i\cdot}+\sum_{j=1}^{n}\overset{2}{u}_{\cdot j}}\Big/u_{\cdot\cdot}\right)=O\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\overset{2}{p}_{i\cdot}+\sum_{j=1}^{n}\overset{2}{p}_{\cdot j}}\right) \tag{176}$$

によって知ることが出来る．

b) $\overset{2}{\Delta}_{xy}$ についてはその各要素につき

$$\begin{cases}\Delta_x=\sum\limits_{h,i=1,2,\cdots m}\sum sgn\,(h,\,i)\begin{vmatrix}u_{i\cdot} & u_{h\cdot}\\ v_{i\cdot} & v_{h\cdot}\end{vmatrix}\Big/\overset{2}{u}_{\cdot\cdot}=\mu_x\sum\limits_{h,i,=1,2,\cdots,m}\sum sgn\,(h,\,i)\begin{vmatrix}p_{i\cdot} & p_{h\cdot}\\ q_{i\cdot} & q_{h\cdot}\end{vmatrix}\\[2ex] \Delta_y=\sum\limits_{k,j=1,2,\cdots,n}\sum sgn\,(k,\,j)\begin{vmatrix}u_{\cdot j} & u_{\cdot k}\\ w_{\cdot j} & w_{\cdot k}\end{vmatrix}\Big/\overset{2}{u}_{\cdot\cdot}=\mu_y\sum\limits_{k,j=1,2,\cdots,n}\sum sgn\,(k,\,j)\begin{vmatrix}p_{\cdot j} & p_{\cdot x}\\ r_{\cdot j} & r_{\cdot k}\end{vmatrix}\end{cases} \tag{177}$$

及び

$$\begin{cases}\mathrm{codif}^{(1)}\,(x,\,y)=\sum\limits_{k,j=1,2,n}\sum sgn\,(k,\,j)\begin{vmatrix}u_{\cdot j} & u_{\cdot k}\\ v_{\cdot j} & v_{\cdot k}\end{vmatrix}\Big/\overset{2}{u}_{\cdot\cdot}=\mu_x\sum\limits_{k,j=1,2,\cdots,n}\sum sgn\,(k,\,j)\begin{vmatrix}p_{\cdot j} & p_{\cdot k}\\ q_{\cdot j} & q_{\cdot k}\end{vmatrix}\\[2ex] \mathrm{codif}^{(1)}\,(y,\,x)=\sum\limits_{h,i=1,2,\cdots,m}\sum sgn\,(h,\,i)\begin{vmatrix}u_{i\cdot} & u_{h\cdot}\\ w_{i\cdot} & w_{h\cdot}\end{vmatrix}\Big/\overset{2}{u}_{\cdot\cdot}=\mu_y\sum\limits_{h,i=1,2,\cdots,m}\sum sgn\,(h,\,i)\begin{vmatrix}p_{i\cdot} & p_{h\cdot}\\ r_{i\cdot} & r_{h\cdot}\end{vmatrix}\end{cases} \tag{178}$$

が得られる．

c) $\overset{(3)}{\Delta}_{xy}$ についてはその各要素は (177) 式及び次式によって与えられる．

$$\begin{cases}\mathrm{codif}^{(2)}\,(x,\,y)=2\sum\limits_{h=1}^{m}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}sgn(i,h)\,(v_{i\cdot}-\mu_x\,u_{i\cdot})}\;\sqrt{\Big|\sum\limits_{i=1}^{m}sgn(i,h)\,(w_{i\cdot}-\mu_x\,u_{i\cdot})\Big|}\Big/\dfrac{u_{h\cdot}}{u_{\cdot\cdot}^{2}}\\[2ex] \qquad=2\sqrt{\mu_x\,\mu_y}\sum\limits_{h=1}^{m}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}sgn(i,h)(q_{i\cdot}-p_{i\cdot})}\;\sqrt{\Big|\sum\limits_{i=1}^{m}sgn(i,h)(r_{i\cdot}-p_{i\cdot})\Big|}\;p_{h\cdot}\\[2ex] \mathrm{codif}^{(2)}(y,\,x)=2\sum\limits_{k=1}^{m}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}sgn(j,k)(w_{\cdot j}-\mu_y\,u_{\cdot j})}\;\sqrt{\Big|\sum\limits_{j=1}^{n}sgn(j,k)(v_{\cdot j}-\mu_x\,u_{\cdot j})\Big|}\Big/\dfrac{u_{\cdot k}}{u_{\cdot\cdot}^{2}}\\[2ex] \qquad=2\sqrt{\mu_x\,\mu_y}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m}sgn(j,k)(r_{\cdot j}-p_{\cdot j})}\;\sqrt{\Big|\sum\limits_{j=1}^{n}sgn(j,k)(r_{\cdot j}-p_{\cdot j})\Big|}\;p_{\cdot k}\end{cases} \tag{179}$$

d) 同様に δ_{xy} の各要素は次のように表わされる．即

$$(180)\quad \begin{cases} \delta_x = \sum_{i=1}^{m} |v_{i\cdot} - \mu_x u_{i\cdot}|/u_{\cdot\cdot} = \mu_x \sum_{i=1}^{m} |q_{i\cdot} - p_{i\cdot}| \\ \delta_y = \sum_{j=1}^{n} |w_{\cdot j} - \mu_y u_{\cdot j}|/u_{\cdot\cdot} = \mu_y \sum_{j=1}^{n} |r_{\cdot j} - p_{\cdot j}| \end{cases}$$

及び

$$(181)\quad \begin{cases} \mathrm{codev}\,(x, y) = \sum_{j=1}^{n} sgn\,(w_{\cdot j}, \mu_{\cdot j} u_{\cdot j})\,(v_{\cdot j} - \mu_y u_{\cdot j})/u_{\cdot\cdot} = \mu_y \sum_{j=1}^{n} ggn\,(r_{\cdot j}, p_{\cdot j})\,(q_{\cdot j} - p_{\cdot j}) \\ \mathrm{codev}\,(y, x) = \sum_{i=1}^{m} sgr\,(v_{i\cdot}, \mu_x u_{i\cdot})\,(w_{i\cdot} - \mu_x u_{i\cdot})/u_{\cdot\cdot} = \mu_x \sum_{i=1}^{m} sgn\,(q_{i\cdot}, p_{i\cdot})\,(r_{i\cdot} - p_{i\cdot}) \end{cases}$$

従ってまた

$$(182)\quad T_{xy} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{m} |q_{i\cdot} - p_{i\cdot}| & \sum_{j=1}^{n} sgn\,(r_{\cdot j}, p_{\cdot j})\,(q_{\cdot j} - p_{\cdot j}) \\ \sum_{i=1}^{m} sgn\,(q_{i\cdot}, p_{i\cdot})\,(r_{i\cdot} - p_{i\cdot}) & \sum_{j=1}^{n} |r_{\cdot j} - p_{\cdot j}| \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} sgn\,(q_{i\cdot}, p_{i\cdot})\, sgn\,(r_{\cdot j}, p_{\cdot j}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{i\cdot} & q_{i\cdot} & r_{i\cdot} \\ p_{\cdot j} & q_{\cdot j} & r_{\cdot j} \end{vmatrix}}$$

である．

以上 (174) より (182) に至る諸式は同時に γ, ρ を表現する基礎になるがその何れに於ても総量 u, v, w よりは構成比率 p, q, r 従って又 ΔX, ΔY. ΔZ を用いた形式が有利であり更に第1表への改編，代表値の算出という迂回過程を辿る分散，相関の計算より遙かに見通しよく且簡潔であるといえよう．此等の諸式は同時に構成比率の分析に通ずるのである．

かくしてこゝに集中多面体，構成比率，それ等の特性量という集団構造の三位一体観が成立するのである．

猶最後に作図，計算の実際に当って元統数研の飯塚道子氏，一橋大学の杉山文子氏，統数研の小山田和枝嬢及び武藤工大の長田隆君の手を煩した事を報告し深謝したい．

統計数理研究所

備考

以上 §1 から §6 に至る各節の諸計算の基礎とした分割 $\Delta m, n$ についてより具体的に $\max\limits_{\substack{i=1,2,\cdots m \\ j=1,2,\cdots n}} f_{ij} = O\left(\frac{1}{mn}\right)$ と制限すれば $O\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^2\right) = O\left(\frac{1}{mn}\right)$ 等より有効な結果が得られる。

参　考　文　献

[1] T. Taguchi : Concentration curve methods and structures of skew populations — a methodology for the analyis of economic data— Annals of the Institute of Statistical mathematics., Vol. 20, No. 1, 1968

[2] 田口時夫： 競争システムにおける統計 ——イタリー学派の展望—— 統計数理研究所彙報，第16巻，第1号 1968

[3] 田口時夫： 二次元集中曲面の局所的性質 統計数理研究所彙報，第19巻，第1号，1971

[4] T. Taguchi : On the two dimensional concentration surface and entensions of concentration coefficient and Poreto distribution to the two dimensional case
(1) ——On an application of differential geometric methods to statistical analysis—— ann. Inst. Stat. Math, Vol. 24, No. 2, 1972.

[5] T. Taguchi : 〃 〃 (2) & (3)
(to be appeared)