制御と状態推定の分離

今　井　晴　男

(1971 年 11 月　受付)

Separation of Control from State Estimation

Haruo Imai

For a discrete time one dimensional, linear control system with independent disturbances and noises, with a quadratic criterion, we prove the separation theroem without any assumption of linear control law or Gaussian noise processes.

We point out that the basic fact is the uniqueness or control independence, at each t, of the error process $\tilde{x}_t = x_t - \hat{x}_t$ of approxmating the states x_t by projections $\hat{x}_t$ onto the closed subspace of measurable functions of the observed history $Y_t = \{y_1, y_2, \cdots y_t\}$.

We provisionally refer to the control, which is a function of the state x_t as a virtual control, and to the cost as a virtual cost. From control independence of $\tilde{x}_t$, it follows that to select a control so as to minimize the virtual cost is equivalent to minimize the realizable cost. We call this fact, for the moment, as virtual equivalence. Then, the separation theorem is an immediate consequence of the virtual equivalence.

As the minimum virtual cost for the future is a quaratic function of the present state x_t, the optimal estimate $\overline{v_t^*}$ of the optimal virtual control v_t^*, which minimize the expected cost, is equivalent to the minimum meansquare error estimate of v_t^*.

The Institute of Statistical Mathematics

1.　線形の１次元のシステムで，２次式の動作評価関数のとき，通常行なわれている仮定は，制御は観測値の線形関係 [2]，あるいは外乱，雑音が正規過程 [1] とする．

このノートでは，これらの仮定をおかずに，いわゆる separaton theorem が成立つことを示す．仮定は，外乱と雑音が独立な列で，制御あるいは状態と独立ということである．記述の簡単のために，１次元離散時間の場合を考えるが，ベクトルの場合も同様である．

この場合，separation theorem が成立つ理由が根本的には，各 t で x_t の観測値の分散有限な可測関数の空間への射影による近似の誤差，$\tilde{x}_t = x_t - \hat{x}_t$ の一意性（制御法則によらない一定の確率変数）であることを注意する．ここで仮りに virtual control, virtual cost という言葉を使う．状態 x_t の可測関係 $v_t \in \mathfrak{H}$ を virtual control，それを用いたときの cost を virtual cost という．今述べた $\tilde{x}_t$ の homogeneity から将来の virtual cost（の期待値）を最小にするように，現在の実現可能な制御を取ることが，実現できる cost（の期待値）を最小にすることと同等である．この事を仮りに virtual equivalence と言う．separation theorem は virtual equivalence から直ちに従う．

将来の virtual cost の最小値は，現在の状態 x_t の２次式となるために，最適な virtual control v_t^* の最適推定（cost を最小にする推定）u_t^* は，v_t^* の最小２乗平均誤差推定である．最適な virtual control は，必然的に x_t の線形関数で，これは仮定すべきことではない．

2.　状態の不完全な観測にもとづく制御系の解析の一つの複雑さは，その特長たる feedback による．ある制御法則をきめると，系の状態の発展の特性がこの制御によって変わる．一方この制御を最適に決めるためには，系の状態を知る必要がある．系の特性を変えるような決定を行なうことが，feedback 系の複雑さの原因である．状態が完全に観測されるときは，外乱があっても，ふつうの最適化と同様に，計算の方法も原理的には得られる．状態の不完全な知識にもとづく最適制御を求めるために，状の態推定と制御合成を同時に組合わされた問題として

扱うことが一般には必要である．あるいは最終の目的からは，最適な virtual control $v_t^*(x_t)$ の最適推定 $\overline{v_t^*(x_t)}$ を求めることが問題である．最適推定 $\overline{v_t^*(x_t)}$ は，cost の形，システムの方程式に依存し，一般にはわからない．separation theorem は，この問題に対する一つの簡約化である．この考えは，最初の形では，Simon (1956)，Theil (1957) らが見つけたとも言われる ([3]，p. 137).

feedback の特長は，部分的に観測されるマルコフ過程の状態推定とちがって，制御法則 u_t が決まっていないと状態推定が求めにくい．しかし状態推定と切離して最適制御法則があらかじめ求められるという separation theorem は，制御合成の問題を，フィルタリングの問題に簡約化することになる．

3.　ここで言う feedback 系の状態推定では，採用する決定によって，システムの特性を変更する．単に閉じた入出力系との意味ではない．状態方程式そのものがすでに，closed loop 系の方程式である．例えば，閉じた入出力系

$$x_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \xi_n$$
$$y_n = b_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \eta_n$$

は backward shift $Bx_n = x_{n-1}$ を用いて

$$x_n = (a_1 B + a_2 B^2) y_n + \xi_n$$
$$y_n = (b_1 B + b_2 B^2) x_n + \eta_n$$

したがってこの closed loop 系は

$$x_n = (a_1 B + a_2 B^2)\{(b_1 B + b_2 B^2) x_n + \eta_n\} + \xi_n$$

なる単一のシステムと同等である．ただ，この単一のシステムの closed loop システムの形に書くときは，もとのノイズが独立列でも，$\zeta_n = \{(a_1B + a_2B^2)\eta_n + \xi_n\}$ の移動平均形にすべきであるということである．さらにこれを状態ベクトルで記述すれば，システム内部の closed loop は，形の上には現われない．このことは，状態ベクトルで記述されたシステムは，一般に内部の構造は複雑な closed loop をもつことでもある．システムの簡約化では，これらが問題になるが，この同定の問題は別に考えることにして，ここでは，上に述べた特性を変える外的な feedback系の情報の簡約化である separation theorem を考える．

4.　上のいみでの feedback 系，つまり制御系の合成が簡約化できる場合として，1次元の線形状態方程式で，2次式の評価のとき，ふつうに行なわれている Gauss 過程，あるいは，線形制御法則の仮定を除いて，separation theorem を証明する．

$$x_{k+1} = \phi_k x_k + u_k + \xi_k \tag{1}$$
$$y_k = x_k + \eta_k \tag{2}$$
$$L = L_0, L_i = \sum_{k=i}^{N} \{Q_{k+1} x_{k+1}^2 + H_k u_k^2\}, \tag{3}$$

(仮定)　外乱 ξ_k, noise η_k は独立な列で，制御 u_t および状態 x_{k-1} と独立，ξ_k, η_j は ξ_l x_t などと互に独立，平均 0，分散 σ_ξ^2, σ_η^2 とする．Q_t, H_t は正の定数．

$Y_t = \{y_0, y_1, \cdots y_t\}$ は観測値の歴史とする．

virtual control を $v_t = v_t(x_t)$，実現可能な制御を $u_t = u_t(Y_t)$ と書く．virtual control v_t を用いたときの期値値，$E^{x_t}(L_t)$ を $V_t(x_t)$ と書く，実現可能な制御 u_t にたいする平均 cost $E(L_t)$ を R_t と書く．最適制御，最小の cost をそれぞれ v_t^*, u_t^*, V_t^*, R_t^* と書く．条件付き平均 $E(x_t/Y_t)$ を $E^{Y_t}(x_t)$ などと書く．v_t^* の最適推定（平均 cost を最小にする推定）を $\overline{v_t^*}$ と書く．これは後に最小2乗平均誤差推定 $\hat{v}_t^*$ であることがわかる．

(性質 1)

(i)　最適な virtual control は必然的に線形制御である．即ち driving 係数 D_k があって，

$$v_k^* = D_k x_k \tag{4}$$

(ii) 各時刻 $t=k$ で，将来の cost $V_k^*(x_k)$ は

$$V_k^*(x_k)=\underset{v_k,\cdots v_N}{\mathrm{Min}}\ E^{x_k}\{L_k\},$$

$$L_k=\sum_{t=k}^{N}\{Q_{t+1}x_{t+1}^2+H_t v_t^2\}$$

は x_k の２次式である

$$V_k^*(x_k)=C_k x_k^2+\beta_k, \tag{5}$$

$$\beta_k=\sum_{t=k}^{N}(Q_k+C_k)\sigma_\xi^2, \quad (\beta_N=\sigma_\xi^2) \tag{6}$$

D_k, C_k は後に (14), (16) で与えられる.

(したがって，v_t^* を用いるシステムは,

$$x_{k+1}=\Psi_k x_k+\xi_k, \quad (\Psi_k=\phi_k+D_k). \tag{7}$$

(証明) これは後に我々の結果の証明に使うので証明を記す．ふつうの逆向きの帰納的計算で証明する.

(i) 最後のステップの最適化.

$$V_N(x_N)=E^{x_N}\{Q_{N+1}x_{N+1}^2+H_N u_N^2\}=E^{x_N}(L_N).$$

x_{N+1} をシステム方程式 (1) によって，x_N で表わすと

$$V_N(x_N)=Q_{N+1}\{\phi_N^2 x_N^2+2\phi_N x_N v_N+v_N^2+\sigma_\xi^2\}+H_N v_N^2.$$

これは完全平方の形に,

$$(Q_{N+1}+H_N)\{v_N+(Q_{N+1}+H_N)^{-1}Q_{N+1}\phi_N x_N\}^2$$
$$+\{Q_{N+1}-Q_{N+1}^2(Q_{N+1}+H_N)^{-1}\}\phi_N^2 x^2+Q_{N+1}\sigma_\xi^2$$

とかける．これから，最適制御と cost は,

$$v_N^*=D_N x_N, \tag{8}$$

$$V_N^*(x_N)=C_N x_N^2+\beta_N, \quad (\beta_N=\sigma_\xi^2) \tag{9}$$

$$D_N=-Q_{N+1}(Q_{N+1}+H_N)^{-1}\phi_N, \tag{10}$$

$$C_N=\{Q_{N+1}-Q^2(Q_{N+1}+H_N)^{-1}\}\phi^2{}_N. \tag{11}$$

(ii) 一般の $t=j$ にたいしては,

$$V_j(x_j)=E^{x_j}\{Q_{j+1}(\phi_j x_j+v_j+\xi_j)^2+H_j v_j^2+V^*{}_{j+1}(x_{j+1})\} \tag{11a}$$

を最小にする v_j を求める．帰納法の仮定とシステム方程式 (1) から,

$$V^*{}_{j+1}(x_{j+1})=C_{j+1}x_{j+1}^2+\beta_{j+1}=C_{j+1}(\phi_j x_j+v_j+\xi_j)^2+\beta_{j+1}$$

を用いて,

$$V_j(x_j)=(C_{j+1}+Q_{j+1}+H_j)\{v_j+(C_{j+1}+Q_{j+1}+H_j)^{-1}(C_{j+1}+Q_{j+1})\phi_j x_j\}^2$$
$$+\{(C_{j+1}+Q_{j+1})-(C_{j+1}+Q_{j+1})^2(C_{j+1}+Q_{j+1}+H_j)^{-1}\}\phi_j x_j^2+\beta_j \tag{12}$$

ただし,

$$\beta_j=\beta_{j+1}+(C_{j+1}+Q_{j+1})\sigma_\xi^2 \tag{13}$$

したがって，$v_j^*=D_j x_j$, であって

$$D_j=-\frac{(C_{j+1}+Q_{j+1})}{(C_{j+1}+Q_{j+1}+H_j)}\phi_j, \tag{14}$$

$$V_j^*(x_j)=C_j x_j^2+\beta_j, \tag{15}$$

$$C_j=\{(C_{j+1}+Q_{j+1})-(C_{j+1}+Q_{j+1})^2(C_{j+1}+Q_{j+1}+H_j)^{-1}\}\phi_j^2 \tag{16}$$

とかける．C_j は，(14) の D_j を用いて書くと

$$C_j=(\phi_j+D_j)(C_j+Q_{j+1})\phi_j \tag{17}$$

となる．(証了)

上のことから，外乱 ξ_n は，制御法則に影響しない．ただ動作の評価が悪くなるだけである．外乱 ξ_n だけのシステムでは， deterministic な場合と同様で，$V_k^*(x_k)$ は，x_k の２次式で，情報の損失による β_k が加わるだけである．v_k^* は x_k の線形制御である.

ここで，見落されていると思われる，簡単ではあるが，基本的な性質（定理1）に注意する．separation theorem はこのことから容易に導びかれる，これを示すために記号を定義する．我々に必要なのは，実現可能な u_k^* すなわち，$v_k^*(x_k)$ の最適な推定 $\overline{v_k^*(x_k)}$ である．基礎の確率空間上の分散有限な確率変数全体を $\mathfrak{H}$ とする．$(x, y)=E(xy)$ とする．確率変数 x_t, y_t などは，Y_i 可測な制御 $u_i(i<t)$ に依存するから $Y_t(u_0, \cdots u_{t-1})$，$x_t(u_0, \cdots u_{t-1})$ などである．Y_t 可測な $\mathfrak{H}$ の部分を $\mathfrak{N}(t)=\mathfrak{N}(Y_t)$ と書く．これは一応 u_i によるから $\mathfrak{N}(t, u_i, i<t)$ であるが実は u_i によらないことを下に示す．$\mathfrak{N}(t)$ は閉じているから，$\mathfrak{H}=\mathfrak{N}(t)+\mathfrak{N}(t)^{\perp}$ と直和に書ける．ここに $\mathfrak{N}(t)^{\perp}$ は，$\mathfrak{N}(t)$ の直交補空間である．

（定理 1）（ξ_k, η_k の独立列の仮定がなくても）x_j の $\mathfrak{N}(t)$ への射影 $\hat{x}_j$ による近似の誤差は，制御法則によらない．即ち $\tilde{x}_t=x_t-\hat{x}_t$ は，t だけによる確率変数で，変量 x_t によらない．とくに $E(\tilde{x}_j^2)$ は x_j によらない．

（証明）$t=i-1$ における状態変数 x_{j-1} のとき Y_{j-1} 可測な $u', u'' \in \mathfrak{N}(j-1)$ を用いて得られる確率変数 x_j を，x_j', x_j'' とかく．ここに $\Delta=u''-u'' \in \mathfrak{N}(j-1)$ である．

$$x_j''=\phi_{j-1}x_{j-1}+(u'+\Delta)+\xi_j$$
$$x_j'=\phi_{j-1}x_{j-1}+u'+\xi_j.$$

これと(2)式から，$x_j''-x_j'=y_j''-y_j'=\Delta$，である．$Y_j'=\{y_1, \cdots y_{j-1}, y_j'\}$，$Y_j''=\{y_1, \cdots y_{j-1}, y_j''\}$ とすると，$y_j''=y_j'+\Delta$ により，これらが生成する σ-field が一致する，$\sigma(Y_j'')=E^{Yj'}$ と $\sigma(Y_j')$．即ち，$\mathfrak{N}(j)$ が $u_i(i<j)$ によらない．これから $\mathfrak{N}''(j)=\mathfrak{N}'(j)=\mathfrak{N}(j)$．$\mathfrak{N}''(j)$，$\mathfrak{N}'(j)$ への射影 $E^{Yj''}$ が一致する．したがって $(I-E^{Yj'})=(I-E^{Yj''})$ である．これを

$$x_j''=x_j'+\Delta, \quad \Delta \in \mathfrak{N}''(j)=\mathfrak{N}'(j),$$

に施すと，$\tilde{x}_j''=\tilde{x}_j'$，を得る．時間に関する帰納法で，実現可能な制御法則を用いて得られる確率変数 $x_j=x_j(u_{j-1}, u_{j-2}, \cdots u_0)$ にたいして，$\tilde{x}_j$ は x_j によらない確率変数である．（証了）

（注意）（制御法則 $u=(u_0, u_1, \cdots)$ とする．x_j は u に依存する確率変数で，$x_j^{(u)}$ とかくべきもので，族 $\mathfrak{X}_j=\{x_j^{(u)}; u_t \in \mathfrak{N}_t\}$ の中の一つである。（定理1）のいみは，$\tilde{x}_t^{(u)}=x_t^{(u)}-\hat{x}_t^{(u)}$，が $\mathfrak{X}_t$ の各点 $x_t^{(u)}$ にたいして一致する．つまり $\mathfrak{X}_t$ の各点の $\mathfrak{N}_t$ への射影が1点 $\tilde{x}_t$ に一致することである．上の証明から，$\tilde{x}_j''=\tilde{x}_j'$ が成立つのは，システムの線形性が本質的である．ξ_k, η_k の独立性はいらない．）

最適制御の推定を計算的に作ることによって，$u_t^*=D_t\hat{x}_t$ であることを証明する．実現可能な最適制御は，最適な virtual control v_t^* の最適推定に他ならない．定理1の注意にもとづいて，virtual equivalence を証明し，それによって separation を導びく2段に分ける．

$$R_j^*=\operatorname*{Min}_{u_j \cdots u_N} E\{L_j\},$$
$$V_j^*=E(V_j^*(x_j)),$$
$$R_j=E\{Q_{j+1}x_{j+1}^2+H_ju_j^2+R_{j+1}^*\}, \tag{19}$$
$$V_j(x_j)=E^{x_j}\{Q_{j+1}x_{j+1}^2+H_jv_j^2+V_{j+1}^*(x_{j+1})\}, \tag{20}$$

と書く．直接の目的は，$R_j^*=\operatorname*{Min}_{u_j \in \mathfrak{N}(j)} R_j$ を最小にする $u_j^* \in \mathfrak{N}(j)$ を求めるのであるが，将来は virtual control v_t^* を用いるとして，

$$M_j=E\{Q_{j+1}x^2_{j+1}+H_ju_j^2+V_{j+1}^*\} \tag{21}$$

を考える．これは最初の1ステップを実視可能な u_j に取り実現された x_{j+1} によって将来は virtual control を用いるときの cost である．この混合した cost M_j を最小にすることが，R_j を最小にすることと同等で，同じ u_j^* を与える（virtual equivalence）．これは後に証明する．始に，この virtual equivalence を仮定すると，u_t^* が v_t^* から直ちに導びかれることを示す．

（定理 2）（Separation theoren）

（i）M_k を最小にする実現可能な制御 λ^* は，

$$\lambda^*=D_k\hat{x}_k,$$
$$M_j^*-V_j^*=(C_{j+1}+Q_{j+1}+H_j)D^2\alpha_j \tag{22}$$

ここに D_k は virtual control と同じ．

(ii) したがって，virtual equivalence を仮定すると，

$$u_k^* = D_k \hat{x}_k \tag{23}$$

(証明) virtual control にたいする途中の結果を用いる．$t=j$ における制御を λ とかいて，(12), (14), (16) を用いると，

$$M_j - V_j^* = (C_{j+1} + Q_{j+1} + H_j) E(\lambda - D_j x_j)^2 \tag{24}$$

となる．これを最小にする $\lambda = \lambda^* \in \mathfrak{N}(j)$ が (21) 式の $M_j(x_j)$ を最小にする u_j である．それは，$E^{x_j}(\lambda - v_j^*)^2$ を最小にする λ^* である．$E(\cdot) = E(E^{Y_j}(\cdot))$ であるから，

$$\lambda^* = E^{Y_j}\{v_j^*\} = \hat{v}_j^* = D_j \hat{x}_j. \tag{24a}$$

が示された．また，

$$M_j^* - V_j^* = (C_{j+1} + Q_{j+1} + H_j) D_j^2 E(x_j - \hat{x}_j)^2$$

で（定理 1）により $E(\tilde{x}_j)^2 = \alpha_j$ は x_j によらない．これで (22) が示された．(証了)

(定理 3)

(i) (virtual equivalence) $R_j(x_j)$ を最小にする $u_j^* \in \mathfrak{N}(j)$ は，(21) の $M_j(x_j)$ を最小にする $u_j \in \mathfrak{N}(j)$ と一致する．くわしく言うと，

$$\Delta_j^* \equiv R_j^* - M_j^* = \gamma_{j+1} - \beta_j \tag{25}$$

(ii) 最小の cost $R_j^*(x_j)$ は

$$R_j^* = E\{C_j x_j^2 + \gamma_j\} \tag{26}$$

ここに γ_j は，次で与えられる

$$\gamma_j = \gamma_{j+1} + (Q_{j+1} + C_{j+1} + H_j) D_j^2 \alpha_j, \quad \gamma_{N+1} = 0 \tag{27}$$

(証明) 帰納的に示す．$t=N$ では，$M_N = R_N$ であるから明らかである．一般の $t=i$ で示す．

$$R_j = E\{Q_{j+1} x_{j+1}^2 + H_j u_j^2 + R_j^*\} \tag{27a}$$

において，R_{j+1}^* は帰納法の仮定により，$E\{C_{j+1} x_{j+1}^2 + \gamma_{j+1}\}$ である．したがって，

$$R_j = E\{(Q_{j+1} + C_{j+1})(\phi_j x_j + u_j + \xi_j)^2 + H_j u_j^2\} + \gamma_{j+1}.$$

これを完全平方に書いて

$$R_j = (Q_{j+1} + C_{j+1} + H_j) E(u_j - D_j x_j)^2 + \{V_j^*(x_j)\} + \gamma_{j+1} - \beta_j$$

となる．R_j を最小にする $u_j = u_j^*$ は

$$E(u_j - D_j x_j)^2$$

を最小にするもので，$u_j^* = D_j \hat{x}_j$, これは (24a) の λ^* と一致する．この最小値は，

$$E(D_j \tilde{x}_j)^2 = D_j^2 \alpha_j$$

である．したがって次式を得る

$$R_j^* = (Q_{j+1} + C_{j+1} + H_j) D_j^2 \alpha_j + E\{V_j^*(x_j)\} + \gamma_{j+1} - \beta_j. \tag{28}$$

右辺の始めの 2 項の和は，(22) によって M_j^* である．これで $R_j^* - M_j^* = \gamma_{j+1} - \beta_j$ が示された．(ii) は (28) で，$V_j^*(x_j) = C_j x_j^2 + \beta_j$ に注意すれば，$\gamma_j = \gamma_{j+1} + (Q_{j+1} + C_{j+1} + H_j) D_j^2 \alpha_j$ で γ_j を定義して (26) 式を得る．(証了)

5. 最適制御 $u_j^* = D_j \hat{x}_j$ を合成するためには，D_j と $\hat{x}_j$ が必要である．係数 D_j は最小 cost の係数 C_j と組合わせて，逐次計算される．この D_j は virtual control について計算すればよて．(16) によって C_j が $C_{N+1}=0$ から逐次求められる．D_j はこの C_j を用いて，(14) によって求まる．

制御に必要な $\hat{x}_j$ は一般には求めることができない．とくに準最適な近似として，線形制御法則に限るならば，その中で最適な u_t^{**} は，$u_t^{**} = D_j \hat{\hat{x}}_t$ と書けて，$\hat{\hat{x}}_t$ は求めることができる．u_t^* が v_t^* の最小 2 乗平均誤差推定と一致すると同様に，u_t^* の線形な最小 2 乗平均誤差推定が u_t^{**} であることを次に示す．

Y_t の線形関数全体を $\mathscr{L}(t) = \mathscr{L}(Y_t)$ とする．線形制御を用いるときは，$\mathscr{L}(t)$ は明らかに有限次元空間である．これが非線形制御の場合と異なる．したがって $\mathscr{L}(t)$ はもちろん完備であるからここへの直交射影を考える．$\mathfrak{N}(t)$ への射影 $\hat{v}_t^*$ をさらに $\mathscr{L}(t)$ に射影したものを $\hat{\hat{v}}_t^*$ と

する．$V_t^*(x_t)$ が2次式と $\mathfrak{N}(t)$ への射影の近似と同様に，$\tilde{x}_j=x_j-\hat{x}_j$ が x_j によらない j だけによる変量であることが言える．前と同様に $u_t^{**}=\hat{v}_t^*=D_t\hat{x}_t$ である．これは，$\mathfrak{N}(t)$ を $\mathscr{L}(t)$ におきかえて前と同様に示される．とくに Gaussian 過程の仮定のもとでは $\hat{x}_t=\hat{x}_t$ であるからこれが u_t^* と一致する．

準最適な線形推定 $u_t^{**}=D_j\hat{x}_j$ の $\hat{x}_j$ はつぎのようにして求められる．これを前の結果を証明したような簡単な方法で証明しておく．$u_k^{**}=D_k\hat{x}_k$ で，D_k は予め決っている．

$$x_k=\phi_{k-1}x_{k-1}+u_{k-1}^{**}+\xi_{k-1},\quad y_k=x_k+\eta_k.$$

に $\mathscr{L}(k-1)$ への射影 $P(k)$ を施すと，1ステップ予測は，$\hat{x}(k|k-1)$ などと書くと，

$$\hat{x}(k|k-1)=\phi_{k-1}\hat{x}_{k-1}+D_{k-1}\hat{x}_{k-1}\equiv\Psi_{k-1}\hat{x}_{k-1} \tag{30}$$

ここに $\Psi_{k-1}=\phi_{k-1}+D_{k-1}$ である．また

$$\hat{y}(k|k-1)=\hat{x}(k|k-1)$$

である．$\hat{x}_k$ をこの1ステップ予測 $\hat{x}(k|k-1)$ と y_k による innovation $\tilde{y}(k|k-1)=y_k-\hat{y}(k|k-1)$ による修正の項の和の形に表わされると期待される．つまり A_k を適当に取ると，

$$\hat{x}_k=\hat{x}(k|k-1)+A_k y(k|k-1) \tag{31}$$

（証明） $\mathscr{L}(Y_k)$ は $\mathscr{L}(Y_{k-1})$ と y_k が張る空間である．y_k を $\mathscr{L}(Y_{k-1})$ 内の成分と，これに垂直な成分に分けて，$\tilde{y}_k=\hat{y}(k|k-1)+\tilde{y}(k|k-1)$ と書くと，$\mathscr{L}(Y_k)$ は $\mathscr{L}(Y_{k-1})$ と $y(k|k-1)$ が張る空間である．したがって $y(k|k-1)$ の張る1次元空間を $\mathfrak{Y}(k|k-1)$ と書いて，

$$\mathscr{L}(Y_k)=\mathscr{L}(Y_{k-1})\oplus\mathfrak{Y}(k|k-1)$$

である．x_k をここに射影すると，ある A_k を取って次が成立つ，

$$\hat{x}_k=\hat{x}(k|k-1)+A_k\tilde{y}(k|k-1).\qquad\text{（証了）}$$

（注意） ($y_k=(\phi_{k-1}x_{k-1}+D_{k-1}\hat{x}_{k-1}+\xi_{k-1})+\eta_k$ から，$y_k=\{\Psi_{k-1}\hat{x}_{k-1}\}+\{\phi_{k-1}\tilde{x}_{k-1}+\xi_{k-1}+\eta_k\}$. $\mathfrak{Y}(k/k-1)$ は $(\phi_{k-1}\tilde{x}_{k-1}+\xi_{k-1}+\eta_k)$ が張るベクトル空間である．)

一方，$y_k=x_k+\eta_k$ において，$\mathscr{L}(Y_{k-1})\perp\eta_k$ から

$$\tilde{y}(k|k-1)=\tilde{x}(k|k-1)+\eta_k. \tag{32 a}$$

再び右辺を $\eta_k=y_k-x_k$ を用いて書くと

$$\tilde{y}(k|k-1)=y_k-\hat{x}(k|k-1) \tag{32 b}$$

となる．したがって (31) は，次式となる，

$$\hat{x}_k=(1-A_k)\hat{x}(k|k-1)+A_k y_k \tag{33}$$

これは，(30) の $\hat{x}(k|k-1)=\Psi_{k-1}\hat{x}_{k-1}$ によって次の形である．

$$\hat{x}_{k+1}=(1-A_{k+1})\Psi_k\hat{x}_k+A_{k+1}y_{k+1}. \tag{34}$$

この A_k を求めれば逐次 $\hat{x}_k$ が求められる．

A_k は前向きの帰納法で求めることができる．そのためには，1ステップ予測の誤差の分散

$$\Sigma_k=\mathrm{var}\{\tilde{x}(k+1|k)\} \tag{35}$$

が必要である．これにたいして次が成立つ，

$$\Sigma_{k+1}=\Psi_k^2(1-A_k)^2\Sigma_k+\sigma_\xi^2+\Psi_k^2A_k^2\sigma_\eta^2, \tag{36}$$

$$A_{k+1}=\Sigma_{k+1}(\Sigma_{k+1}+\sigma_\eta^2)^{-1}. \tag{37}$$

（証明） $\tilde{x}(k+1|k)=x_{k+1}-\hat{x}(k+1|k)=\Psi_k x_k+\xi_k-\Psi_k\hat{x}_k$.

ここで，

$$\hat{x}_{k+1}=\hat{x}(k+1|k)+A_{k+1}\{\tilde{x}(k+1|k)+\eta_{k+1}\}$$

を用いると，

$$\tilde{x}(k+1|k)=\Psi_k x_k+\xi_k-\Psi_k\{\hat{x}(k|k-1)+A_k(\tilde{x}(k|k-1)+\eta_k)\}$$

$\hat{x}(k|k-1)=x_k-\tilde{x}(k|k-1)$ とかいて，

$$\tilde{x}(k+1|k)=\Psi_k(1-A_k)\tilde{x}(k|k-1)+(\xi_k-\Psi_kA_k\eta_k).$$

この右辺の各項が平均0，直交することから2乗平均をとると (36) を得る．

第2の (37) を示す．x_{k+1} を $\mathscr{L}(Y_{k+1})=\mathscr{L}(Y_k)\oplus\mathfrak{Y}(k+1|k)$ に射影すると，

$$\hat{x}_{k+1}=\hat{x}(k+1|k)+\tilde{x}(k+1|k),$$

A_{k+1} の定義から，$\mathfrak{Y}(k+1|k)$ への射影 $x(k+1|k)$ は $A_{k+1}y(k+1|k)$ である．

$x_{k+1}-\tilde{x}(k+1|k)$ は x_{k+1} の $\mathfrak{Y}(k+1|k)$ への射影である．したがって，$x_{k+1}-\tilde{x}(k+1|k)=x_{k+1}-A_{k+1}\tilde{y}(k+1|k)$ は，$\mathfrak{Y}(k+1|k)$ と直交する．すなわち，

$$E\{\tilde{y}(k+1|k)[x_{k+1}-A_{k+1}\tilde{y}(k+1|k)]\}=0$$

したがって

$$A_{k+1}E\{\tilde{y}(k+1|k)\}^2=E\{x_{k+1}y(k+1|k) \tag{38}$$

ここで，$E\{x_{k+1}\tilde{x}(k+1|k)\}=E\{\tilde{x}(k+1|k)^2\}$ および，$\tilde{y}(k+1|k)=\tilde{x}(k+1|k)+\eta_{k+1}$ を用いると，η_{k+1} が平均 0 で x_{k+1}，Y_k などと独立なことを用いて (38) から，

$$A_{k+1}\{\Sigma_{k+1}+\sigma_\eta^2\}=\Sigma_{k+1}$$

となる．これは (37) である．（証了）

6. 以上によって，始めにあげた線形システム (1), (2), (3) について，ξ_t, η_t の分布の形を仮定せずに，また線形制御法則の制限も，separation theorem には必要がない．証明の過程でつぎのようなことが示された．

(Ⅰ) $\mathfrak{N}(t,u_i(i<t)$ が u_i によらない．

(Ⅱ) $\tilde{x}_j$ が，x_j によらない（制御法則によらない）という推定誤差 $\tilde{x}_j$ の一意性は，線形システムという仮定が本質である．ξ_t, η_t 相互の独立性あれば，各々の独立列の仮定はいらない．とくに $E(\tilde{x}_j)^2=\alpha_j$ は，j だけによる．separation に必要なのはこの事実だけであった．

(Ⅲ) M_j を最小にすることは便宜上，1 step だけ実現可能な制御に分けた。(定理 1) は，本質的に，線形システムの状態推定が制御のない ($u_t\equiv 0$) open loop 系の推定と同等であることを示す。これ自体が別の separation を与えている．

(Ⅳ) V_j^* だけでなく，R_j^* が，2次式 $C_jx_j^2+\gamma_j$ の平均形である．

(Ⅴ) 最適な $u_j^*=\overline{v_j^*}$ は，v_j^* の最小2乗平均誤差の推定 $\hat{v}_j^*$ に等しい．

(Ⅵ) 上の (I) を言いかえて，$e_j\in\mathfrak{N}(j)^\perp$ が存在して，$x_j=\hat{x}_j+e_j$. $\tilde{x}_j=e_j$ が x_j によらない一定の確率変数である．従って，x_j が張る線形空間（制御 u_j で変わるから1次元でない）を $X(j)$, e_j が張る1次元空間を $\mathfrak{E}(j)$ をかいて，

$$X(j)=\hat{X}(j)\oplus\mathfrak{E}(j)$$

と書ける．ここに $\hat{X}(j)$ は，$\mathfrak{N}(j)$ への射影 $P(j)$ による $X(j)$ の値域である．

(Ⅶ) 線形制御法則の場合とのちがいは，$\mathfrak{N}(t)$ に対し，$\mathscr{L}(t)$ が有限次元なことである．

7. 結　語　feedback の driving coefficient D_k の逐次計算は，実際には，効率のよいものとは言えないが，少くとも理論的に結果を導びくには使える．ここに考えたシステムでは動的外乱 ξ_k は 0 としても結果には影響がない．外乱が 0 のときは時間的変化を元に修正して独立標本からの推定と同様になるから，これと certainty equivalence (x_t のある推定 $\bar{x}_t$ を真の x_t と見て制御できること，separation の特殊な場合である）とから，独立標本による推定の問題との関連も考えてみたい．さらに，$\hat{x}_t$ を（一般にはある推定 $\bar{x}_t$ を）いかに求めるか，この $\hat{x}_t$ を求めるためのデータの簡約化の方が，はるかに複雑である．

準最適の線形推定に限るならば，(33) のように，データ Y_t を使わずに，最新の y_t と，$\hat{x}_{t-1}$ から $\hat{x}_t$ が求められる．Y_t の歴史は $\hat{x}_t$ の中に縮約されている．

一般には，$v_t^*(x_t)$ の最適推定という制限された用途に関して，データ Y_t と同等な，(いわば，criterion と用途を制限して十分統計と同等な）量で，スカラーに限らず，次元の固定された統計量で，y_t によって逐次更新できるものが存在するかという問題である．仮りにこれを equivalent な統計量というならば，(上の例では $\hat{x}_t$ がequi valent)，これは，上の線形制御法則の場合以外には知らない．時間的に発展するシステムの統計的な問題の一つとして，この点を考察するのは意味があるかも知れない．さらに1次元では，separation が成立てば，certainty equivalent である．このことは，ある推定 $\bar{x}_t$ を用いて，$u_t^*=f_t(x_t)$ ならば，$\bar{x}_t=$

$v_t^{*-1}(f_t(x_t))$ (v_t^* の１つの逆) を最適推定として，$u_t^*=v_t^*(\bar{x}_t)$ と書けるから明らかである.

ベクトルのシステムでは，equivalent な統計量の次元と，x_t と u_t の次元によって，このことは成立たなくなる．ベクトルのシステムでは，certainty equivalent という強い意味の separation と，そうでない，弱い separation を区別する必要も考えられる.

最小２乗平均誤差以外の評価では，一般には separation な成立たないが，形式的に最尤推定では separation が成立つことは明らかである。

$V_j(x_j)$ に相当して $R_j(x_j)=E^{x_j}(L_j)$ を考えることは制御 u_j を用いる系では (x_j, Y_{j-1}) が状態で，x_j は状態をして不足すること，および causality から不合理であろう.

(このノートの結果は，昭和 45 年度の科学研究費による研究の一部である)

統計数理研究所

文　　献

[1] Meditch, J.S.; Stochastic Optimal Linear Estimation and Control, McGraw-Hill, 1969.
[2] Tou, J.T.; Optimal Design of Digital Control Systems, Academic 1963.
[3] Whittle, P.; Prediction and Regulation, The English Univ. Press, 1963.
[4] Zaanen, A.C.; Linear Analysis, North-Holland Publishing Co., 1956.