調査における回答の機構について*

鈴木　達三・高橋　宏一

(1969年12月受付)

On the Analyses of Data obtained from Multi-wave Panels

Tatsuzo Suzuki and Koiti Takahasi

In observing the behavior of the same individual at different times, a difficult problem of interpretation often arises. Unless a person responds in the same way each time he is observed, differences or variations in his responses must be accounted for.

When individuals are given the same stimulus two or more times, some of them respond differently to it, even when the aggregate response frequency has not changed. For example, in the data of Table 1, the marginal frequencies remain about the same on the second observation as on the first, even though a large proportion of persons gave different responses on the two occasions.

In a case such as this, it is reasonable to consider a model which takes into account the indirect relationship between underlying state and response.

The models developed in this paper are closely related to Lazarsfeld's latent structure analysis, for the underlying structure of classes is the same, and the assumed relation of the classes to the observed data is the same. But there are some differences between Lazarsfeld's model and ours: the former considers a set of responses of an individual at any single survey, and the latter considers a sequence of independent responses of an individual obtained from multi-wave panels.

In section 1, we consider the empirical regularity of the data obtained from two-wave panels. In section 2, we discuss the survey operation from various point of view.

From section 3 to section 6, we develop a model of response uncertainty and give some analytical consideration of this model in the dichotomous case, treating the problem as a moment problem with the compound binomial distribution, and especially in section 6, we give some characteristics of the underlying structure using the data obtained from three-wave panels.

In section 7, further discussion and the general model are given, and finally in section 8, some specific cases of this model are shown.

The Institute of Statistical Mathematics

目　次

§1 はじめに

通常の社会調査（世論調査，意見態度調査等）では，質問票を用い，被調査者に対して一定の形式で質問し，それに対する回答（反応，観察）を収集して分析する方法をとる．この場合，社会調査が実際の現象として，どのような諸様相を示しているか，ということが具体的に分ら

* この研究は文部省科学研究費（昭和43年度一般研究C 81011，昭和44年度一般研究C 83002）による研究成果の一部である。

なければ分析を進めるのはむずかしい.

この点に関して，われわれはこれまで社会調査法の研究を重ねている*. この報告もその一環をなすものであり，とくに調査における被調査者の回答の模様に焦点をあてて考察する. 調査によって得られる回答比率について考えた場合，たとえば，ある質問項目について「賛成」60%，「反対」40% という数字が得られた時，被調査者個人個人が確定した意見をもっていて，それがそれぞれ調査の回答となって現われていれば，回答をそのまま質問文と関連させて解釈することも可能だし，個人個人について分析を進めることも可能である. ところが，各個人についてみると，ある場合には「賛成」，ある場合には「反対」という回答になり，それぞれの回答割合が誰でも 60% と 40% という時も，調査の結果は同じようになるが，結果を解釈する時，あるいは質問文との関連を考える時に，回答をそのままの形で上と同じように扱うことは出来なくなる.

われわれが調査を企画するとき，たとえば，ある問題を設定して，それについて人々はどう考えるか，どのような質問で意見を聞き出すか，どのような質問項目をもうければ当面の関心事をはっきりした形で聞き出すことが出来るか等のことを考えて，質問項目（質問文と回答選択肢）を作成するのが普通のやり方であろう. この場合，調査の結果得られた特定質問に対する回答は，いま問題にしている事柄に出来るだけ密接に結びついていることを期待しているのであるが，これがどの程度そうなっているかは，ただ1回の調査だけでは判明しない.

このようなわけで，はっきりと示された回答の分布ばかりでなく，被調査者の内部での意見のあり方と質問項目とを関連させて回答結果を考察するため，同じ人に同じ質問項目をくり返して調査研究するという考えが必要となる.

ところで，われわれが調査企画のときに目的とするものは，上にのべたように，被調査者の意見等であるとすれば，これは被調査者内部のことである. 何らかの方法で内部のことを知ることが出来れば問題はないが，実際にわれわれに分かることは，調査の結果得られる回答だけであるから，これらの回答結果の集積からどのようなことが分るか，どのようなことが分析の前提として考えられるかということが問題になる.

これまでの調査法上の研究** によれば，断片的なものであるが，つぎのようなことが分ってきている. まず，調査の結果（回答の分布状況）は，調査時期がそれ程開いていないとき（半年前後）には，安定している（客観的情勢の影響をうけないような質問項目について）. しかし，同一人をくり返し（前後2回）調査してみると，回答の周辺分布はやはりほとんど変化しないが，個人の回答の変動はかなり存在する. そして，この変動の様子は何らかの特定の原因があって起っているという状態ではなさそうにみえる. その上いくつかの質問項目についての前後調査の結果は，前後クロス表でみると対角線に関してほぼ対称という様子がみられた（第1表参照）.

また，前後調査の回答の安定性（一致率 $C(r)$）は前後調査の調査間隔が短い（1ヶ月以内）あいだは，調査間隔がのびるにつれて，やや急速に減るが，調査間隔が半年前後ではそれ程大きな変動もなく安定している（自記式の場合は面接式にくらべてやや安定性が高い）.

このほか，回答の比率は質問文が同一であっても回答選択肢のあり方，調査方式（回答選択肢を被調査者にみせるかどうか，質問文をみせるかどうか等）によって変ってくる***.

このような周辺分布の安定性とクロス表の対称性に着目して，調査における回答機構の確率モデルをつくっていこうとするなら，これまで提案された多くのものがそうであるように，潜在構造的なものか定常マルコフ連鎖か，それらの組み合わされたものが考えられる（§2 参照）. これらのモデルは上述の性質を満たすことは容易にわかる. できるだけ一般的な枠組みとしてマルコフ連鎖の状態の関数のつくる過程を考えることができるが（§7 参照），この報告では複合2項分布モデル（§3 参照）が主として扱かわれる.

* 文献〔1〕,〔2〕参照
** 文献〔1〕参照
*** 文献〔3〕参照

第1表 a) 「スジを通すか丸くおさめるか」(面接式，全国調査，前後調査間隔約6ケ月)

問 〔リスト〕何人かで集まつて，なにかを相談をしているとき，あなたは，
『スジを通すこと』に重点をおく人と
『まるくおさめること』に重点をおく人と
どちらの人の方が感じがよいと思いますか。
この表の中から，どちらか1つをえらんでください？

1 「スジを通すこと」に重点をおく人	
2 「まるくおさめること」に重点おく人	
3 その他〔記入〕	4 D. K.

前 ＼ 後	1	2	3	4	計	%
1 スジを通す	307	159	27	5	498	*37*
2 まるくおさめる	153	540	28	7	728	*55*
3 その他	39	36	18	3	96	*7*
4 無 答	6	9	1	1	17	*1*
計	505	744	74	16	1339	*100*
%	*38*	*56*	*5*	*1*	*100*	

単純一致率* 64.7,　$C(r)=0.36$

第1表 b) 「先生が悪いことをした」(面接式，全国調査，前後調査間隔約6ケ月)

問 〔リスト〕「先生が何か悪いことをした」というような話を，子供がきいてきて，親にたずねたとき，親はそれがほんとうであることを知つている場合，子供には
「そんなことはない」
といつた方がいいと思いますか，それとも
「それはほんとうだ」
といつた方がいいと思いますか？

1 「そんなことはない」という	
2 「ほんとうだ」という	
3 その他〔記入〕	4 D. K.

前 ＼ 後	1	2	3	4	計	%
1. そんなことはない	252	169	36	13	470	*35*
2. ほんとうだ	152	471	47	23	693	*52*
3. その他	40	52	28	7	127	*9*
4. 無 答	14	21	10	4	49	*4*
計	458	713	121	47	1339	*100*
%	*34*	*53*	*9*	*4*	*100*	

単純一致率* 56.4%　$C(r)=0.27$

注〔リスト〕とある質問は回答選択肢を印刷した表を回答者にみせ，その中から適当と思われるものを選択させる．回答リストには回答欄のその他，無答．以外の選択肢を印刷してある。

* 単純一致率および一致率 $C(r)$ については文献 [1], [2] および後の §8 参照

第1表 c) 「教育の問題に関心があるか」 (同上)

問　〔リスト〕「教育の問題」についてはどうですか？

	1. あまり関心がない	2. 関心があるといえるだろう	3. 非常に関心がある	4. その他〔記入〕	5. D. K.
教育問題	1	2	3	4	5

前＼後	1	2	3	4	5	計	%
1. あまり関心がない	28	40	19	2	1	90	*14*
2. 関心がある	35	136	86	1	3	261	*40*
3. 非常に関心がある	17	87	169	0	2	275	*42*
4. その他	1	2	1	0	0	4	*1*
5. 無　答	7	5	4	1	6	23	*3*
計	88	270	279	4	12	653	*100*
%	*13*	*41*	*43*	*1*	*2*	*100*	

単純一致率　51.9,　$C(r)=0.24$

第1表 d) 「日本の防衛問題に関心があるか」 (同上)

問　〔リスト〕「日本の防衛問題」についてはどうですか？

	1. 関心がない	2. あまり関心がない	3. やや関心がある	4. 関心がある	5. その他〔記　入〕	6. D. K.
日本の防衛問題	1	2	3	4	5	6

前＼後	1	2	3	4	5	6	計	%
1. 関心がない	30	36	16	16	1	9	108	*16*
2. あまり関心がない	28	63	39	16	1	6	153	*22*
3. やや関心がある	15	44	77	40	2	6	184	*27*
4. 関心がある	14	23	46	107	0	4	194	*28*
5. その他	1	0	1	0	0	0	2	*1*
6. 無　答	14	12	6	3	0	10	45	*6*
計	102	178	185	182	4	35	686	*100*
%	*15*	*26*	*27*	*26*	*1*	*5*	*100*	

単純一致率　41.8,　$C(r)=0.24$

§2　作業仮説のための考察

1)　実例から

前後調査の実際例* をみると前§で考えたような極端な状況はみられない．その他の質問でも程度の相違はあっても同じような特徴がみられる．

すなわち，いずれの場合を考えても前§でのべたような，全部が確定した意見をもっているという状態でもないし，そうかといって，誰でもが同一の片よったサイコロをふって回答しているという状態でもない．強いていえば，両者の中間というか，両グループのまざり合ったような状況を示している．

また，質問内容との関連についてみると，「職業」とか，「宗教を信じるかどうか」(第2表参照) とか，「学歴」等のように事実あるいは実態を調査している項目での安定度は高く，意

* 以下にのべる例示については第1表 a) b) c) d) のほか文献〔1〕,〔4〕参照.

第2表 「宗教を信じるか」（面接式，全国調査，前後調査間隔約6ヶ月）

〔宗教〕 a) あなたは宗教を信じていますか？

b) それは何という宗教の何派ですか？

1. 信じていない　　2. 信じているが宗教団体にはぞくしていない

3. 信じている（宗派名をくわしく下に記入する）

宗派名

0. D. K.

前 ＼ 後	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x	0. sp.	計	%
1. 信じない	677	53	0	7	2	4	45	1	2	3	1	795	*59*
2. 信じている	65	25	2	0	2	3	30	3	3	2	1	136	*10*
3. 天理教，金光教	2	1	17	1	0	0	0	0	0	0	0	21	*1*
4. 創価学会	6	2	0	35	1	4	2	0	0	0	0	50	*4*
5. 立正佼成会	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	9	*1*
6. 日蓮宗，法華教	5	2	0	1	0	21	1	0	0	1	0	31	*2*
7. その他の仏教	44	32	1	0	0	1	173	2	1	0	0	254	*19*
8. その他の新興宗教	1	1	0	0	0	0	2	8	0	0	0	12	*1*
9. キリスト教	3	4	0	0	0	0	1	1	5	0	0	14	*1*
x 神道	5	2	1	0	0	0	1	0	0	2	0	11	*1*
0. ps. 脱落	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	2	6	*1*
計	809	123	21	45	14	33	256	15	11	8	4	1339	*100*
%	*60*	*9*	*1*	*3*	*1*	*3*	*19*	*1*	*1*	*1*	*1*	*100*	

単純一致率 72.7,　$C(r)=0.54$

見についての質問項目では安定度が低くなっている傾向がみられる．そして，意見の項目についても簡単に質問文の文脈が理解できるようなもの，たとえば「男と女のどちらに生まれたいか」とか「内閣を支持するかどうか」等の項目では安定性が比較的高く，質問文が長くその文脈をたどるのがそれ程容易でない項目では低めになっている場合が多い．これらのことから考えると，つぎのようなことを一応検討しておくのが，データ解析上有利であろう．

2) 概念的枠組の覚書

以下の考察では質問文を単独で扱うことはほとんどなく，回答選択肢と関連させて扱うことが多いので，質問文と回答選択肢を組にして考え，これを便宜上，「質問」と呼ぶことにする．

われわれが，知りたいことは，一般の人々の個人個人の内部の何かであって，それを「質問」を判定の道具として利用して分析していくことを考える．

i) 質問と個人の心的内容との関連

ここで，「質問」と個人の心的内容との関連を考えてみるとおよそつぎのようなことがいえるだろう．すなわち質問（文）には，それに使用されている言葉によって示される共通な社会的な意味があり，質問される被調査者が，その共通なものを共有する場合は，そこから（その中にあるいくつかの可能性の中から）可能な選択をする．それが回答となって表われると考えることが出来る．また，「質問」自体は回答選択肢により，それが質問された時点において，それぞれの回答肢の選択をした個人とそうでない個人を「質問」に固有の割合に分割することになる．

すなわち，同じ事柄を，個人の側に立って，個人による可能な社会的諸体系の選択とみるか，それとも「質問」の側に立って質問の示す回答選択肢（社会的諸構造）による個人の分類とみるか，によって異なった角度からみることのできる，相互選択の関係にあるといえる。質問それ自体が言語反応による操作を前提にしているわけであるが，「質問」における回答と回答者との関連も言語の場合と同じようになると考えられる．

ii) 質問文における1つの言語学的考察

ところで，質問文に用いられる言葉が，全く一義的なものであれば問題は起らないだろう．

(この場合回答はそのまま回答者のその時点における心的状況の表現になるだろう)．しかし，実際には多かれ少なかれ，「質問」は直接的表現ばかりでなく，比喩的あるいは隠喩的表現を含んでいる（意図しなくとも，その可能性がある)．言語学の説によれば，これらの表現において重要なのは言葉の辞書的な意味よりも，その言葉によって連想される常識の体系（含意体系）である．すなわち，われわれが共有する暗黙の共通部分が問題であるということがいえる．

従って，「質問」において研究の対象になるものは，その(社会的，言語的体系という意味での）体系の集合的性格であり.「集合性」から本質をみていけばよいわけで，個々別々な言葉の集りとしての質問文ではなく，また，文章として書かれたままの質問文でもなく，当然のことながらその質問文を用い一定の水準で調査した結果が研究の対象になることになる．

iii) 回答選択肢について

このほか，回答選択肢のもつ意味（価値）はどのように考えられるかというと，これは1つには，1つの質問項目について作成されたいくつかの選択肢相互の差異に基ずく関係，いま1つは，回答形式による選択肢の守備範囲の変化として考えられる．後者はたとえば，回答形式を開かれた質問（選択肢以外のその他の回答を許す）にしておくか，閉じた質問にしておくか，あるいは，「賛成」および「反対」の中間に「どちらともいえない」という回答肢を入れるかどうかによって，それぞれの選択肢の守備範囲が変ってくる等のことである*．現象面には回答比率の変化として表われるだろう．

iv) 調査誤差（調査実施上の）

このようないくつかの言語としての問題のほか，操作上の誤差の問題がある．これは，正規の手続き通りに，企画者の指示した一定の水準での調査が行なわれた場合からのへだたりと考えられる（たとえば，質問以外の言葉をさしはさんだ場合，故意に特定回答を引き出すような調査方法をとった場合等がこれに当る)．この他にも「賛成」を「反対」ととりちがえるような事務的な誤りもあるが，これらの誤差は一定水準の訓練をうけた調査員ならほとんど起らない（あるいは一定水準以下にすることができる）ものと考えられる．

以上の考察からも分かるように，道具としての「質問」は質問内容との関連からみた場合，必然ともいえるような変動要因（不確定さの要因）をもっていることになる．そして，それが調査の現象面に現われる回答変動の主要な要因として考えることができよう．

3) 2, 3 のモデルについて

以上のべたように，実際の調査例での各質問における回答変動の大きさの模様と，質問内容(事実についての質問か意見についての質問か等）との関係は，質問文や回答選択肢につていみた言語的な諸特徴からの類推と傾向的には結びつくようにみえる．

一方，われわれは，調査方法全般を含めて「質問」というものを（質問文とそれに付属して作られた回答選択肢と一組にして考え)，被調査者の内部において，この特定の質問の内容（あるいは，この特定の質問を用いて調査したという現象）と，何らかの意味で関連している心的状態を測定するために採用した1つの道具（測定具）とみなしているわけである．

従って，道具として考えた特定「質問」の性質を，回答の模様から記述し，比較可能な特性値を作ることが出来れば，いろいろの場合（質問の可否の判断等）に好都合である．しかし，そのためには，回答の模様を考える上で土台となる仮説（モデル）を立てる必要がある．

これまでのデータ (data) からみると，どのようなモデルがより一層妥当なものかということはまだはっきりきめられる状態ではないので，研究を進める前提として，かなり一般的な枠組み程度のモデルを考えてデータの収集をはかることにする．

モデルを考えるとき，一応つぎのことを前提としておく．まず，測定の道具として用いる

---

* 文献 [3], [5] 参照

「質問」は時期的にみて安定している可能性が強いと思われるものをえらぶことが出来る.

また，回答変動の原因として，被調査者個人におけるコントロールできない部分の変動要因と，測定誤差にかかわる部分とが考えられるが，後者は一定の水準における調査の場合は無視できるとする.

このほか，くり返して同じ人に調査する場合，前後調査の間隔が適当であれば，前後の調査相互の間の影響（記憶等）は一定の型になっているとしておく（無視できる場合も含めて）.

i) 潜在構造型モデル（回答確率型モデル）

実例からみてモデルとして，いわゆる確率モデルをとり上げる場合，まず考えられるのは，個人の回答が特定の確率的現象になっているというモデルである．すなわち，特定質問について考えたとき，たとえば，可能な回答選択肢がk個あるとき，一般に，個人iの回答肢jに対する回答確率を，p_{ij}とすれば第3表のように表わすことが出来る．ここで

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1.$$

第 3 表

個人 \ 回答確率	1	2 ⋯ j ⋯ k
1	p_{11}	$p_{12} \cdots p_{1j} \cdots p_{1k}$
⋮	⋯	⋯
i	p_{i1}	$p_{i2} \cdots p_{ij} \cdots p_{ik}$
⋮	⋯	⋯

各人の回答確率は一般に異なっていると考えるが，実際には，各個人がいくつかのクラスに分かれていると考える場合がよく用いられる．また回答肢は，「賛成」，「反対（そうでない）」という2項選択型が基本的で多く用いられるので，2項型のものを考えていく.

このようにしてみると，これは，いわゆる Lazarsfeld(1959) の潜在構造（クラス）モデル*と類似しているので，潜在(構造)型モデルということにする．しかし，ラザースフェルドの潜在クラスモデルでは，単一の調査で何問かを組にして質問をし，その回答模様から，それらの背後にある潜在的な構造を求めるという考えであり，一般に，とり上げる質問の数より，潜在クラスの数が少ないと考えて，各クラスiに属する人の各質問に対する回答は，その回答確率がクラスで一定していて，質問間では独立として分析を進めるが，われわれのモデルでは，各人が，各調査ごとに一定の回答確率で独立に回答した回答系列の模様から分析することになる.

この場合，潜在クラスの数，および各クラスでの回答確率について特定の型を与えたモデルは [8]，[9] にある，後にのべる §8 でもいくつかの例をとり上げる.

ii) マルコフ型モデル

つぎに，変動について特定の型をもうけるモデルとして，マルコフ型のモデルを考える．この場合，前後調査における，回答の変動原因として，回答時における被調査者の状態 (state) の変化を考える．この状態の選択あるいは状態の変化のシステム (system) は一般には，個人にとって特有のものであるが，最も簡単なものは全体が共通の1つのシステムで考えられるときで，これは通常マルコフ型モデル ([10]) になる．このような型をいろいろ拡張することも出来る．複合したシステムを考えると，たとえば回答時の個人の状態により回答システムが異なるような，潜在レベルでの状態の変化システムを考えることも出来，この潜在レベルでの状態の変化が連続マルコフ的だとして Coleman (1964) [11] はモデルを構成している.

また，[12] では，政党支持その他が時間を変換したマルコフ過程に従うことを論じている.

iii) その他のモデル

a) 時間減衰モデル

最も簡単なものの1つとして，潜在的クラスとして回答の確定しているクラスと回答の全く浮動しているクラスと2種類の型を考え，それが時間的にみて潜在レベルで特定の変換システムに従って変換しているモデルを考える.

このモデルは，潜在クラスでの変換はないものとし，浮動クラスの変動をマルコフ的にすれ

* 文献 [6]，[7] 参照

ば，いわゆる Mover-Stayer 型のモデル（[13], [14]）になる．

われわれは，確定クラスから特定の時間的流出を考え，特に前後調査の場合，前調査終了直後の初期の段階における記憶による影響をみるモデルを考えている*．この場合，仮定として，浮動クラス（あるいは無意見クラス）が調査をしたという刺戟で回答する状態になり，それが時間と共に元の状態に戻るということを考え，元に戻るには記憶の鎖が一番弱いところで立ち切られる，あるいは，同じような刺戟のつみ重なりがあるレベルになるとそうなるというモデル等を考えている．

b) 二重構造モデル

このほか，ある回答選択肢が選択されるためには，その人の内部で，選択可能ないくつかの軸のうちどれかが選ばれ，どの軸が選択されたかによって回答の様子が異なるものとする．各人が軸を選ぶ割合は一般に各人あるいはクラスによって異なるとすると，潜在クラスに属する人が，まず潜在的な軸を選択して，それから回答をするという，いわば二重構造的なモデルを考えることになる．質問の主旨が同じような(すなわち，同じような軸が共通に考えられるような）質問の組が考えられるときなどがこれに当るが，普通の潜在クラスモデルと回答確率モデルとを複合したものとも考えられる．

以上，いくつかのモデルについて考えたが，今のわれわれの段階では，どのモデルが妥当であるかをモデルからしらべるという立場ではなく，データを説明するために，いろいろのモデルを平行して考え合わせ，モデルが成立つデータの範囲はどうか，データをふやすというとき，どのような企画をたてるのがよいか，また結果的にデータがふえたとき，どのようなことがいえるかということを考えていく立場である．ここで，われわれの立場からのモデル化についてみると，モデルの妥当性は，そのモデルが多数のデータによく合ったということではなくて，別の観点から判断さるべきだということがいえる．

普通の場合はモデルが多数のデータに合う（あるいは多数のデータをよく説明できる）ならばよいだろうが，今の場合，後の §8 にあるように，相当ちがった考えの下に作られたモデルでもデータによく合うので，このような観点からモデルの適否を判断することは危険である．すなわち，モデル化というとき，モデルを特殊化してデータに合わせていくのは現象的にみて(今の場合は回答機構そのものについて）相当の裏付けがなければうまくないと考えられる．

われわれは，できるだけ一般的な枠組みの中でどの程度のことがいえるか，どのような計画が立てられるかを検討していこうとしている．

この論文では以下潜在構造型のモデルについて2肢選択，調査回数3回の場合の分析法を調べていく．§3 から §6 にかけてモデルの成立する条件やパネル調査結果の分析に有効と思われる特性値についての検討を数値例とともに示す．

§7 では当節で述べたいくつかのモデルがマルコフ連鎖の状態の関数のプロセスとして表現できることを注意しておく．

§3 複合2項分布モデル

同一質問を n 回同一人に対して行なうときの回答について次のことを仮定する．質問は2肢選択で回答は‘1’或いは‘0’の何れかとする．回答は確率的で‘1’の確率が p の Bernouli 試行を成すものとする．したがって n 回中‘1’と回答する回数は2項分布 $B(n, p)$ に従がう．p は一般に各人ごとに異なっている．母集団における p の分布の分布函数を $\Lambda(p)$ としよう．各人の回答は独立とみなす．また無限母集団で考える．

このとき，母集団から抽出された N 人の調査結果は，複合2項分布

$$(1)\qquad p_k=\int_0^1\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}d\,\Lambda(p),\quad k=0,1,\cdots,n$$

* 近い将来に発表の予定である．

からの大きさ N のランダム・サンプルとみなすことができる．

われわれの当面の目的は p の母集団分布 $\Lambda(p)$ について出来るだけ多くの情報を取り出すことである．モデルが正しい場合には $\Lambda(p)$ が確定すれば回答機構は完全に決定される．そしてその質問に対する回答機構を種々の指標，例えば，$\Lambda(\{0\})+\Lambda(\{1\})$ $(\Lambda(A),\ A\subset[0,1]$, は A の確率を示す)，$\Lambda([0,\alpha]\cup[1-\alpha,1])$，$\varepsilon=\dfrac{E\Lambda^2+E(1-\Lambda)^2-(E\Lambda)^2-E(1-E\Lambda)^2}{1-(E\Lambda)^2-(1-E\Lambda)^2}$ ([2] 参照)，が計算される (Λ で以て $\Lambda(p)$ にしたがう確率変数をも示す)．モデルの妥当性についての議論は後廻わしにして暫らくその正当性は仮定して話を進める．前述したように調査 (n 回パネル) から得られるデータは複合2項分布 (1) からの大きさ N のサンプルとみなされる．よって (1) の p_k についての情報は直接的に含んでいるが，Λ の分布については，いわば間接的な情報しか含まない (Λ の分布からの直接のランダム・サンプルではないという意味で)．そこでまず p_k が既知として (例えば N が十分大きいな場合などそれに近い) 事情を調べてみる．そのため

(2) $$\mu_l=E(\Lambda^l)\quad l=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

とおく．(1) を書き直すと，

$$p_k=\binom{n}{k}E\{\Lambda^k(1-\Lambda)^{n-k}\},\quad k=0,1,\cdots,n$$

であるから，これから

(3) $$p_k=\binom{n}{k}\sum_{l=k}^{n}\binom{n-k}{n-l}(-1)^{k+l}\mu_l,\quad k=0,1,\cdots,n,$$

(4) $$\mu_l=\frac{1}{\binom{n}{l}}\sum_{k=0}^{n-l}\binom{l+k}{l}p_{l+k},\quad l=0,1,\cdots,n,$$

を得る．

すなわち p_k, $(k=0,1,\cdots,n)$ が既知 (乃至は推定量が得られている) ということは Λ の分布についていうと n 次までのモーメントが定まっていることになる．いいかえれば p_k が既知としても Λ の分布については n 次までのモーメントが確定するだけで，それ以上のことについては何もいうことができないということである．勿論 Λ の分布に関する何らかの仮定，例えば分布型についての仮定，などがあれば別であるが，むしろわれわれは今，そういったことについての情報を獲得しようとする段階にあるのだから，ノンパラメトリックな立場で進んでみることが必要である．

こうした考察から Λ の分布についての推論はチェビシェフ型の不等式に基くことになろう．そのことは後節で改めて述べることにして，ここでモデルの妥当性について触れておく．既に述べたように，もしモデルが正しいなら，調査結果は複合2項分布からのサンプルとみなされるのであった．そしてひきつづき期待値で話を進めるなら，p_k が複合2項分布の確率であるためには，それを (1) のように表現する $[0,1]$ 上の分布函数 $\Lambda(p)$ が存在することが必要である．前述の関係 (3), (4) からこのことは次のように述べることができる．

$p_0, p_1,\cdots,p_n\left(0\le p_i\le 1,\ i=1,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1\right)$ が複合2項分布であるための必要十分条件は，

$$\mu_l=\frac{1}{\binom{n}{l}}\sum_{k=l}^{n}\binom{k}{l}p_k,\quad l=0,1,2,\cdots,n$$

が，
$$\mu_l=\int_0^1 p^l\,d\Lambda(p),\quad l=0,1,2,\ \cdots,\ n$$

なる 'the reduced moment problem' ([15] 参照) が解を有することである (有限個のモーメントに対応する値が指定されたときの分布の存在性についての問題). このモーメント問題について，当面のパネル調査結果の分析に必要な事項を次節でまとめておく.

§4 The reduced Hausdorff moment problem について

定理 1. ([15] p. 1, Theorem 1.1 及び同 p. 77, Theorem 3.1 参照)

S を単位区間 $I=[0, 1]$ に含まれる閉集合，$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ を与えられた n 個の実数とする. このとき，

$$\int_0^1 x^\nu \, dF(x)=\mu_\nu, \quad \nu=0, 1, \cdots, n, \quad (\mu_0=1 \text{ とする}),$$

をみたす I 上の確率分布で，その台が S に含まれる如き F が存在する必要十分条件は，$g(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ を S 上では非負な任意の n 次の多項式 (実係数) とするとき，$\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n$ が次の条件をみたすことである；

$$a_0\mu_0+a_1\mu_1+\cdots+a_n\mu_n \geqq 0.$$

上記引用部分に証明は示されているといえるが便宜のため付録に示しておく.

定理 2. ([15] p. 77, Theorem 3.1 参照)

区間 $[a, b]$ で非負な n, 次多項式 $g(t)$ は次のような一般形をもつ：

$n=2m$ のとき；

$$g(t)=\left(\sum_{i=1}^{m} x_i t^i\right)^2+(t-a)(b-t)\left(\sum_{i=0}^{m-1} y_i t^i\right)^2$$

$n=2m-1$ のとき；

$$g(t)=(t-a)\left(\sum_{i=0}^{m-1} x_i t^i\right)^2+(b-t)\left(\sum_{i=0}^{m-1} y_i t^i\right)^2$$

ここで，x_i や y_i は任意の実数である.

定理 2′. $a<b<c<d$ として $[a, b]\cup[c, d]$ で非負な 1 次，2 次，3 次の多項式は，それぞれ次のような一般形をもつ；

i) $x_0^2(t-a)+y_0^2(d-t)$

ii) $(x_0+x_1t)^2+y_0^2(t-a)(d-t)+z_0^2(t-b)(t-c)$

iii) $(x_0+x_1t)^2(t-a)+(y_0+y_1t)^2(d-t)+(t-a)(t-b)(t-c)u_0^2$
$+(t-b)(t-c)(d-t)v_0^2.$

ここで，x_i, y_i, z_0, u_0, v_0 は任意の実数である.

証明は付録.

定理 1 と定理 2 から直ちに，次の定理が導かれる.

定理 3. ([15] p. 77, Theorem 3.1)

$\mu_0=1, \mu_1, \cdots, \mu_n$ に対し

$$\mathfrak{M}(i, j)=\begin{pmatrix} \mu_i & \mu_{i+1}\cdots\mu_j \\ \mu_{i+1} & \mu_{i+2}\cdots\mu_{i+j+1} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \mu_j & \mu_{j+1}\cdots\mu_{2j-i} \end{pmatrix}, \quad 0\leqq i\leqq j, \ 2j-i\leqq n$$

とおくとき，

$\mu_0=1, \mu_1, \cdots, \mu_n$ が $[a, b]$ 上の確率分布のモーメントであるための必要十分条件は，$n=2m$ のときは，

$$\mathfrak{M}(0, m), \text{ 及び } -\mathfrak{M}(2, m+1)+(a+b)\mathfrak{M}(1, m)-ab\,\mathfrak{M}(0, m-1)$$

なる二つの行列が非負定値になることである．とくに $a=0,\ b=1$ なら，

$$\mathfrak{M}(0,m),\ \mathfrak{M}(1,\ m)-\mathfrak{M}\ (2,\ m+1)$$

が非負定値ということである．$n=2m-1$ のときは，

$$\mathfrak{M}(1,\ m)-a\mathfrak{M}(0,m-1),\ b\mathfrak{M}(0,m-1)-\mathfrak{M}(1,\ m)$$

が非負定値ということで，とくに $a=0,\ b=1$ なら，

$$\mathfrak{M}(1,\ m),\ \mathfrak{M}(0,m-1)-\mathfrak{M}(1,\ m)$$

が非負定値ということである．

また，定理 1 と定理 2′ から

定理 3′

$\mu_0=1,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ が $[a,b]\cup[c,d]$ $(a<b<c<d)$ 上の確率分布のモーメントなるための必要十分条件は，$\mathfrak{M}(1,2)-a\mathfrak{M}(0,1)$，$d\mathfrak{M}\ (0,1)-\mathfrak{M}(1,2)$ が非負定値であり，且つ

$$\mu_3-(a+b+c)\mu_2+(ab+bc+ca)\mu_1-abc\geqq 0,$$
$$-\mu_3+(b+c+d)\mu_2-(bc+cd+db)\mu_1+bcd\geqq 0$$

が成立することである．

以上が後のパネル調査結果の分析に必要なモーメント問題についての準備事項である．

§5 チェビシェフ型の不等式について

この節ではパネル調査結果分析に必要なチェビシェフ型の不等式についての事項をまとめておく．詳細は [16] を参照されたい．

定理 4. （[16] 参照）

i) $\mu_0=1,\ \mu_1,\cdots,\mu_n$ で $[0,1]$ 上の確率分布のモーメントになり得るものに対応する n 次元空間の点 $(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ の全体は n 次元コンパクト凸体となる．それを $\mathfrak{M}$ とする．

ii) $\mathfrak{M}$ の内点は無限個の分布で実現され得る．とくに，次数 $\frac{n+1}{2}$ をもつ丁度 2 つの分布で実現され，それより小さい次数の分布では実現されない．（$[0,1]$ 上の分布が次数 m であるとは，すべての確率が丁度 m 個の点の上に分布していることで，その際端点 $\{0\}$, $\{1\}$ だけは 1/2 とかぞえることにする）．$\mathfrak{M}$ の境界点は唯一の分布で実現され，その分布の次数は $n/2$ 以下である．次数 $\frac{n+1}{2}$ 以下の分布で実現されないなら $\mathfrak{M}$ に属さない．

定理 4′ （同上）

$$\sum_k p_k x_k{}^i=\mu_i \qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

なる連立方程式を考える．$\sum_k$ は次の意味である．

$n=2m-1$ のときは，未知数は $x_1,\cdots x_m,\ p_1,\cdots,p_m$ で，$\sum_{k=1}^{m}$ であるか，あるいは，未知数が，$x_1,\cdots,x_{m-1},\ p_0,\ p_1,\cdots,p_m$ で $x_0=0,\ x_m=1$ で，$\sum_{k=0}^{m}$ である．

$n=2m$ のときは，未知数は，$x_1,\cdots,x_m,\ p_1,\cdots,p_{m+1}$ で，x_{m+1} は 0 か 1 であり，$\sum_{k=1}^{m+1}$ である．

i) 上の方程式が，$0\leqq x_k\leqq 1,\ 0\leqq p_k$ for all k をみたす解を 2 つもてば，$(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ は $\mathfrak{M}$ の内点である．

ii) 解が 1 つなら $\mathfrak{M}$ の境界で，解が表わす分布の次数は $n/2$ 以下である．

iii) i) で述べた条件をみたす解がないなら $\mu_1,\cdots,\mu_n$ を実現する $[0,1]$ 上の分布はない．

定理 5. （同上）

A を $[0,1]$ の閉部分集合とするとき，$(\mu_1,\cdots\mu_n)$ が $\mathfrak{M}$ の内点なら，このモーメントをもつ分布の中で A の確率を最大にするものが存在し，次数 $\frac{n+1}{2}$ から $n+1$ の範囲の中で見つ

けることができる．また，$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \geqq \chi_A(x)$，$(0\leq x\leq 1)$ なる多項式で，最大値を実現する確率が，その多項式と $\chi_A(x)$ の交点のみに確率を有する如きもので，その期待値が最大値になるものが存在する（$\chi_A(x)$ は集合 A の上で 1，他で 0 となる関数）．

定理 6.　(同上)

$k\leqq n+1$ とする．与えられた k 個の点，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k$ 上にのみ確率があるもので，$\mu_1, \cdots, \mu_n$ をモーメントにもつ分布が存在するためには，行列

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_2\cdots\mu_n \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2\cdots\xi_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \xi_k & \xi_k^2\cdots\xi_k^n \end{pmatrix}$$

のランクが k になることが必要である．

§6　パネル調査の企画とデータ分析

回答機構についての研究を行なうため，同一質問を同一サンプルに，ある期間をおいて調査するパネル調査で，質問の内容にもよるが国民性調査 [1] のタイプのものなどではせいぜい3回が限度と考えられる．また調査技術の面からもそのように考えられる．1969 年から 1970 年にかけて研究所では3回のパネル調査を進めている*．このようなことから調査回数は3回と固定し，また質問は簡単さと基本的であるということから2肢選択に限定して話を進める．調査のくり返し回数の増加は計算量の増加を伴なうが方法は全く同じである．しかし選択肢の増加はとり扱かう確率分布が多次元になるため，アナロジーを辿ることはそれ程容易でなかろう．

2肢選択の一つの質問の3回パネル調査のデータは，$\{N(i_1, i_2, i_3)\,;\, i_1, i_2, i_3=0 \text{ or } 1\}$ の形にまとめられる．たとえば $N(0,0,1)$ は第1，第2回の調査で回答肢 '0' を選択し，第3回の調査で回答肢 '1' を選択した人数である．これらを，すべて加えたものが3回の調査に共通の標本数 N である．'1' を選択した回数でまとめて，N_0, N_1, N_2, N_3，とする．すなわち，$N_1=N(1,0,0)+N(0,1,0,)+N(0,0,1)$ である．

さて，複合2項分布モデルが正しいとすると，$N_i(i=0,1,2,3)$ が A の分布に対しては情報をすべて含んでしまい，$N(i_1, i_2, i_3)$ は不要になる．$N(i_1, i_2, i_3)$ はモデルの妥当性を調べる際に必要になる．たとえば期待値では $EN(0,0,1)=EN(0,1,0)=EN(1,0,0)$ がモデル下では成立しなければならない．標本変動を考慮したモデルの妥当性に関する議論は後の機会にゆずって，観測値に対応する母集団の量で考察を進める．

$$p_i=\frac{N_i}{N} \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

とおくと，モデルが正しいなら p_i は複合2項分布の確率を表わす筈である．ここでは，一つの模擬データを用意し数値例を平行して示していく．

データ I.　$p_0=0.08244$, $p_1=0.12545$, $p_2=0.22043$, $p_3=0.57168$

とする．（以下このデータをデータ I とよぶ）．

(i) まずこの数値が複合2項分布の確率を表わしうるか否かを調べる．それには2つの方法がある．まず (4) によってモーメントに対応すべき μ_0, μ_1, μ_2, μ_3，を計算する．

$$\mu_0=1,\ \mu_1=0.76045,\ \mu_2=0.64516,\ \mu_3=0.57168$$

を得る．そこで一つは定理3を使う．$n=3=2m-1$，$m=2$，$a=0$，$b=1$ であるから，

* この調査は，回答の変動の模様をみるため，同一人に同一質問を約4ヶ月間隔で3回くり返して調査するように計画した．とり上げた質問項目は，これまでに実施してきた質問項目を，質問内容，回答選択肢の性質等を考慮して，二肢選択のもの，本質的には二肢選択であるが，中間的性格の回答肢を加えて3肢選択にしたもの，3肢独立型のもの等に分類し，その中から選択した．このとき，回答分布状況や回答の安定性により種々の質問項目を選択した．調査は岐阜市において標本 1000 を無作為抽出し，面接記入式調査法をとり実施している．

$$\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ \mu_2 & \mu_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1-\mu_1 & \mu_1-\mu_2\\ \mu_1-\mu_2 & \mu_2-\mu_3\end{pmatrix}$$

なる2つの行列の非負定値性を調べてみることである．今の場合，非負定値の条件は，$1\geqq\mu_1\geqq\mu_2\geqq\mu_3\geqq0$，$\mu_1\mu_3-\mu_2{}^2\geqq0$，$(1-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)-(\mu_1-\mu_2)^2\geqq0$ と同値であり，最初の条件は明きらかに成立し，第2，第3の条件も左辺が夫々 0.0185, 0.0043 であるから成立する．標本変動を無視するなら，この条件が成立しないなら複合2項分布として分析を進めることはできない．さてもう一つの方法は定理 4′ を用いる．今 $n=3$ で奇数であることに注意して，

$$\begin{cases}p_1+p_2=1\\ p_1x_1+p_2x_2=\mu_1\\ p_1x_1{}^2+p_2x_2{}^2=\mu_2\\ p_1x_1{}^3+p_2x_2{}^3=\mu_3,\end{cases}\qquad \begin{cases}p_0+p_1+p_2=1\\ p_1x_1+p_2=\mu_1\\ p_1x_1{}^2+p_2=\mu_2\\ p_1x_1{}^3+p_2=\mu_3\end{cases}$$

の2組の連立方程式をそれぞれ解いてみる．最初の方は

$$x_1{}^4(\mu_2-\mu_1{}^2)+x_1{}^3(2\mu_1{}^3-\mu_2\mu_1-\mu_3)+x_1{}^2(3\mu_1\mu_3-3\mu_1{}^2\mu_2)$$
$$+x_1(3\mu_1\mu_2{}^2-\mu_2\mu_3-2\mu_1{}^2\mu_3)+(\mu_1\mu_2\mu_3-\mu_2{}^3)=0$$

より x_1 が求まり，以下

$$p_1=\frac{\mu_2-\mu_1{}^2}{x_1{}^2-2\mu_1x_1+\mu_2},\qquad p_2=1-p_1,\qquad x_2=\frac{\mu_1-p_1x_1}{p_2}$$

が求まる．第2の方は，

$$x_1{}^2(\mu_1-\mu_2)-x_1(\mu_1-\mu_3)+(\mu_2-\mu_3)=0$$

より x_1 が求まり，以下，

$$p_1=\frac{\mu_1-\mu_2}{x_1(1-x_1)},\qquad p_2=\mu_1-p_1x_1,\quad p_0=1-p_1-p_2,$$

が順次求まる．データⅠでは，最初のものから，

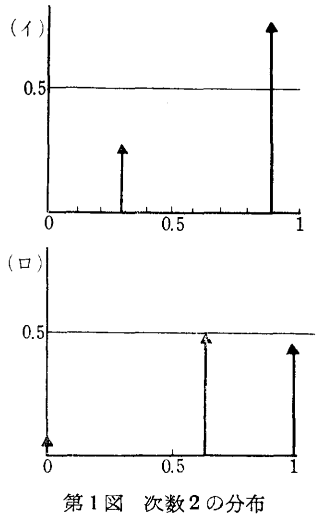
$x_1=0.90727$,　　$p_1=0.75625$
$x_2=0.30495$,　　$p_2=0.24375$（第1図の（イ））

が得られ，後者から

$x_1=0.63735$,　　$p_1=0.49880$
$p_2=0.44254$,　　$p_0=0.05866$（第1図の（ロ））

を得る．したがってデータⅠから得たモーメントは $\mathfrak{M}$ の内点で，無数の複合2項分布で実現されることになる．

(ii)　次に $P_r(\{0\}\cup\{1\})$ の最大値を求める．この値の意味は，もし A の分布が既知なら $P_r(\{0\}\cup\{1\})$ は当面の問題に対して回答に確率的な要素がなく，繰り返しに対し不動と考えられるグループの割合に対応するが (Mover-Stayer モデル [13], [14] の Stayer の比率に対応する)，A の分布については3次までのモーメントしか定まっていないのであるから，不動グループが存在するとして最大どこまで可能かを示すものである．これを最大不動率とよぼう．(最小値の方は一般に 0 である) 'boundary case'（モーメント条件をみたす分布が唯一つで次数が $n/2$ 以下）を除けば最大不動率が1になることはない．データⅠについては (i) で調べたように 3/2 次以下の分布はない（端点にのみ確率があるなら次数は1か1/2となる)．ここで定理5を用いる．A は $\{0\}\cup\{1\}$ であり，したがって，$\chi_A(x)$ は0と1でのみ 1，(0, 1)



第1図　次数2の分布

では0である．定数でない高々3次の多項式 $f(x)$ で $[0,1]$ で $f(x)\geqq\chi_A(x)$ の成立するものは，$\chi_A(x)$ と高々両端点，および $(0,1)$ の内点の一つとでしか同じ値をとることはできない．したがって A の確率を最大にする分布は常に (i) の後者の連立方程式から求まる次数2のものである．データIでは

$$最大不動率=p_0+p_1=0.5575$$

となる．

(iii)　次に $A=[0,\alpha]\cup[1-\alpha,1]$ の確率の最大値を求めてみる．(ii) では最大不動率を求めたが，調査誤差が存在するときや，或いは意見の固いグループという場合，確率1で一方の選択し肢を選ぶことだけでなく，たとえば0.9の確率で同一選択肢を選ぶ程度の人まで含めて使うときなどのことを考慮するなら，少し条件をゆるめて母集団において，$1-\alpha(=\beta$ とおく) より高い確率でいずれかの回答を選択している人の割合が問題になってくる．(ii) と同じ理由でその最大値を β-最大不動率とよぼう．$\alpha\geqq\frac{1}{2}$ のときは A は $[0,1]$ に一致してしまうから $\alpha<\frac{1}{2}$ として考察すればよい．まず A に確率1を有するものが存在するか否かは定理3′で判定できる．定理3′の a,b,c,d は今の場合，$a=0$, $b=\alpha$, $c=1-\alpha$, $d=1$ であり，且つ $\mathfrak{M}$ の内点にモーメント列が入っている場合を調べているのだから，新しく調べるべきことは，

$$\mu_3-\mu_2+\alpha(1-\alpha)\mu_1,\qquad -\mu_3+2\mu_2-\{\alpha(1-\alpha)+1\}\mu_1+\alpha(1-\alpha)$$

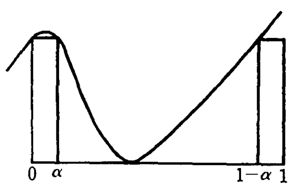
の符号である．両者が非負なら A の確率の最大値は，1，そうでなければ1にはなり得ない．両者が非負であるための α の範囲は，

$$\alpha(1-\alpha)\geqq\max\left\{\frac{\mu_2-\mu_3}{\mu_1},\ \frac{\mu_1-2\mu_2+\mu_3}{1-\mu_1}\right\}\ (=u\ とおく)$$

すなわち，

$$\alpha\geqq\frac{1-\sqrt{1-4u}}{2}\quad(=\alpha_0,\ 1-\alpha_0=\beta_F\ とおく)$$

となる．データIでは $\frac{\mu_2-\mu_3}{\mu_1}=0.0966$, $\frac{\mu_1-2\mu_2+\mu_3}{1-\mu_1}=0.1745$ で，$\alpha_0=0.2253$, $\beta_F=0.7747$ となる．これからデータIでは，母集団の全員が0.7747より高い確率で回答をしている可能性があるといえる．後は $\alpha<\alpha_0$ のときの考察である．それにはまた定理5が用いられる．すなわち定数でない3次の多項式 $f(x)$ で $[0,1]$ で $f(x)\geqq\chi_A(x)$ が成立するものを考える．等号の成立する点の様子を調べると，今の場合 $(\alpha,1-\alpha)$ にも必らず一点がなければならない（そうでないと A の確率が1になってしまう）ことに注意すれば，容易に交点の集合は $\{0,b,\xi,c\}$ か $\{b,\xi,c,1\}$ のいずれかに含まれるものでなければならないことがわかる．(但し，$b=\alpha<\xi<c=1-\alpha$ である)，(第2図参照)．ここで，たとえば前者のタイプが可能であるためには，与えられたモーメントをもつ分布で $[0,1-\alpha]$ のみに確率を有するものが存在することが必要である．後者にとっては $[\alpha,1]$ のみに確率を有するものが存在することが必要である．このことは，また定理3を使って調べられる．定理3で前者は $a=0$, $b=1-\alpha$ に，後者は $a=\alpha$, $b=1$ に対応する．すなわち前者では，



第 2 図

$$(1-\alpha)\begin{pmatrix}1&\mu_1\\\mu_1&\mu_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_1&\mu_2\\\mu_2&\mu_3\end{pmatrix}$$

が，後者では

$$\begin{pmatrix}\mu_1&\mu_2\\\mu_2&\mu_3\end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix}1&\mu_1\\\mu_1&\mu_2\end{pmatrix}$$

が，それぞれ非負定値であることが必要となる．すなわち前者は

$$\alpha \leqq 1-\mu_1, \qquad \alpha \leqq \frac{\mu_2-\mu_3}{\mu_2},$$

$$\alpha \leqq 1-\frac{(\mu_3-\mu_1\mu_2)+\sqrt{(\mu_3-u_1\mu_2)^2-4(\mu_2-\mu_1^2)(\mu_1\mu_3-\mu_2^2)}}{2(\mu_2-\mu_1^2)}$$

後者は，$\alpha \leqq \mu_1$，$\alpha \leqq \dfrac{\mu_3}{\mu_2}$，

$$\alpha \leqq \frac{(\mu_3-\mu_1\mu_2)-\sqrt{(\mu_3-\mu_1\mu_2)^2-4(\mu_2-\mu_1^2)(\mu_1\mu_3-\mu_2^2)}}{2(\mu_2-\mu_1^2)}$$

という条件になる．さて，

データ I で前者は

$$\alpha \leqq 0.2396, \qquad \alpha \leqq 0.1139, \qquad \alpha \leqq 0.0927$$

すなわち $\alpha \leqq 0.09273$,

後者は，

$$\alpha \leqq 0.7605, \qquad \alpha \leqq 0.8861, \qquad \alpha \leqq 0.3361$$

すなわち $\alpha \leqq 0.33612$

が必要条件になる．

ここで $\alpha=0.1$ としてみよう．これは前者はみたさず後者をみたす．したがって $\{\alpha, \xi, 1-\alpha, 1\}$ に確率をもつ分布の中で ξ の確率を最小にするものを求めることになる．各点の確率 p_0, p_1, p_2, p_3 と ξ を未知数として，これらがモーメントの条件をみたすということは．

$$\begin{cases} p_0+p_1+p_2+p_3=1 \\ p_0\alpha+p_1\xi+p_2(1-\alpha)+p_3=\mu_1 \\ p_0\alpha^2+p_1\xi^2+p_2(1-\alpha)^2+p_3=\mu_2 \\ p_0\alpha^3+p_1\xi^3+p_2(1-\alpha)^3+p_3=\mu_3 \end{cases}$$

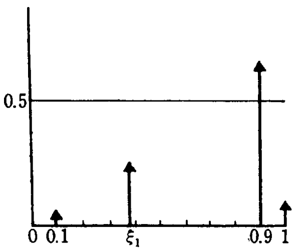
となる．さて ξ の確率は

$$p_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \mu_1 & (1-\alpha) & 1 \\ \alpha^2 & \mu^2 & (1-\alpha)^2 & 1 \\ \alpha^3 & \mu_3 & (1-\alpha)^3 & 1 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \xi & (1-\alpha) & 1 \\ \alpha^2 & \xi^3 & (1-\alpha)^2 & 1 \\ \alpha^3 & \xi^3 & (1-\alpha)^3 & 1 \end{vmatrix},$$

よってその極値は，$\xi_1=\dfrac{2\pm\sqrt{1-3\alpha(1-\alpha)}}{3}$ で起こる．

$\alpha=0.1$ なら　$\xi_1=0.3819$,　$p_0=0.0395$,
$p_1=0.2243$,　$p_2=0.6531$,　$p_3=0.0830$,

したがってデータ I での最大 0.9-不動率は 0.7757 である．この確率分布が第 3 図である．



第 3 図　最大 0.9-不動率を与える分布

一般に

$$(5)\quad \begin{cases} p_0+p_1+p_2+p_3=1 \\ p_0a_0+p_1a_1+p_2a_2+p_3a_3=\mu_1 \\ p_0a_0^2+p_1a_1^2+p_2a_2^2+p_3a_3^2=\mu_2 \\ p_0a_0^3+p_1a_1^3+p_2a_2^3+p_3a_3^3=\mu_3 \end{cases}$$

なる方程式で a_0, a_1, a_2, a_3 が与えられたとしたときの解は

$$(6)\qquad p_i=\frac{\{a_ja_ka_l-(a_ja_k+a_ka_l+a_la_j)\mu_1+(a_j+a_k+a_l)\mu_2-\mu_3\}}{(a_j-a_i)(a_k-a_i)(a_l-a_i)}$$

である．($i=0, 1, 2, 3$; j, k, l は i 以外の相異なるもの)．a_i 以外が与えられたとき p_i の極値を

与える a_i は,

(7) $$a_i=\frac{(a_j+a_k+a_l)\pm\sqrt{(a_j-a_k)^2+(a_k-a_l)^2+(a_l-a_j)^2}}{3}$$

である．とくに

$a_j=0,\ a_k=\alpha,\ a_l=1-\alpha$ なら

(8) $$a_i=\frac{1\pm\sqrt{1-3\alpha(1-\alpha)}}{3}$$

$a=1,\ {}_ja_k=\alpha,\ a_l=1-\alpha$ なら

(9) $$a_i=\frac{2\pm\sqrt{1-3\alpha(1-\alpha)}}{3}$$

である．

(iv) $A=[\alpha,\ 1-\alpha]$, $\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$ の確率の最大化について．確率がすべて A に入るものが存在するか否かは定理3を用いて判定できる．定理3で $a=\alpha$, $b=1-\alpha$ とおき $n=3$ の場合を適用すると次の2つの行列の非負定値性が与えられたモーメントをもち台が $[\alpha,\ 1-\alpha]$ に含まれる分布の存在の必要十分条件になる；

$$\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ \mu_2 & \mu_3\end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix}1 & \mu_1\\ \mu_1 & \mu_2\end{pmatrix},\qquad (1-\alpha)\begin{pmatrix}1 & \mu_1\\ \mu_1 & \mu_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2\\ \mu_2 & \mu_3\end{pmatrix}.$$

これは，(iii) の途中で現われた条件で，今の場合両者の成立を要求するから，

(10) $$\alpha\leqq\min\left\{\mu_1,\ 1-\mu_1,\ \mu_3/\mu_2,\ 1-\mu_3/\mu_2,\ \frac{(\mu_3-\mu_1\mu_2)-\sqrt{(\mu_3-\mu_1\mu_2)^2-4(\mu_2-\mu_1^2)(\mu_1\mu_3-\mu_2^2)}}{2(\mu_2-\mu_1^2)},\ 1-\frac{(\mu_3-\mu_1\mu_2)+\sqrt{(\mu_3-\mu_1\mu_2)^2-4(\mu_2-\mu_1^2)(\mu_1\mu_3-\mu_2^2)}}{2(\mu_2-\mu_1^2)}\right\}$$

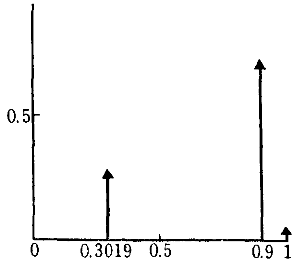
が成立することが必要十分条件である．データⅠで右辺の最小は 0.09273 であるから,

$$\alpha\leqq 0.0927$$

なら $[\alpha,\ 1-\alpha]$ のみに確率を有する分布が存在する．このことは，母集団の全員がその人の選び易い方の選択肢を選択する確率が高々 0.9073 $(=1-0.0927)$ である可能性があることを示している．(10) の右辺の値を1からひいたものを β_M で表わすことにする．

さてデータⅠでいって，$\alpha>0.0927$, 一般に $\alpha>1-\beta_M$, の場合は $A=[\alpha,1-\alpha]$ の確率は1より小さい筈だがそれを求めることに進む．定理5をこの問題に応用してみると，最大値を与える分布は次のいずれかの点集合の上にのみ確率を有する 7/2 次以下のものの中にあることがわかる；

$\{0,\alpha,1\}$, $\{0,1-\alpha,1\}$, $\{\xi,\alpha\}$, $\{\xi,1-\alpha\}$, $\{0,\alpha,\xi\}$, $\{\xi,1-\alpha,1\}$, $\{0,\alpha,1-\alpha\}$,
$\{\alpha,1-\alpha,1\}$, $\{\xi,\alpha,1\}$, $\{0,1-\alpha,\xi\}$, $\{\xi,\alpha,1-\alpha\}$, $\{0,\alpha,1-\alpha,1\}$,
$\{0,\alpha,1-\alpha,\xi;\ 1-\alpha<\xi<1\}$, $\{\xi,\alpha,1-\alpha,1;\ 0<\xi<\alpha\}$.



第4図 [0.1, 0.9] の確率を最大にする分布

ところで，最後の2つを除くとすべて次数3以下で，ξ をはじめとして各点の確率は一意に定まってしまう(確率分布になり得ない場合もある)．最後の2つについては ξ は定まらないが，極値の考察から｛ ｝の中で指示された範囲の ξ では，A の確率の最大を与えるものは存在しないことがわかる．結局それ以前のもので確率分布になり得るものの中から $[\alpha,\ 1-\alpha]$ の確率を最大にしているものを見つければよいことになる．データⅠでは，$\alpha=0.1$ の場合には $\{0.3019,\ 0.9,\ 1\}$ の3点にそれぞれ 0.2402, 0.7185, 0.0413 の確率をも

つ分布が $[0.1, 0.9]$ の確率も最大を与える分布で，その値は 0.9587 となる（第4図）．

(v)　(iv) の特別な場合 $\alpha=1/2$ のときを考える．これまでと同じ方法で，$A=\{1/2\}$ の確率を最大にする分布は，$\{0, 0.5, \xi;\ 0.5<\xi<1\}$ か $\{\xi, 0.5, 1;\ 0<\xi<0.5\}$ の何れかの上にのみ確率を有するものであることが，データIに対しては結論される．さて定理6によると，これらの点の上の確率分布で与えられたモーメントをもつ必要条件は

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \xi^3 \end{pmatrix}$$

のランクが3であることで，その条件から定まる ξ を使って，それが確率分布になり得るか否かを調べることが残る．それには前者なら

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 1 & \xi & \xi^2 \end{vmatrix} = 0$$

が，後者なら

$$\begin{vmatrix} 1-\mu_1 & 1-\mu_2 & 1-\mu_3 \\ 1-1/2 & 1-1/4 & 1-1/8 \\ 1 & 1+\xi & 1+\xi+\xi^2 \end{vmatrix} = 0$$

が必要である．すなわち，それぞれ，

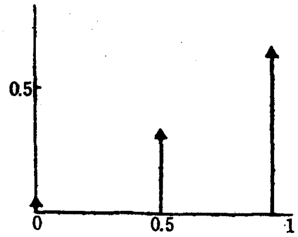
$$\left(\frac{\mu_1}{4}-\frac{\mu_2}{2}\right)\xi^2-\left(\frac{\mu_1}{8}-\frac{\mu_3}{2}\right)\xi+\left(\frac{\mu_2}{8}-\frac{\mu_3}{4}\right)=0,$$

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{3\mu_1}{4}+\frac{\mu_2}{2}\right)\xi^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{13\mu_1}{8}+\frac{\mu_2}{2}+\frac{\mu_3}{2}\right)\xi-\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{8}\mu_1\right.$$

$$\left.+\frac{7}{8}\mu_2-\frac{1}{4}\mu_3\right)=0$$

が必要である．前者より $\xi=0.94023$ を得る．後者は $(0, 1)$ で解をもたない．$\xi=0.94023$ のに対する確率は，0.64007 となり，$\{0\}$ に 0.04265，$\{1/2\}$ に 0.31728 となる（第5図）．

(vi) データIで $\mu_1=0.76045$ であることは定まっており母集団全体としては選択肢 '1' の方がいわば優勢と考えられる．各個人の '1' の選択確率が 0.5 より大きいか小さいかで 1-グループ，0-グループに分けてみることにする．各グループの大きさを考えるときには丁度 0.5 の人はどちらのグループにも入れて考えることにする．そのグループの大きさを考察してみる．すなわち $A=[0, 0.5]$ 或いは $A=[0.5, 1]$ として，A に入る確率の最大値を求めてということである．次に vii) で一般の場合を調べるので，ここでは結果だけを記しておくと，$[0, 0.5]$ の最大は，0.3601，$[0.5, 1]$ の最大は 0.9573 で，これらを与える分布はいずれも第5図に示した分布である．$[0.5, 1]$ の最大値を最大 1-グループ率，$[0, 0.5]$ を最大 0-グループ率とよぼう．



第5図　$\alpha=1/2$ の確率を最大にする分布

vii)　$A_1=[0, b]$，或いは $A_2=[c, 1]$ の確率の最大値：

やはり定理5が応用できる．この場合も v) と同じように前者では，$\{0, b, \xi\}$，$\{1, b, \xi\}$，後者では $\{0, c, \xi\}$，$\{1, c, \xi\}$ の上のみに確率をもつ分布から探せばよいこと，及び定理6により ξ が定まることがわかる．A_1 或いは A_2 の確率が1になる条件は定理3より前者に対しては

$$b \geqq \max\left\{\mu_1,\ \frac{\mu_3}{\mu_2},\ \frac{(\mu_3-\mu_1\mu_2)+\sqrt{(\mu_3-\mu_1\mu_2)^2-4(\mu_2-\mu_1^2)(\mu_1\mu_3-\mu_2^2)}}{2(\mu_2-\mu_1^2)}\right\}$$

第　4　表

第6図の番号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
分布	p	0.5	0.5	0.5	0.5	1	1	1	2	2	3	データ I
	q	0.5	1.0	2	3	1	2	3	2	3	3	
モーメント	μ_1	0.5	0.33333	0.20000	0.14286	0.5	0.33333	0.25	0.5	0.4	0.5	0.76045
	μ_2	0.375	0.2	0.08571	0.04762	0.33333	0.16667	0.1	0.3	0.2	0.28571	0.64516
	μ_3	0.3125	0.14286	0.04762	0.02165	0.25	0.1	0.05	0.2	0.11429	0.17857	0.57168
実現値(期待値)	p_0	0.3125	0.45714	0.60952	0.69264	0.25	0.4	0.5	0.2	0.28571	0.17857	0.08244
	p_1	0.1875	0.22857	0.22857	0.20779	0.25	0.3	0.3	0.3	0.34286	0.32143	0.12545
	p_2	0.1875	0.17143	0.11429	0.07792	0.25	0.2	0.15	0.3	0.25714	0.32143	0.22043
	p_3	0.3125	0.14286	0.04762	0.02165	0.25	0.1	0.05	0.2	0.11429	0.17857	0.57168
同じ2次モーメントをもつ分布	0	0.25	0.1	0.02858	0.01191	0.166667	0.05555	0.025	0.1	0.05	0.07142	0.05866
	(ξ)	0.5 (0.5)	0.54445 (0.42855)	0.51435 (0.33328)	0.48022 (0.27268)	0.666666 (0.5)	0.69445 (0.4)	0.675 (0.33333)	0.8 (0.5)	0.81667 (0.42855)	0.85716 (0.5)	0.49880 (0.63735)
	1	0.25	0.35555	0.45707	0.50787	0.166667	0.25	0.3	0.1	0.13333	0.07142	0.44254
	(ξ_1)	0.5 (0.14645)	0.65217 (0.11560)	0.76466 (0.08139)	0.80942 (0.06282)	0.5 (0.21144)	0.63606 (0.15504)	0.69764 (0.12251)	0.5 (0.27639)	0.57084 (0.22659)	0.5 (0.31150)	0.24375 (0.30495)
	(ξ_2)	0.5 (0.85355)	0.34783 (0.74158)	0.23534 (0.58538)	0.19058 (0.48281)	0.5 (0.78856)	0.36394 (0.64494)	0.30236 (0.54415)	0.5 (0.72361)	0.42916 (0.63066)	0.5 (0.68850)	0.75625 (0.90727)
	β_F	0.854	0.780	0.744	0.761	0.789	0.724	0.724	0.724	0.689	0.689	0.7477
	β_M	0.854	0.884	0.919	0.937	0.789	0.845	0.877	0.724	0.773	0.689	0.90727
最大不動率	0.9	0.78135	0.69936	0.77629*	0.83819	0.52804	0.51941	0.62089	0.31250	0.30242	0.22325	0.77568
	0.8	1	0.92154	0.87447	0.93585	0.92593	0.72518	0.793886	0.66667	0.54634	0.39689	0.9269
	0.7	1	1	1	1	1	1	1	1	0.90475	0.89300	1
	0.6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
最大浮動率	0.6	0.52083	0.55556	0.3887	0.2529	0.6944	0.6944	0.5000	0.8334	0.8333	0.89302	0.4328
	0.7	0.59524	0.6350	0.5443	0.4099	0.7936	0.7936	0.7143	0.9524	0.9404	1	0.5490
	0.8	0.78125	0.8025	0.6572	0.5647	1	0.9166	0.8333	1	1	1	0.6917
	0.9	1	1	0.8943	0.7706	1	1	1	1	1	1	0.9587
不動率	0.9	0.4097	0.3676	0.4624	0.5549	0.2	0.2	0.272	0.056	0.056	0.017	
	0.8	0.5904	0.5528	0.6422	0.7361	0.4	0.4	0.496	0.208	0.208	0.116	
	0.7	0.7381	0.7111	0.7773	0.8497	0.6	0.6	0.684	0.432	0.432	0.326	
	0.6	0.8718	0.8579	0.8927	0.9316	0.8	0.8	0.848	0.704	0.708	0.635	

第 4 表 (つづき)

分	p	0.5	0.5	0.5	0.5	1	1	1	2	2	3	データ I
布	q	0.5	1.0	2	3	1	2	3	2	3	3	
浮動率	0.9	0.5903	0.6325	0.5376	0.4451	0.8	0.8	0.726	0.944	0.944	0.983	
	0.8	0.4096	0.4472	0.3578	0.2639	0.6	0.6	0.540	0.792	0.792	0.884	
	0.7	0.2619	0.2889	0.2227	0.1503	0.4	0.4	0.316	0.568	0.568	0.674	
	0.6	0.1282	0.1421	0.1073	0.0684	0.2	0.2	0.152	0.296	0.296	0.365	
α-0 選択率	0.9	0.205	0.316	0.459	0.555	0.1	0.19	0.271	0.028	0.052	0.004	
	0.8	0.295	0.447	0.626	0.733	0.2	0.36	0.488	0.104	0.181	0.058	
	0.7	0.369	0.548	0.739	0.840	0.3	0.51	0.657	0.216	0.348	0.163	
	0.6	0.436	0.632	0.822	0.908	0.4	0.64	0.784	0.352	0.525	0.317	
	0.5	0.5	0.707	0.884	0.950	0.5	0.75	0.875	0.5	0.687	0.5	
	0.4	0.564	0.775	0.923	0.976	0.6	0.84	0.936	0.648	0.821	0.683	
	0.3	0.631	0.837	0.962	0.990	0.7	0.91	0.973	0.784	0.916	0.837	
	0.2	0.705	0.894	0.984	0.997	0.8	0.96	0.992	0.896	0.973	0.942	
	0.1	0.795	0.949	0.996	0.999	0.9	0.99	0.999	0.972	0.996	0.991	
	β_0	0.146	0.258	0.415	0.517	0.211	0.355	0.456	0.276	0.369	0.311	0.093
	β_1	0.146	0.116	0.081	0.063	0.211	0.155	0.123	0.276	0.227	0.311	0.336
最大 α-0 選択率	0.9	0.409	0.608	0.776	0.838	0.281	0.463	0.606	0.171	0.246	0.123	0.091
	0.8	0.520	0.698	0.853	0.932	0.474	0.679	0.792	0.313	0.481	0.231	0.146
	0.7	0.570	0.772	0.945	0.989	0.568	0.802	0.937	0.528	0.689	0.464	0.238
	0.6	0.643	0.870	0.977	0.994	0.659	0.944	0.982	0.688	0.898	0.674	0.287
	0.5	0.75	0.913	0.988	1	0.833	0.963	0.994	0.900	0.967	0.929	0.360
	0.4	0.779	0.948	1	1	0.869	0.986	1	0.938	0.991	0.964	0.488
	0.3	0.823	0.976	1	1	0.920	1	1	0.985	1	1	0.596
	0.2	0.908	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.692
	0.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.959
最大 α-1 選択率	0.9	0.409	0.160	0.044	0.018	0.281	0.088	0.018	0.171	0.081	0.123	0.760
	0.8	0.520	0.263	0.071	0.028	0.474	0.149	0.063	0.313	0.142	0.231	0.818
	0.7	0.570	0.368	0.121	0.047	0.568	0.265	0.110	0.528	0.270	0.464	0.892
	0.6	0.643	0.433	0.216	0.086	0.659	0.405	0.208	0.688	0.537	0.674	0.945
	0.5	0.75	0.536	0.294	0.169	0.833	0.537	0.349	0.900	0.673	0.929	0.957
	0.4	0.779	0.657	0.411	0.258	0.869	0.750	0.518	0.938	0.883	0.964	0.974
	0.3	0.823	0.709	0.566	0.421	0.920	0.815	0.729	0.985	0.940	1	1
	0.2	0.908	0.803	0.657	0.565	1	0.927	0.833	1	1	1	1
	0.1	1	1	0.894	0.770	1	1	1	1	1	1	1

後者については，

$$c \leqq \min\left\{\mu_1,\ \frac{\mu_3}{\mu_2},\ \frac{(\mu_3-\mu_1\mu_2)-\sqrt{(\mu_3-\mu_1\mu_2)^2-4(\mu_2-\mu_1{}^2)(\mu_1\mu_3-\mu_2{}^2)}}{2(\mu_2-\mu_1{}^2)}\right\}$$

なることがわかる．

$A_1=[0, b]$ の最大確率の意味は，$1-b=\beta$ とするとき，回答肢‘0’を β 以上の確率で選択する人の母集団における割合の与えられたモーメントをもつという条件下での可能な最大値である．これを最大 β-0 選択率とよぼう．$A_2=[c, 1]$ の方は上に対応して，回答選択肢‘1’を c 以上の確率で選択する人の母集団での割合の最大値であり，これを最大 c-1 選択率とよぶ．

この言葉を使うと vi) の最大0-グループ率は最大 0.5–0 選択率，最大 1-グループ率は最大 0.5–1 選択率に他ならない．

A の分布が定まっているときは，‘最大’という言葉をとってその分布の対応する量をよぶことにする．たとえば，0-グループ率といえば A の分布での 0.5 以下の確率のことである．

viii)　いくつかの数値例

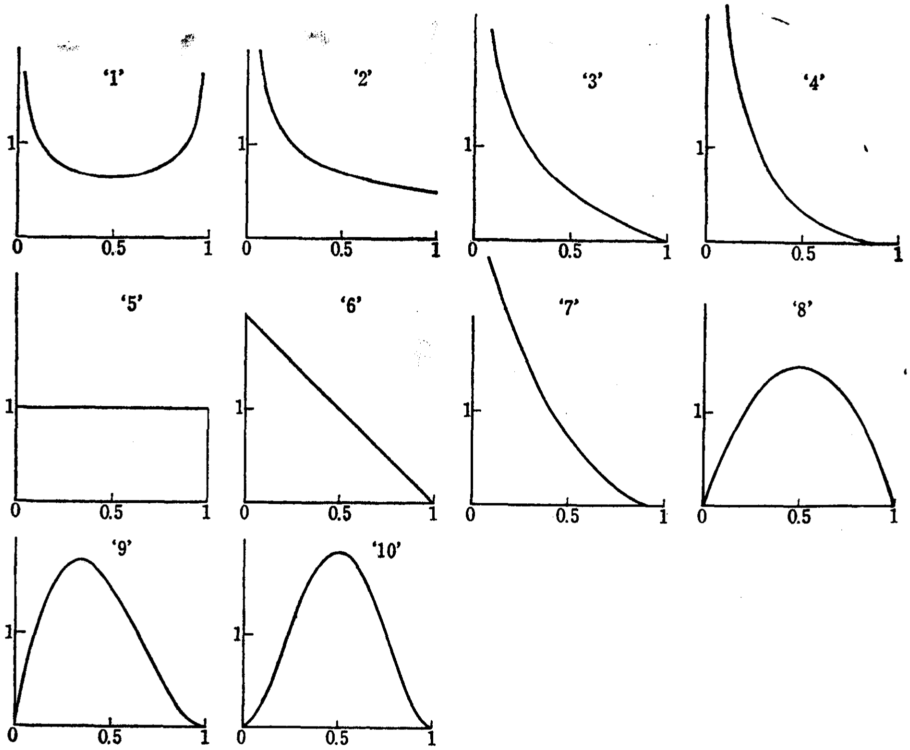
A の分布が次のものについて，これまで述べてきた諸量を計算してみる．

密度関数 $\dfrac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ のベータ分布で，$p, q, =1/2,\ 1, 2, 3$ の各組み合わせについておこなう．

上記密度関数の ν 次のモーメントは

$$\frac{(p+\nu-1)(p+\nu-2)\cdots(p+1)p}{(p+q+\nu-1)(p+q+\nu-2)\cdots(p+q+1)\ (p+q)}$$

である．以下計算は示さず結果の数値を第4表にまとめて示しておく，



第6図　1から10までの分布の密度関数の概形

§7 一般的モデルの表現

これまで複合2項分布モデルの分析を進めてきたが，ここで定常的な様相をもつパネル調査結果を説明すると考えられるモデルを，マルコフ連鎖の状態の関数としてのプロセスという形で或る程度整理できることを示しておく．ここでは選択肢は一般にして述べる．

大別して次のⅠ)，Ⅱ)，Ⅲ)のモデルを考える．

(Ⅰ) 個人は母集団の分割 $\{\Pi_i;\ i=1,2,\cdots,c\}$ の一つのクラスに属する．
母集団に対するクラス Π_i の比率は ρ_i とする．
Π_i に属する各人は各調査時に a_{ij} の確率で第 j カテゴリーに回答する．
$(j=1,2,\cdots,d)$．各調査時の回答は独立とする．
よって Π_i に属する人が t 回の調査で $(j_1,\cdots,j_t)$ カテゴリーに回答する確率は，$a_{ij_1}a_{ij_2}\cdots a_{ij_t}$ である．また母集団からランダムに抽出された人が $(j_1,\cdots,j_t)$ カテゴリーに回答する確率は

$$\sum_{i=1}^{c}\rho_i\,a_{ij_1}\cdots a_{ij_t}$$

となる．このモデルはクラス頻度を示す確率ベクトル

$$(\rho_1,\cdots,\rho_c)$$

と，各クラスでの回答確率を表わす行列

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1d} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{c1}\cdots a_{cd}\end{pmatrix}$$

で表現できる．これらのパラメーターの間に種々の制限・関係を導入することによって，いろいろな特殊なモデルが導かれる；

(i) $c=d=3$

$$a_{1j}=\frac{\alpha^{j-1}}{1+\alpha+\alpha^2}\qquad (j=1,2,3)\qquad 0\leqq\alpha\leqq 1\qquad (\text{但し } 0^0=1 \text{ と約束})$$

$$a_{21}=\frac{\rho_1\beta}{\rho_1+\rho_3}$$

$$a_{22}=1-\beta\qquad 0\leqq\beta\leqq 1$$

$$a_{23}=\frac{\rho_3\beta}{\rho_1+\rho_3}$$

$$a_{3j}=\frac{\gamma^{3-j}}{1+\gamma+\gamma^2}\qquad (j=1,2,3)\qquad 0\leqq\gamma\leqq 1$$

このモデルは林 [9] の回答誤差モデルである．

(ii) $c=d=3$

$$a_{11}=\alpha\qquad a_{12}=1-\alpha\qquad a_{13}=0\qquad 0\leqq\alpha\leqq 1$$

$$a_{21}=\frac{\beta}{2}\qquad a_{22}=1-\beta\qquad a_{23}=\frac{\beta}{2}\qquad 0\leqq\beta\leqq 1$$

$$a_{31}=0\qquad a_{32}=1-\gamma\qquad a_{33}=\gamma\qquad 0\leqq\gamma\leqq 1$$

(iii) $c=d+1$

$$a_{ij}=\delta_{ij}\qquad (i=1,\cdots,d)\qquad (\delta_{ij}\text{ はクロネッカーの }\delta\text{ 記号})$$

(Ⅱ) マルコフ連鎖（定常）

母集団の分割は考えない．回答の変動はカテゴリーを状態とするマルコフ連鎖をなし，これは推移確率行列

$$\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{d1} & \cdots & p_{dd} \end{pmatrix}$$

と，初期確率分布 $(r_1, \cdots, r_d)$ で表現される．

(i) $p_{ii} = (1-\varepsilon) + \varepsilon r_i$

$p_{ij} = \varepsilon r_j \qquad j \neq i \qquad (i = 1, \cdots, d)$

これは調査誤差モデル ([1]) になる。

(Ⅲ) Mover-Stayer モデル ([13], [14])

母集団が $d+1$ 個のクラスに分割されている．$\Pi_1, \cdots, \Pi_d, \Pi_{d+1}$ としよう．Π_i に属する人は常に第 i カテゴリーに回答する．但し $i=1, 2, \cdots, d$. Π_{d+1} だけは，推移確率行列 M のマルコフ連鎖で変動する．

このモデルは，各クラスの頻度を示す $(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_d, \rho_{d+1})$ と Π_{d+1} の推移確率行列

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{d1} & \cdots & m_{dd} \end{pmatrix}$$

および，その初期確率分布 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d)$ とで表現される．

ここで，これらのモデルを包含する，より一般なモデルを定式化しておく．すなわち，上述した3つのモデルをマルコフ連鎖の状態の関数の作るプロセス（或いは状態をいくつかまとめて新しい状態と考えたプロセスといっても同じであるが）として表現しておく．

$\{X_n;\ n = 1, 2, \cdots\}$ をマルコフ連鎖とする．

状態は $1, 2, \cdots\cdot, l$ とする．$\mathfrak{X} = \{1, 2, \cdots, l\}$ とおき，一方 $\mathfrak{Y} = \{1, 2, \cdots, d\}$ とおき，$\mathfrak{X}$ から $\mathfrak{Y}$ への関数 $f(x)$ を考える．このとき，$Y_n = f(X_n)$ によって新しい確率過程 $\{Y_n\}$ が定まる．一般には，この $\{Y_n\}$ はマルコフプロセスにならない ([17] 参照)．$\{Y_n\}$ は $\{X_n\}$ と $f(\cdot)$ によって定まるから，いいかえれば，$\{X_n\}$ を決める推移確率行列 $W = (w_{ij})$ $l \times l$ 行列と，初期確率分布 $\alpha = (a_1, \cdots, a_l)$ 及び $f(x)$ の $x=1, \cdot\cdot\cdot, l$ に対応する値 $(f(1), \cdots, f(l))$ によって表現される．

この構造を用いて上述の各モデルを叙述してみよう．

(Ⅰ) このモデルは一つのクラスだけで考えると独立な（したがってマルコフ）過程になっていることを注意しておく．

$l = cd$ とし，

$$W = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \alpha_{11} \cdots \alpha_{1d} \\ \vdots \quad\ \ \vdots \\ \alpha_{11} \cdots \alpha_{1d} \\ \vdots \quad\ \ \vdots \\ \alpha_{11} \cdots \alpha_{1d} \end{matrix}\right\} d\ \text{行} & & & 0 \\ & \left.\begin{matrix} \alpha_{21} \cdots \alpha_{2d} \\ \vdots \quad\ \ \vdots \\ \alpha_{21} \cdots \alpha_{2d} \end{matrix}\right\} d\ \text{行} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d\ \text{行} \left\{\begin{matrix} \alpha_{c1} \cdots \alpha_{cd} \\ \vdots \quad\ \ \vdots \\ \alpha_{c1} \cdots \alpha_{cd} \end{matrix}\right. \end{pmatrix}$$

$\alpha = (\rho_1 \alpha_{11}, \rho_1 \alpha_{12}, \cdots, \rho_1 \alpha_{1d}, \rho_2 \alpha_{21}, \cdots, \rho_2 \alpha_{2d}, \cdots, \rho_c \alpha_{c1}, \cdots, \rho_c \alpha_{cd})$

$f = (1, 2, \cdots, d, 1, 2, \cdots d, \cdots\cdot, 1, 2, \cdots, d)$ で表わされる．

(i) (ii) はこれをそれぞれ特殊化することで得られる．

とくに (iii) は

$$W=\begin{pmatrix}
1\,0\,0 & & & \\
1\,0\,0 & & & \\
1\,0\,0 & & & 0 \\
& 0\,1\,0 & & \\
& 0\,1\,0 & & \\
& 0\,1\,0 & & \\
& & 0\,0\,1 & \\
& & 0\,0\,1 & \\
0 & & 0\,0\,1 & \\
& & & \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \\
& & & \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \\
& & & \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3
\end{pmatrix}$$

$a=(\rho_1,\ 0, 0,\ 0, \rho_2, 0, 0, 0, \rho_3,\ \rho_4\alpha_1,\ \rho_4\alpha_2,\ \rho_4\alpha_3)$
$f=(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3)$
である.

(Ⅱ) は説明を要しない
(Ⅲ) は

$$W=\begin{pmatrix}
1\,0\,0 & & & \\
1\,0\,0 & & & \\
1\,0\,0 & & & 0 \\
& 0\,1\,0 & & \\
& 0\,1\,0 & & \\
& 0\,1\,0 & & \\
& & 0\,0\,1 & \\
& & 0\,0\,1 & \\
0 & & 0\,0\,1 & \\
& & & M
\end{pmatrix}$$

$a=(\rho_1, 0, 0, 0,\ \rho_2, 0, 0, 0,\ \rho_3,\ \rho_4 q_1,\ \rho_4 q_2,\ \rho_4 q_3)$
$f=(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3)$
と対応している.

こうして Ⅰ) Ⅱ) Ⅲ) のモデルを一括して表現する手段としては大袈裟かもしれないが, さらに社会調査に対して考え得る他の多くのモデルをも表現することを見よう.

(イ) 母集団の分割, $\Pi_1, \cdots, \Pi_c$ に対応し, 各クラスはマルコフという場合は,

$$W=\begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_c \end{pmatrix}$$

但し各 M_i は $d\times d$ の推移確率行列,
$f=(1, \cdots, d, 1, \cdots, d, \cdots, 1, \cdots, d)$ と表現される.
Ⅰ) Ⅱ) Ⅲ) はすべてこの特殊な場合であった.

(ロ) 各人は潜在状態 $\{1, \cdots, c\}$ の間をマルコフ的に移動し, 回答はそのときの潜在状態に対応する回答確率で定まる場合は,

$$W=\left(\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
m_{11}p_{11},\ m_{11}p_{12}, \cdot\cdot, m_{11}p_{1d},\ m_{12}p_{21}, \cdot\cdot, m_{12}p_{2d}, \cdots\cdot, m_{1c}p_{c1}, \cdot\cdot, m_{1c}p_{cd} \\
m_{11}p_{11},\ m_{11}p_{12}, \cdot\cdot, m_{11}p_{1d},\ m_{12}p_{21}, \cdot\cdot, m_{12}p_{2d}, \cdots\cdot, m_{1c}p_{c1}, \cdot\cdot, m_{1c}p_{cd} \\
\quad\vdots \hfill \vdots \\
m_{11}p_{11},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, m_{1c}p_{cd}
\end{array}\right)\ d\ 行 \\
\left.\begin{array}{l}
m_{21}p_{11},\ \cdots\cdots, m_{21}p_{1d}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, m_{2c}p_{c1}, \cdot\cdot, m_{2c}p_{cd} \\
\quad\vdots \hfill \vdots \\
m_{21}p_{11},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, m_{2c}p_{cd}
\end{array}\right)\ d\ 行 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left.\begin{array}{l}
m_{c1}p_{11},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, m_{cc}p_{cd} \\
\quad\vdots \hfill \vdots \\
m_{c1}p_{11},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, m_{cc}p_{cd}
\end{array}\right)\ d\ 行
\end{array}\right)$$

$$f=(1,\ 2,\cdots,\ d,\cdots,1,\ 2,\cdots,d)$$

によって表現される．

ここでは，このように多くのモデルがマルコフ連鎖の状態の関数のプロセスとして表現されることを述べたがこの考えを実際の分析にどう利用していくかはこれからの問題である．

§8　前後2回調査のデータについての2,3の分析

§3から§6にかけて，回答選択肢が2肢の場合について，とくに，3回の調査結果があるときをとりあげて考察した．ここでは2回調査（通常パネル調査として2回の場合が多い）のデータについて　1)　回答選択肢が2肢の場合，潜在型モデルを仮定したときのデータの範囲，2)　定常マルコフ型モデルを仮定したときのデータの範囲，3)　回答選択肢が3肢の場合について潜在型モデルで特定の型を考えたときのモデルの当てはめの結果についてのべる．

1.1)　回答選択肢が2肢の場合，潜在型モデルとして出現可能なデータの範囲．

第5表　前後調査のデータ

前＼後	1	0	
1	ξ_{11}	ξ_{10}	ξ_1
0	ξ_{10}	ξ_{00}	ξ_0

$0\leq\xi_{ij}\leq 1,\ \xi_1+\xi_0=1$

まず，潜在クラスが1つのときを考える．二回調査のデータを第5表のようであるとする．潜在クラスにおける回答肢‘1’の回答確率を $\alpha(0\leq\alpha\leq 1)$ とすれば，データは平均的に

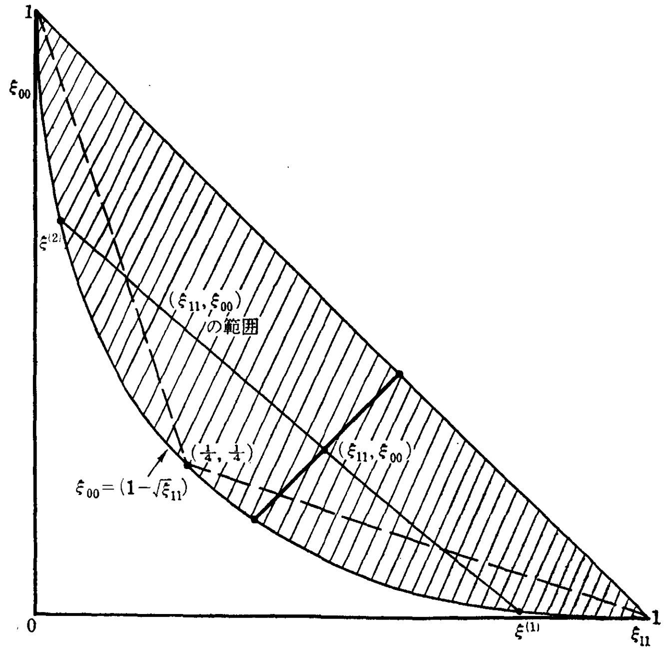
$$\left.\begin{aligned}\xi_{11}&=\alpha^2\\ \xi_{10}&=\xi_{01}=\alpha(1-\alpha)\\ \xi_{00}&=(1-\alpha)^2\end{aligned}\right\}$$

となり，α を $(0,\ 1)$ の範囲で動かすと

$$\xi_{00}=(1-\sqrt{\xi_{11}})^2$$

から，$(\xi_{11},\ \xi_{00})$ 平面上で第7図に示すような曲線になる．すなわち，この曲線上の点 $(\xi_{11},\ \xi_{00})$ はすべて $\alpha=\sqrt{\xi_{11}}$ を回答確率にもつ1つの潜在クラスと対応することになる．

つぎにクラス2つの場合を考える．潜在クラス1における回答肢‘1’の回答確率を α，クラス



第7図　2肢の場合潜在型モデルとして可能なデータの範囲

2における回答確率を $\beta(0\leqq\beta\leqq1)$ とすれば，クラス1の大きさを $p(0\leqq p\leqq1)$ として，

$$\left.\begin{aligned}\xi_{11}&=p\alpha^2+(1-p)\beta^2\\ \xi_{10}&=\xi_{01}=p\,\alpha(1-\alpha)+(1-p)\beta(1-\beta)\\ \xi_{00}&=p(1-\alpha)^2+(1-p)(1-\beta)^2\end{aligned}\right\}$$

で定義される (ξ_{ij}) は2つのクラス $(p;\ \alpha, 1-\alpha)$，$(1-p;\ \beta, 1-\beta)$ の2回調査における比率の期待値になる.

いま，

$$\left.\begin{aligned}\xi_{11}{}^{(1)}&=\alpha^2\\ \xi_{00}{}^{(1)}&=(1-\alpha)^2\end{aligned}\right\}\xi^{(1)}\qquad\left.\begin{aligned}\xi_{11}{}^{(2)}&=\beta^2\\ \xi_{00}{}^{(2)}&=(1-\beta)^2\end{aligned}\right\}\xi^{(2)}$$

とすると

$$\left.\begin{aligned}\xi_{11}&=p\,\xi_{11}{}^{(1)}+(1-p)\xi_{11}{}^{(2)}\\ \xi_{00}&=p\,\xi_{00}{}^{(1)}+(1-p)\xi_{00}{}^{(2)}\end{aligned}\right\}$$

となり，ベクトルとして，

$$\xi=\Sigma\,p_i\,\xi^{(i)},\qquad \Sigma\,p_i=1$$

であるから，点 $(\xi_{11}{}^{(1)},\ \xi_{00}{}^{(1)})$，$(\xi_{11}{}^{(2)},\ \xi_{00}{}^{(2)})$ を，それぞれ第7図の $\xi_{00}=(1-\sqrt{\xi_{11}})^2$ 曲線上の対応する点にとってみると，これは，$(\xi_{11}{}^{(1)},\ \xi_{00}{}^{(1)})$，および $(\xi_{11}{}^{(2)},\ \xi_{00}{}^{(2)})$ の両点を結ぶ線分を p：$(1-p)$ で分割するところに点 $(\xi_{11},\ \xi_{00})$ があることになる，故に $(\xi_{11},\ \xi_{00})$ の範囲は，図の斜線の部分，すなわち

$$\sqrt{\xi_{11}}+\sqrt{\xi_{00}}\geqq1,\quad \xi_{11}+\xi_{00}\leqq1$$

の範囲になる．これは，明きらかに凸集合になる．クラスの数が3つ以上の場合は，クラスの大きさを $p_i(0\leq p_i\leqq1,\ \sum_i^s p_i=1)$ とすると，ξ_{jj} は，$\xi_{jj}=\sum_i p_i\ \xi_{jj}{}^{(i)}$ 又は $\xi=\sum_i p_i\xi^{(i)}$ と書け，上と同じく $\xi^{(i)}$ の凸結合となるので，ξ の範囲は同じ斜線の部分になる．したがって，前後調査のデータについて，周辺分布がほぼ安定しておれば，前後クロス表における主対角線の値をこの図に点うちし，斜線の領域に点が入れば，一応潜在型モデルとしての分析が可能であろう．しかし，上にのべたことからもわかるように，前後2回調査のデータを潜在クラスモデルに当てはめたとき，無数のクラスに分解出来ることになり，モデルの当否には，より以上のくり返し調査が必要になる.

したがって，2回の前後調査のデータを潜在クラスモデルとして考える場合，クラスの数に適当な仮定をおく等のことをしなければならない.

クラス数を仮定する場合，まず考えられるのはいわゆる回答誤差の確率モデルで選択肢と同じ数の潜在クラスを考え，それぞれの本来の回答が，何らかの誤差をうけ確率的に表明されると考える立場である．しかし，クラスの数が2の場合にも，2回調査ではパラメーターが確定しないので，両選択肢に対する回答の信頼度を同じと仮定して，回答確率およびクラスの大きさを推定する方式が考えられる．これは信頼度モデル ([18]) ともいわれる．この場合，回答確率および，クラスの大きさは

$$\alpha=\beta=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\xi_{10}},\qquad p=\frac{\xi_1-\dfrac{1}{2}}{2\sqrt{\dfrac{1}{4}-\xi_{10}}}+\frac{1}{2}$$

また，周辺分布の比率と，潜在クラスの大きさが等しいとした場合の回答確率は

$$\alpha=\xi_1\pm\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_1}\{\xi_{11}-\xi_1{}^2\}}$$

$$\beta=\xi_1\pm\sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_0}\{\xi_{11}-\xi_1^2\}}$$

となる．

1.2) 前後調査における，一致率 $C(r)$ および，回答一致率モデルについて

ここで，文献 [1]，[2] でパネル調査結果の安定性をみるために用いた一致率と回答持続率 $1-\varepsilon$ を用いた回答モデルについて，2肢の場合を例示しておこう．

一致率 $C(r)$ は

$$C(r)=\frac{\Sigma p_{ii}-\Sigma p_i^2}{1-\Sigma p_i^2}$$

である．

ここで，p_{ii} は前後調査において，同一回答肢 i を選択した比率，p_i は周辺分布を示す．

また，回答モデルは前後調査における同一回答の持続率を $(1-\varepsilon)$ とし，周辺分布を p_i とするとき，前後調査でそれぞれ i, j 回答肢を選択する割合 p_{ij} が，

$$p_{ij}=p_i\,\varepsilon\,p_j=p_{ji}$$
$$p_{ii}=p_i\{(1-\varepsilon)+\varepsilon\,p_i\}$$

となるモデルである．

この場合 $C(r)$ と ε との関係は

$$C(r)=1-\varepsilon$$

となる．

まず，$C(r)$ を2肢の場合について前項にのべた ξ_{11}, ξ_{00} で表現すると，

$$C(r)=\frac{2(\xi_{11}+\xi_{00})-[1+(\xi_{11}-\xi_{00})^2]}{1-(\xi_{11}-\xi_{00})^2}$$

となる．これから $C(r)$ を固定して ξ_{11} を動かすと，

$$\xi_{00}^2(1-C(r))-2\xi_{00}[1+\xi_{11}(1-C(r))]-2\xi_{11}+\xi_{11}^2(1-C(r))+C(r)+1=0$$

となるので $C(r)$ が同一値を示す (ξ_{11}, ξ_{00}) の組合せは，第8図のような曲線になり，等一致率線ともいえる．

これは $C(r)$ を0から1まで動かすと，丁度，前項でのべた潜在型モデルとしてのデータの存在範囲と一致し，等一致率線は直線 $\xi_{00}+\xi_{11}=1$ に垂直な線分を等しい割合に分割している線になる．(第8図に $C(r)$ が0から0.1きざみで1までを示す)．そして，$C(r)=0$ の等一致率線は，前項の $\xi_{00}=(1-\sqrt{\xi_{11}})^2$ の曲線に一致し，$C(r)=1$ は $\xi_{11}+\xi_{00}=1$ に一致する．

したがって，回答一致率を用いた回答モデルは，潜在クラス型モデルで，潜在クラスが3の場合に当り，回答肢‘1’をいつも選択する固定層は，第8図の (1, 0) に，回答‘0’肢をいつも選択するクラスは (0, 1) になる．また，実際のデータで (ξ_{11}, ξ_{00}) の対応する点を P とすると P を通り，直線 $\xi_{11}+\xi_{00}=1$ に垂直な線分を AP としたとき，その延長線が，曲線 $\xi_{00}=(1-\sqrt{\xi_{11}})^2$ と交わる点 B が浮動クラスに対応するものになる．浮動クラスの大きさは $1-C(r)$ で示され，固定クラスの大きさはそれぞれ，$C(r)$ の値を AD, AC の比で分割したものになる．

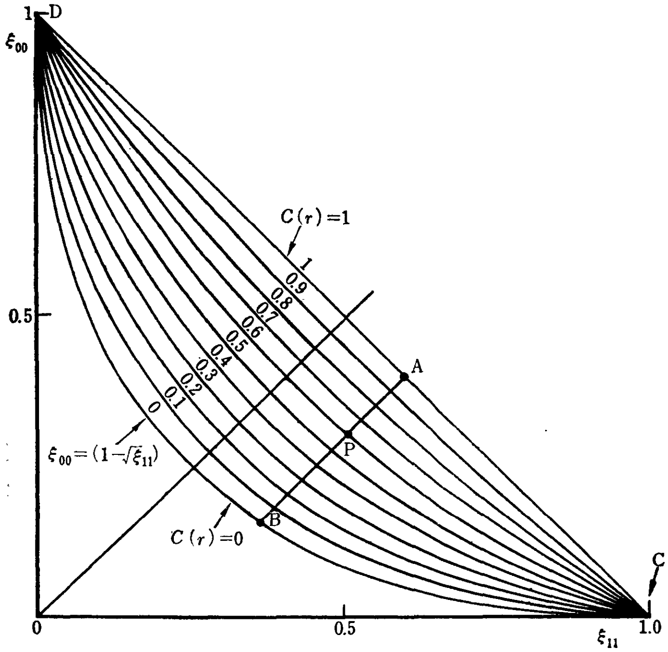
(図中には，$\xi_{11}=0.48$, $\xi_{00}=0.28$ の数値例を示す．他の数値をあげると，$C(r)=0.5$, 回答肢‘1’の固定クラスの大きさ $p_1=0.3$, 回答肢‘0’の固定クラスの大きさ $p_2=0.2$, 浮動クラスは $p=0.5$, 回答肢‘1’の回答確率は $\alpha=0.6$ である)

2) マルコフ型モデルとしてのデータの範囲

仮定から状態の数は2であり，周辺分布が安定していることから，一様なマルコフ過程を考え，その推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ を

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ 1-\beta & \beta\end{pmatrix}\qquad ただし\quad \begin{array}{l}0\leqq\alpha\leqq 1\\ 0\leqq\beta\leqq 1\end{array}$$

とする．安定な周辺分布 $\mathfrak{x}$ は，$\mathfrak{x}=(x_1, x_0)$



第8図　二肢の場合の $C(r)$，(ξ_{11}, ξ_{00}) 平面における等一致率曲線

$$x_1 \alpha + x_0(1-\beta) = x_1$$
$$x_1(1-\alpha) + x_0 \beta = x_0$$

より，
$$x_1 = \frac{1-\beta}{(1-\alpha)+(1-\beta)}, \qquad x_0 = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)+(1-\beta)}$$

故，前後クロス表における主対角線を前項と同じ ξ_{11}, ξ_{00} とすれば

$$\xi_{11} = \frac{1-\beta}{(1-\alpha)+(1-\beta)}\alpha$$

$$\xi_{00} = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)+(1-\beta)}\beta$$

である．

これから，

$$\xi_{11}+\xi_{00} = 1-2\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(1-\alpha)+(1-\beta)}$$

となり

$$0 \leq \xi_{11}+\xi_{00} \leq 1$$

がいえる．故に推移確率に何も制限をおかないならば，データの範囲は第7図における $\xi_{11}+\xi_{00}=1$ と ξ_{11} 軸，ξ_{00} 軸でかこまれる三角形の中になる．しかし，回答の変動に注目するよりも安定度に注目している立場からみると，推移確率として同じ状態に止まる割合が 1/2 以上ある場合が問題になろう．いま，α, β をそれぞれ 1/2 以上にしてみると，簡単な計算により，(ξ_{11}, ξ_{00}) の範囲は，$\xi_{11}+\xi_{00}=1$，$\xi_{00}=1-3\xi_{11}$，$\xi_{11}=1-3\xi_{00}$ の3直線でかこまれた三角形（頂点は $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, (1, 0), (0, 1)）の内部になる．

この範囲を第7図に破線で示しておく．これからみると，前後2回のパネル調査ではデータがこの範囲にあれば潜在型でも，マルコフ型でも，どちらのモデルでも当てはめられる可能性

があることになる．

3)　回答選択肢が3肢の場合における，潜在型モデルのあてはめの一例

回答選択肢が3肢になると，潜在型モデルを一般的に扱うのはむずかしい．ここでは，前節でのべた2項の場合の類推で，潜在クラスに特定の型を考えた場合のモデルおよび分析例をあげる．

3.1)　回答誤差モデル

回答選択肢が3肢であるから潜在クラスも3であると仮定し，それぞれ，各クラスの回答が何らかの原因で確率的になるとし，その回答確率を第6表のようだとする．ここで $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=1$ ならば調査の際，本来の回答が誤差なく表明されるものと考える．また潜在クラスの大きさは ρ_1, ρ_2, ρ_3 $(\Sigma\,\rho_i=1)$ とする．

第6表　回答確率

選択肢 / クラス	1	2	3	クラスの大きさ
I	α_{11}	α_{12}	α_{13}	ρ_1
II	α_{21}	α_{22}	α_{23}	ρ_2
III	α_{31}	α_{32}	α_{33}	ρ_3

$\sum_j \alpha_{ij}=1 \quad 0\leq\alpha_{ij}\leq 1$

いま，これらの (α_{ij})，ρ_i を前後2回調査のデータから推定しようとすると，(α_{ij}) に何らかの仮定を入れる等のことをしなければ推定できない．そこで，つぎのような2つの型を考えてみる．

i)　回答誤差モデルの 1.

これは，回答選択肢の性質が「賛成」，「反対」および「その他」となっているようなものを考え，「その他」と回答する人の中には，本来「賛成」のもの，あるいは本来「反対」のものがまざっているだろうと考えられる場合に当てはまると思われるモデルである．すなわち，回答選択肢の‘1’および‘3’は両極で‘2’が中間的な回答肢に当る．また潜在クラスも，これと同じように，クラス，I, III は本来，両極の意見をもつと考えられるクラス，クラス II が，中間のクラスである．そして，回答確率は，両極のクラスから中間のクラスにいく割合がそれぞれ $1-\alpha$, $1-\gamma$ で中間のクラスはある程度両極にいき，その割合が $\beta/2$ づつというモデルである（第7表　参照）

数値例からみると，クラス II が I, III の中間としての意味あいが強いほど当てはまりがよいようにみえる．

ii)　回答誤差モデルの2（林 [9] の誤差モデル）

これは，潜在クラスおよびその回答確率が第8表のようになるモデルで，やはり，I, III が両極クラス，II が中間の選択肢に対応する．本来の意見と反対の意見を回答する確率は中間にくらべ自乗のオーダーで小さくなり，中間クラスでの両極への回答確率は，両極クラスの大きさに比例するといういわば大勢順応型を仮定している．このモデルは回答選択肢の性質が「賛成」，「どちらともいえぬ」，「反対」というような連続型になるとよいあてはまりをみせるが，「賛成」,「反対」と対立する2項との中間に「場合による」等の選択肢が入るようなときはややあてはまりはよくないようにみえる．

第7表　モデル①の回答確率

クラス	潜在クラスの大きさ	回答確率 1	2	3
I	ρ_1	α	$1-\alpha$	0
II	ρ_2	$\frac{\beta}{2}$	$1-\beta$	$\frac{\beta}{2}$
III	ρ_3	0	$1-\gamma$	γ

$0\leq\alpha,\ \beta,\ \gamma\leq 1$

第8表　モデル②の回答確率

クラス	潜在クラスの大きさ	回答確率 1	2	3
I	ρ_1	a	$a\alpha$	$a\alpha^2$
II	ρ_2	$\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_3}\beta$	$1-\beta$	$\frac{\rho_3}{\rho_1+\rho_3}\beta$
III	ρ_3	$c\gamma^2$	$c\gamma$	c

$$a=\frac{1}{1+\alpha+\alpha^2} \qquad 0\leq\alpha\leq 1$$

$$0\leq\beta\leq 1$$

$$c=\frac{1}{1+\gamma+\gamma^2} \qquad 0\leq\gamma\leq 1$$

3.2) 各回答選択肢に対応する固定クラスと1つの浮動クラスのモデル

この場合は潜在クラスの数が，固定クラス3，浮動クラス1の計4つになる．固定クラスの回答確率は，それぞれ(1,0,0)，(0,1,0)，(0,0,1)であるが，浮動クラスの回答確率により，更に2つの型を考えた．その1つは，任意の回答確率を与えるモデルであり，いま1つは，浮動クラスの回答確率が固定クラスの大きさに比例するという大勢順応モデルである．それぞれの回答確率を第9表に示す．

第9表　固定・浮動クラスのモデルと回答確率

モデル③

クラス	潜在クラスの大きさ	回答確率 1	2	3
I	ρ_1	1	0	0
II	ρ_2	0	1	0
III	ρ_3	0	0	1
IV	ρ_4	a_1	a_2	a_3

$\Sigma a_i = 1$

モデル④

クラス	潜在クラスの大きさ	回答確率 1	2	3
I	ρ_1	1	0	0
II	ρ_2	0	1	0
III	ρ_3	0	0	1
IV	ρ_4	$c\rho_1$	$c\rho_2$	$c\rho_3$

$$c = \frac{1}{1-\rho_4}$$

3.3) いくつかのあてはめの例

§1であげた前後調査のデータを用い，上の4つのモデルについて計算してみると，それぞれの潜在クラスの大きさおよび回答確率は以下の表のようになる．あるものでは成り立つが，別の項目では成り立たない等の様子がみられる．

これからみても分る通り，モデルを仮定したときデータの成立する範囲が問題になり，先にのべたように当てはまりの良さ，適用範囲の広さだけではモデルの良否はきめられないものと思われる．また，モデルを仮定して分析を進めるときにはどのような背景でモデルを構成したかが十分に考慮されなければならないと思う．

第10表　モデル当てはめの結果

その1)「先生が悪いことをした」

モデル	クラス	潜在クラスの大きさ	回答確率 1	2	3*
①	I	0.172	0.630	0.370	0
	II	0.473	0.5	0	0.5
	III	0.355	0	0.192	0.808
②	I				
	II				
	III				
③	I	0.102	1	0	0
	II	0.020	0	1	0
	III	0.185	0	0	1
	IV	0.693	0.353	0.157	0.490
④	I	0.097	1	0	0
	II	0.036	0	1	0
	III	0.147	0	0	1
	IV	0.720	0.347	0.128	0.525

* 回答肢 1：(1 そんなことはない)
2：(3 その他　4 無答)
3：(2 ほんとうだ)

その 2) 「現在の憲法をどう思うか」

モデル	クラス	潜在クラスの大きさ	回答確率 1	2	3*
①	I				
	II				
	III				
②	I	0.075	0.677	0.239	0.084
	II	0.870	0.078	0.866	0.056
	III	0.055	0.059	0.209	0.732
③	I	0.026	1	0	0
	II	0.302	0	1	0
	III	0.022	0	0	1
	IV	0.650	0.148	0.743	0.109
④	I	0.032	1	0	0
	II	0.206	0	1	0
	III	0.025	0	0	1
	IV	0.737	0.122	0.782	0.096

* 回答肢 1： (1 社会主義的な憲法)
2： (2 国情にあった＋3 小修正＋その他)
3： (4 絶対にかえるべきでない)

その 3) 「教育の問題」に関心があるか

モデル	クラス	潜在クラスの大きさ	回答確率 1	2	3*
①	I	0.263	0.248	0.752	0
	II	0.168	0.416	0.168	0.416
	III	0.569	0	0.344	0.656
②	I	0.076	0.666	0.244	0.090
	II	0.716	0.121	0.549	0.330
	III	0.208	0.001	0.031	0.968
③	I	0.033	1	0	0
	II	0.000	0	1	0
	III	0.169	0	0	1
	IV	0.798	0.130	0.560	0.310
④	I				
	II				
	III				
	IV				

* 回答肢 1： (1 あまり関心がない)
2： (2 関心がある)
3： (3 非常に関心がある)
その他，無答は除いて分析した

また，かなり考え方の相異するモデルでも，大部分のデータは両立するようにみえる．**2, 3** の例も図に示しておいたが，潜在クラスの大きさ，回答確率の値等が前提となるモデルのちがいにより，いろいろの値を示す．

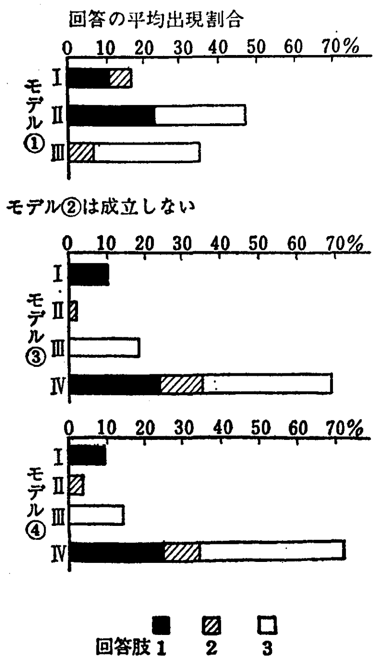
あてはめた数値を用いるとき一考を要するものと思われる．

その 4)「日本の防衛問題」に関心があるか.

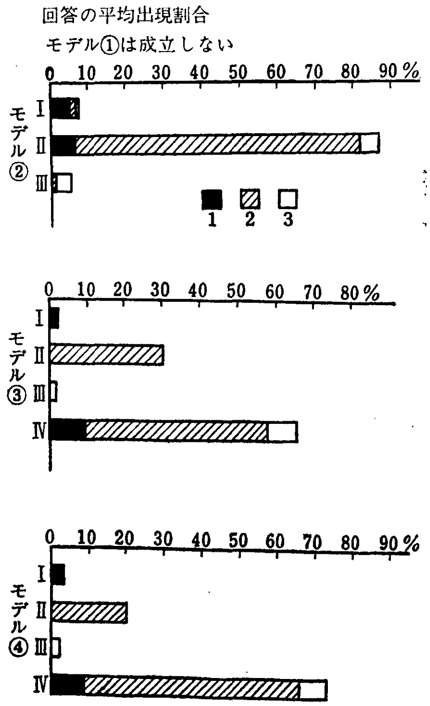
モデル	クラス	潜在クラスの大きさ	回答確率 1	2	3*
①	Ⅰ	0.220	0.954	0.046	0
	Ⅱ	0.686	0.287	0.426	0.287
	Ⅲ	0.094	0	0	1.000
②	Ⅰ	0.526	0.694	0.230	0.076
	Ⅱ	0.061	0.011	0.981	0.008
	Ⅲ	0.413	0.098	0.253	0.649
③	Ⅰ	0.1824	1	0	0
	Ⅱ	0.0098	0	1	0
	Ⅲ	0.1327	0	0	1
	Ⅳ	0.6751	0.333	0.416	0.251
④	Ⅰ				
	Ⅱ				
	Ⅲ				
	Ⅳ				

* 回答肢 1：(1 関心がない+2 あまり関心がない)
2：(3 やや関心がある)
3：(4 関心がある)
その他，無答は除いて分析した.

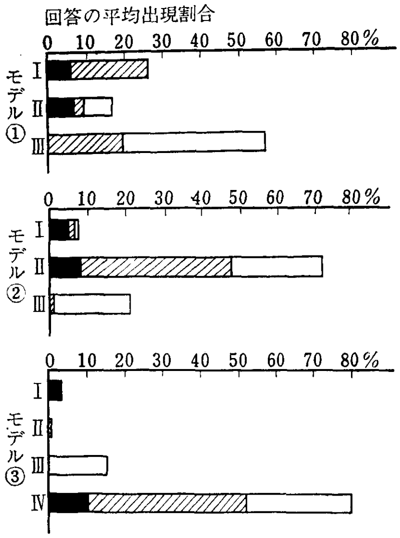
以上，調査における回答の機構に焦点をあて，いくつかの分析を示した．まだ実際の資料(調査データ) の収集も不十分であるし，十分な考えのもとに調査を企画した回数も少ない．現在の段階では，調査という現象について，試行錯誤的に分析を進めていくというところである．



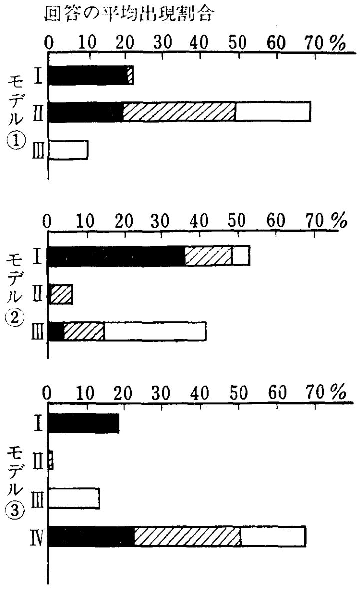
第9図「先生が悪いことをした」



第10図「現在の憲法をどう思うか」



第11図 「教育の問題」に関心があるか



第12図 「日本の防衛問題」に関心があるか

おわりに

データは，統計数理研究所の『社会現象の統計的モデル化の研究』調査の際得られた前後調査の結果を利用した.

研究を進めるにあたり，研究所の林 知己夫部長をはじめ多くの方々にお世話になった. 厚くお礼申し上げる次第である. また分析途中の集計計算その他について，第二研究部の林 文さん，大高道子さん，第一研究部の横山季世さんにお世話になった. あわせてお礼申し上げます.

統計数理研究所

参考文献

[1] 鈴木達三：「面接調査における回答の安定性について」,『統計数理研究所彙報』第16巻，第1号，1968, 47～102.
[2] 鈴木達三，高橋宏一：「パネル調査結果分析のための一致指数」,『統計数理研究所彙報』第16巻，第1号，1968, 103～107.
[3] 研究委員会：「面接調査と自記式調査の比較」,『統計数理研究所，数研研究リポート』No. 24「国民性の研究」1969.
[4] 研究委員会：「社会現象の統計的モデル化の研究」,『統計数理研究所，数研研究リポート』No. 19, 1968.
[5] 岡本栄一，高橋宏一：「多問型多肢選択形式テストの偶然正答確率について」,『能力開発研究所研究紀要』II 1968, 14～25.
[6] Lazarsfeld, P. F.: "A Conceptual Introduction to Latent Structure Analysis", in *Mathematical Thinking in the Social Sciences*, 1954, Ch. 7.
[7] ――――――: "Latent Structure Analysis in Psychology": *A Study of a Science, Conceptual and Systematic* vol. 3., 1959.
[8] 林知己夫：「回答誤差等を考慮に入れた標本抽出計画」,『統計数理研究所彙報』第5巻,第1号, 1957.
[9] 同 上：「社会調査における回答誤差―それに基づく歪みをどう補正するか」,『創立20年記念論文集』NHK 放送文化研究所，1967.
[10] Anderson, T. W.: "Probability Models for Analyzing Time Changes in Attitude, in *Mathematical Thinking in the Social Sciences*, P. F. Lazarsfeld (ed.), New York: The Free Press of Glencoe, 1954, Ch. 1.
[11] Coleman, J. S.: *Models of Change and Response Uncertainty*, Prentice-Hall, 1964.
[12] 青山博次郎：「態度変化のモデル」,『統計数理研究所彙報』第15巻，第2号，1967.

[13] Blumen, I., M. Kogan, and P. J. Mc Carthy : *The Industrial Mobility of Labor as a Probability Process*, Ithaca, N. Y. : Cornell University Press, 1955.
[14] Goodman, L. A. : "Statistical Methods for the Mover-Stayer Model," *J. Amer. Stat. Assoc.*, 56, 1961, 841-868.
[15] Shohat, J. A. and Tamarkin, J. D.: *The problem of moments*, American Mathematical society, Now York, 1943.
[16] Isii, K.: "The extrema of probability determined by generalized moments (I) bounded random variables," *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, vol. 12, 1960, 119-134.
[17] Kemeny, J. G. and J. L. Snell: *Finite Markov Chains*, Princeton, N. J. : Van Nostrand, 1960.
[18] Goodman, L. A. and W. H. Kruskal : "Measures of Association for Cross Classifications: II. Further Discussion and References," *J. Amer. Stat. Assoc.*, 54, 1959, 123-163.

付　録

定理 1 の証明 :

$I=[0,\ 1]$,

S ; I に含まれる閉集合,

$\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$; 与えられた n 個の実数 $(n\geqq 1)$ とする. 必要性の方は明きらかである. 十分性を示す.

$\mathfrak{M}_n$ を n 次の多項式全体の作るベクトル空間とし,

$$\mathfrak{M}=\{h(x)\,;\ \text{実数値関数}\ |\ \exists\, p_1,\ p_2 \in \mathfrak{M}_n,\ p_1 \leq h \leq p_2\ on\ S\}$$

とする. $\mathfrak{M}$ もベクトル空間になる. 勿論 $\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}$. I の任意の部分区間の定義関数, $\chi_J(x)$, すなわち $\chi_J(x)=1$ $(x\in J)$, $\chi_J(x)=0$ $(x\notin J)$ で定められる関数, は $\mathfrak{M}$ に属する. さて $\mathfrak{M}_n$ 上の汎関数 $l(p)$ を次のように定義する;

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{のとき,}$$

$$l(p)=\sum_{i=0}^{n} a_i \mu_i.$$

このとき l は加法的である;

$$l(ap)=al(p),$$
$$l(p_1+p_2)=l(p_1)+l(p_2).$$

次に $p\in \mathfrak{M}_n$, $p(x)\geqq 0$ $(x\in S)$ とする. すると, このような p に対しては $l(p)\geqq 0$ が定理の仮定より成り立つ.
さて非負汎関数に対する拡張定理 ([15] の p. xiii, 参照):

「$\mathfrak{M}$ を抽象空間 Ω 上で定義された実数値関数 $x(t)$, $(t\in\Omega)$ の作る線形空間とする. $\mathfrak{M}_0$ を $\mathfrak{M}$ の部分線形空間, Ω_0 を Ω の任意に与えられた部分集合, $f_0(x)$ を $\mathfrak{M}_0$ 上で定義された Ω_0 非負, 加法的な汎関数とする. さらに $\mathfrak{M}_0$ について次の性質を仮定する;

各 $x(t)\in\mathfrak{M}$ に対して, $x_1(t)\leqq x(t)\leqq x_2(t)$, $t\in\Omega_0$ をみたす $x_1(t)$, $x_2(t)$ が $\mathfrak{M}_0$ に存在する.

このとき, f_0 は $\mathfrak{M}$ 上に Ω_0 非負, 加法的な汎関数として拡張できる.」

がある. この定理で, $\Omega=I$, $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_n$ $\Omega_0=S$, $f_0=l$ と置いてみると, 定理の条件は満たされている. よって l は $\mathfrak{M}_n$ に S-非負な加法的汎関数として拡張されるがそれを改めて l としておく. そこで任意の区間 J に対し $\psi(J)=l(\chi_J)$ と定義する. ψ は次の性質をもつ;

i) $\psi(J)\geqq 0$ ($\because$ χ_J は S 上非負)

ii) $J=\sum_{1}^{k} J_i$, $J_i J_j=\phi$ なら $\psi(J)=\sum_{i=1}^{k}\psi(J_i)$

($\because$ $\chi_J(x)=\Sigma\chi_{J_i}(x)$ と l の加法性)

iii) $\psi(J)$ は有界 ($\because$ $\psi(I)=l(\chi_I)=l(1)=\mu_0=1$, $\chi_I=\chi_J+\chi_{I-J}$ で $\chi_{I-J}\in\mathfrak{M}$ 且つ S 上非負故,
$1=l(\chi_J)+l(\chi_{I-J})\geqq l(\chi_J)\geqq 0$)

ところで [15] p. xii によると, $\mathcal{R}_1$ (1次元ユークリッド空間) のすべての区間に対し定義された非負, 有限な集合関数 $\psi(J)$ が有限劣加法性 $\left(J=\sum_{i=1}^{m} J_i,\ J_iJ_j=\phi,\ i\neq j \text{ なら } \psi(J)\leqq\sum_{i=1}^{m}\psi(J_i)\right)$ を有するなら, それは常

に与えられた集合関数と同一の連続区間を有し，そこで一致した値をもつ少くもすべてのボレル集合に対して定義される分布集合関数に拡張できる.

さて上で定義したψは$[0, 1]$の区間に対し考えていたが$\mathcal{R}_1$の一般の区間Kに対しては

$$\psi(K)=\psi(K\cap I)$$

と定義することにより$\mathcal{R}_1$のすべての区間で定義された集合関数と考えることができる．というのはKが区間なら$K\cap I$はIに含まれる区間であるからである．そして次の性質をもつ;

i)　$0\leqq\psi(K)\leqq 1$,

ii)　$K=K_1+\cdots+K_m,\ K_iK_j=\phi,\ i\neq j$ なら $\psi(K)=\sum_{i=1}^{m}\psi(K_i)$,

iii)　$K\cap I=\phi\Rightarrow\psi(K)=0$

$(\because I\supset\phi,\ \psi(\phi)=0\quad\because \chi_\phi(x)\equiv 0\quad\therefore l(\chi_\phi)=0)$

この$\mathcal{R}_1$に拡張されたψは上述の集合関数の拡張定理の条件をみたすから，われわれ$\mathcal{R}_1$のボレル集合に対し定義される測度Φを得る．このΦが定理1で求めている確率測度である．それをこれから示す．まず$\Phi(\mathcal{R}_1)=\psi(I)=1$であるから確率測度であることはよい．次に$\Phi$の台が$S$に含まれることであるが，$u_0\in\mathcal{R}_1-S$とする．$u_0$を内点として含む$\Phi$の連続区間，(したがって$\psi$の連続区間でもある)，で$\mathcal{R}_1-S$に含まれるものを$I_0$とする．さて$\chi_{I_0}$は$S$上で0だから$S$上で$\chi_{I_0}0$とも$\leqq\chi_{I_0}\geqq 0$とも書き得る．よって，$l(\chi_{I_0})\leqq 0$ $(\because 0\leqq l(-\chi_{I_0})=-l(\chi_{I_0})\ \therefore \chi_{I_0}\leqq 0)$ 且つ$l(\chi_{I_0})\geqq 0$, 故に$l(\chi_{I_0})=0$であり，したがって$\psi(I_0)=0$, すなわち$\Phi(I_0)=0$, 故にu_0はΦの台に属さない．すなわち$\mathcal{R}_1-S\subset\mathcal{R}_1-$ (Φの台) で結局，Φの台$\subset S$が示された．最後に

$$\int_{\mathcal{R}_1}x^\nu\,d\Phi=\mu_\nu\qquad \nu=1,2,\cdots,n$$

を示す．今の場合Φの台はIに含まれている.

そこで$I=[0,1]$を$I_1+\cdots+I_m=I$, $\bar{I}_i$でのx^νの増分がεより小さいように，且つ各I_iがψ及びΦの連続区間となるように部分区間に分割する．$u_i\in I_i$とし，$y_0(u)=u_i^\nu$, $u\in I_i$, $(i=1,2,\cdots,m)$, $y_0(u)=0$, $u\notin I$, とおく.

すなわち，$y_0(u)=\sum_{i=1}^{m}u_i^\nu\chi_{I_i}$と書ける．このとき，

$y_0(u)-\varepsilon<u^\nu<y_0(u)+\varepsilon,\ u\in I$ であり，

したがって　$l(y_0(u)-\varepsilon)\leqq l(u^\nu)\leqq l(y_0(u)+\varepsilon)$,

故に，　$l(y_0)-\varepsilon\leqq\mu_\nu\leqq l(y_0)+\varepsilon$,

一方　$l(y_0)=\sum_{i=1}^{m}u_i^\nu l(\chi_{I_i})=\sum_{i=1}^{m}u_i^\nu\psi(I_\nu)=\sum_{i=1}^{m}u_i^\nu\Phi(I_\nu)$,

そこで　$\varepsilon\to 0$ として $\int_I u^\nu d\Phi=\mu_\nu$ を得る.

定理 2′ の証明:

i)　$[a,b]\cup[c,d]$ で非負なることと，$[a,d]$ で非負なることは一次式の場合は同値である．さて i) に示された1次式が $[a,d]$ で非負なことは明きらか．逆に $[a,d]$ で非負な1次式は (定数でないとして)，η_1, $\eta_2>0$, $\eta_1\neq\eta_2$ でもって

$$\frac{y-\eta_1}{\eta_2-\eta_1}=\frac{t-a}{d-a}$$

と書け，これを整頓して

$$y=\frac{\eta_1}{d-a}(d-t)+\frac{\eta_2}{d-a}(t-a)$$

となり与えられた形をもつ．定数の場合は$x_0^2=y_0^2$のときに得られる.

ii)　与えられた形の2次式が考えている区間で非負なことは明きらか，逆を示す．まず2次式が2実根 (相異る) をもつ場合から考える．このとき2次式は2つの1次式の積に分解されるが，この2次式が$[a,b]\cup[c,d]$で非負なる必十条件は因子の2つの一次式が第11表に示すような関係をもっていることである．たとえば$[a,b]$で1つの1次式の符号が変わるなら他方も同時に変わらねばならず，したがって2次式は重根をもつ場合になるからである．さて$[a,b]$, $[c,d]$で$+,+;\ +,-;\ -,\ +;\ -,-$なる1次式はそれぞれ,

第 11 表

[a, b]		[c, d]	
第1因子	第2因子	第1因子	第2因子
+	+	+	+
+	+	−	−
−	−	+	+
−	−	−	−

(+は非負，−は非正を表わす)

$$x_0{}^2(t-a)+y_0{}^2(d-t),$$
$$x_0{}^2(b-t)+y_0{}^2(c-t),$$
$$x_0{}^2(t-b)+y_0{}^2(t-c),$$
$$x_0{}^2(a-t)+y_0{}^2(t-d)$$

なる一般形で示されることは (i) の証明中の方法によって容易にわかる．したがって表に示される4つの場合のそれぞれの一般形として

$$\{x_0{}^2(t-a)+y_0{}^2(d-t)\}\{u_0{}^2(t-a)+v_0{}^2(d-t)\},$$
$$\{x_0{}^2(b-t)+y_0{}^2(c-t)\}\{u_0{}^2(b-t)+v_0{}^2(c-t)\},$$
$$\{x_0{}^2(t-b)+y_0{}^2(t-c)\}\{u_0{}^2(t-b)+v_0{}^2(t-c)\},$$
$$\{x_0{}^2(a-t)+y_0{}^2(t-d)\}\{u_0{}^2(a-t)+v_0{}^2(t-d)\}$$

を得るが，これらを展開すると，それぞれ，

$$x_0{}^2u_0{}^2\left\{\begin{matrix}(t-a)^2\\(b-t)^2\\(t-b)^2\\(a-t)^2\end{matrix}\right\}+(x_0{}^2v_0{}^2+y_0{}^2u_0{}^2)\left\{\begin{matrix}(t-a)(d-t)\\(b-t)(c-t)\\(t-b)(t-c)\\(a-t)(t-d)\end{matrix}\right\}+y_0{}^2v_0{}^2\left\{\begin{matrix}(d-t)^2\\(c-t)^2\\(t-c)^2\\(t-d)^2\end{matrix}\right\}$$

となる．この第2項は ii) の一般形の第2項か第3項の形をしている．またこの第1項と第2項は合わせて t のすべての値に対して非負な2次式となっている．よってかかる2次式が (ii) の形に表わせることをいえば証明はすべて終る．ところで $-\infty<t<\infty$ で非負な2次式は任意に与えられた $\xi,\ \eta\ (\xi<\eta)$ を用いて

$$(x_0+x_1t)^2+y_0{}^2(t-\xi)(\eta-t)$$

の形に書き表わせる．この証明をする．非負な2次式を $\alpha+\beta t+\gamma t^2$ とする．(重根をもつときは第1項のみで表わせるから非負を正と限定して一般性を失わない．)

$$\alpha+\beta t+\gamma t^2=\zeta(t-\xi)(\eta-t)$$

の判別式 D は

$$D=\{\beta-\zeta(\xi+\eta)\}^2-4(\gamma+\zeta)(\alpha+\zeta\xi\eta)$$
$$=(\eta-\xi)^2\zeta^2-2\{\beta(\xi+\eta)+2(\alpha+\xi\eta\gamma)\}+(\beta^2-4\alpha\gamma)$$

となる．D を ζ についての2次式とみるとき定数項は，与えられた非負な2次式の判別式であるから，負である．このことから $D=0$ は ζ について少くも正の根を一つ有する．それを $\zeta_0{}^2$ とすると $\alpha+\beta t+\gamma t^2-\zeta_0{}^2(t-\xi)(\eta-t)\geqq 0$ で重根を有する．よってそれを $(x_0+x_1t)^2$ と書けば，結局，

$$\alpha+\beta t+\gamma t^2=\zeta_0{}^2(t-\xi)(\eta-t)+(x_0+x_1t)^2$$

と書けることになる．(証明終り)．

註　(ii) の表現が一次式の場合も含んでいることは，2根ある場合の証明での最初と最後の場合で $u_0{}^2=v_0{}^2$ とおくことによって示される．

iii)　3次式の場合の証明に入る．ここで iii) で与えられるものが $[a,b]\cup[c,d]$ で非負なことは明らかだからその逆を示す．2次式の場合も表現中に含まれることは上述の註と同じ考えで示されるから実際に3次として証明を進める．方法は (ii) と全く同じである．3次式であるから $=0$ とおくとき必らず一根はある．さて，一根あるいは2根（単根と重根）しか有さない場合は $[a,b]\cup[c,d]$ で非負と $[a,d]$ で非負は同値であることが容易にわかる．この場合は定理2により $(t-a)(x_0+x_1t)^2+(d-t)(y_0+y_1t)^2$ と書け (ii) の特殊な場合になっている．そこで3根のある場合を証明すればよい．ii) と同じ考えで3つの一次式に分解したとき，その間には第12表の関係が必要である．

第 12 表

[a, b]			[c, d]		
第1	第2	第3	第1	第2	第3
+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	−	−
+	−	−	+	−	−
+	−	−	−	+	−

観察から何れの場合も [a, b] ∪ [c, d] で非負な2次式と [a, d] で非負な一次式の積であることを知る．よって i), ii) より，

$$\{x_0^2(t-a)+y_0^2(d-t)\}\{(u_0+u_1t)^2+(t-a)(d-t)v_0^2+(t-b)(t-c)w_0^2\}$$

の形に表わせるが，これを展開した．

$$x_0^2(t-a)(u_0+u_1t)^2+y_0^2(d-t)(u_0+v_1t)^2+x_0^2v_0^2(t-a)^2(d-t)+y_0^2v_0^2(t-a)(d-t)^2$$
$$+x_0^2w_0^2(t-a)(t-b)(t-c)+y_0^2w_0^2(t-b)(t-c)(d-t)$$

で，第1項から第4項までの和は明きらかに [a, d] で非負な3次式だから定理2により

$$(t-a)(x_0+x_1t)^2+(d-t)(y_0+y_1t)^2$$

の形で書ける．よって全体として iii) の形になっていることが示された．（証明終）