flow (T_t) の混合性のスペクトルによる特徴付け

窪　川　義　広

(1969 年 2 月　受付)

Spectral Characterization of Mixing Property of Flow (T_t)

Yoshihiro Kubokawa

Let (T_t) be a measurable flow on a Lebesgue space $(\Omega, \mathscr{B}, m)$ and let μ be a maximal spectral measure of induced unitary operators (U_t) on $L_2(\Omega) \ominus C$, where C is the subspace of constant functions. We prove the following theosem : The flow (T_t) is mixing if and only if the characteristic function $\varphi(t)$ of the measure μ converges to 0 as $t \to \infty$.

The Institute of Statistical Mathematics

1. 序　文

(T_t) をルベッグ空間 (Ω, B, m) 上の可測な flow とする. flow (T_t) のエルゴード性，弱混合性はヒルベルト空間 $L_2(\Omega, \mathrm{B}. m)$ 上に誘導されるユニタリ作用素の 1 径数群 (U_t) のスペクトルにより特徴付けられることは周知である. この小論の目的は flow (T_t) の混合性がやはりユニタリ作用素 (U_t) のスペクトルにより特徴付けられることを示すことである. 即ち「flow (T_t) が混合性をもつ為の必要十分条件は. ユニタリ作用素 (U_t) の $L_2(\Omega) \ominus C$ (C は定数の空間, 即ち $L_2(\Omega) \ominus C = \{f; \int f dm = 0, \int |f|^2 dm < \infty\}$) における最大スペクトル測度 μ の特性関数 $\varphi(t)$ が $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$ を満すことである. 」) 定理 1) 尚エルゴード性，弱混合性も特性関数 $\varphi(t)$ により特徴付けられることを示す (定理 2).

2. 定義と記号

(Ω, B, m) を確率測度空間とする，即ち Ω を抽象空間，B を Ω の部分集合よりなる σ-代数，m を B 上の確率測度とする. (X, L, μ) をルベッグ測度空間，即ち X を単位区間 $[0, 1)$，L を X のルベッグ可測集合の全体，μ を L 上で定義されたルベッグ測度とする. 確率測度空間 (Ω, B, m) はルベッグ測度空間 (X, L, μ) に測度同型のとき，ルベッグ空間という [3]. (T_t) がルベッグ空間 (Ω, B, m) 上の可測な flow (以下単に flow (T_t) 又は (T_t) で示す.) であるとは次の 3 つの条件を満すことをいう.

(1)　各 $t(-\infty < t < \infty)$ に対して，T_t は Ω より Ω 上への可逆な保測変換である.

(2)　$T_t \circ T_s \omega = T_{t+s} \omega \ (-\infty < t,\ s < \infty,\ \omega \in \Omega)$.

(3)　任意の B-可測関数 $f(\omega)$ に対して，$f(T_t \omega)$ は $L \times \mathrm{B}$-可測である.

(T_t) がエルゴード的とは，(T_t)-不変集合 (即ち $T_t E = E (\forall t)$) は確率 0 又は 1 であることをいう. (T_t) が混合性をもつとは，任意の二つの可測集合 E, F に対して，$\lim_{t \to \infty} m(T_{-t} E \cap F) = m(E) m(F)$ が成立つことをいう. (T_t) が弱混合性をもつとは，任意の二つの可測集合 E, F に対して，

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |m(T_{-t} E \cap F) - m(E) m(F)| dt = 0$$

が成立つことをいう.

$$L_2(\Omega) = L_2(\Omega, \mathrm{B}, m) = \left\{ f; \int |f(\omega)|^2 dm(\omega) < \infty,\ f : \mathrm{B}\text{-可測} \right\}$$

とおく.

$$(U_t f)(\omega) = f(T_t \omega), \ f \in L_2(\Omega),$$

によりユニタリ作用素の1径数群 (U_t) が定義される．このとき次の事実は周知である([1], [3])．

(A) (T_t) がエルゴード的である為の必要十分条件は，(U_t)-不変関数が定数のみよりなることである．

(B) (T_t) が弱混合性をもつ為の必要十分条件は (U_t) が $L_2(\Omega) \ominus C$ で連続スペクトルをもつことである．

(C) (T_t) が混合性をもつ為の必要十分条件は，$\lim_{t\to\infty} (U_t f, g) = (f, 1)(1, g) \ (\forall f, g \in L_2(\Omega))$ が成立つことである．

(D) (T_t) が混合性をもつ為の必要十分条件は，$\lim_{t\to\infty} (U_t f, f) = 0 \ (\forall f \in L_2(\Omega) \ominus C)$ が成立つことである．

3. (T_t) の混合性のスペクトルによる特徴付け

$L_2(\Omega)$ 上に誘導されたユニタリ作用素の1径数群 (U_t) は Stone 分解ができて，

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d(E(\lambda) f, g)$$

となる．ここで $E(\lambda)$ は射影作用素であり，$(E(\lambda) f, f)$ $(f \in L_2(\Omega))$ を分布関数とする測度はスペクトル測度という．このようなスペクトル測度の中で最大のもの，即ち他のスペクトル測度がこれに関して絶対連続であるようなものが存在する．これを最大スペクトル測度という．ここで重要な役割を演ずるのは，$L_2(\Omega) \ominus C$ 上にユニタリ作用素の1径数群 (U_t) を制限したときの最大スペクトル測度の特性関数の性質である．

〔定理1〕 (T_t) が混合性をもつ為の必要十分条件は，誘導されたユニタリ作用素 (U_t) の $L_2(\Omega) \ominus C$ における最大スペクトル測度 μ の特性関数 $\varphi(t)$ が $t\to\infty$ のとき0に収束することである：

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\mu(\lambda) = 0.$$

注意：この定理は Gauss flow のときには既知である([2], [3])．定理はその一般化といえるであろう．

これを証明する為に次の lemma を利用する．

lemma 1. X を実直線 $(-\infty, \infty)$, B を X のボレル集合全体の σ-代数とする．μ が (X, B) 上の有限測度で，条件：$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{8} e^{it\lambda} d\mu(\lambda) = 0$ を満すならば，任意の μ-可積分ボレル関数 f に対して，

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) \, d\mu(\lambda) = 0.$$

(証明) $$\mathscr{F} = \left\{ f ; \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\mu(\lambda) < \infty, \ \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) \, d\mu(\lambda) = 0 \right\}$$

とおく．まず次のことが成立つ．

$f_n \in \mathscr{F}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 且つ $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n - f| d\mu = 0$, ならば $f \in \mathscr{F}$.

$\sum_{k=1}^{l} a_k e^{it_k\lambda}$ (a_k, t_k は任意の実数，l は任意の自然数) の形の関数は明らかに $\mathscr{F}$ に属する．これより Stone-Weierstrass の定理と測度 μ が有限であることにより，任意の連続な周期関数 f は $\mathscr{F}$ に属する．任意の μ-可積分ボレル関数 f に対して，連続な周期関数列 $\{f_n\}$ $(n=1,$

$2,\cdots)$ で $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n-f|\,d\mu=0$ を満すものが存在するから，lemma は証明されたことになる.

(定理の証明)　必要条件：(T_t) が混合性をもつと仮定すれば，$\lim_{t\to\infty}(U_t f, f)=0$ $(\forall f\in L_2(\Omega)\ominus C)$ が成立つ．最大スペクトル測度 μ が $\mu(\Lambda)=(E(\Lambda)f, f)$ と表現されているとすれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,d\mu(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,d(E\lambda)f, f)=(U_t f, f)\to 0\ (t\to\infty).$$

十分条件：任意の元 g $(g\in L_2(\Omega)\ominus C)$ に対して $\lim_{t\to\infty}(U_t g, g)=0$ を示せばよい．Stone の定理により，

$$(U_t g, g)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,d\,(E(\lambda)g, g).$$

ここで測度 $(E(\Lambda)g, g)$ は最大スペクトル測度 μ に関して絶対連続であるから，μ-可積分ボレル関数 $h(\lambda)$ が存在して

$$(U_t g, g)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\cdot h(\lambda)\,d\mu(\lambda).$$

lemma 1 により，　$\lim_{t\to\infty}(U_t g, g)=0$

系. (U_t) の $L_2(\Omega)\ominus C$ における最大スペクトル測度 μ がルベッグ測度に関して絶対連続ならば，(T_t) は混合性をもつ.

(証明)　定理 1 と Riemann-Lebesgue の定理による.

〔定理 2〕　測度 μ を $L_2(\Omega)\ominus C$ 上に flow(T_t) により誘導されたユニタリ作用素 (U_t) の最大スペクトル測度とし，$\varphi(t)$ を μ の特性関数とすると，次のことが成立つ.

(1)　(T_t) がエルゴード的である為の必要十分条件は，

$$\text{(A)}\quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)\,dt=0.$$

(2)　(T_t) が弱混合性をもつ為の必要十分条件は，

$$\text{(B)}\quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)e^{-it\lambda}\,dt=0\ \ (\forall\lambda\in(-\infty,\infty)).$$

(3)　(T_t) が混合性をもつ為の必要十分条件は，

$$\text{(C)}\quad \lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0\ \ (\text{定理 } 1)$$

(4)　(T_t) が混合性をもつならば，弱混合性をもつ．$(T\ )$ が弱混合性をもつならば，エルゴード的である.

注意：(4) は周知である．ここでは別証明を与える

(証明)　(1)

$$\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)\,dt=\int_{\lambda\neq 0}\frac{e^{i\lambda T}-1}{i\lambda T}\,d\mu(\lambda)-\mu(\{0\}).$$

これより

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)\,dt=\mu(\{0\})$$

$\mu(\{0\})=0$ と (T_t) のエルゴード性が同等であることを示す．最大スペクトル測度 μ は，$\mu(\Lambda)=(E(\Lambda)f, f)$ $(\Lambda$ はボレル集合) と表現されているものとし，(T_t) がエルゴード的と仮定する．$U_t\cdot E(\{0\})f=E(\{0\})f$ より $E(\{0\})f\neq 0$ ならば，$E(\{0\})f$ は固有値 1 に属し，矛盾だから $E(\{0\})f=0$. 従って $\mu(\{0\})=0$. 逆に $\mu(\{0\})=0$ ならばスペクトル測度 μ は最大であることにより，$(E(\{0\})h, h)=0$ $(\forall h\in L_2(\Omega)\ominus C)$ となり $(U\ )$ は $L_2(\Omega)\ominus C_{\text{II}}$ に固有値 1 の固有ベクトルをもたない．従って固有値 1 は単純である

(2) (1) と同様にして，
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)e^{-it\lambda}\,dt=\mu(\{\lambda\}).$$

$\mu(\{\lambda\})=0$ $(\forall\lambda)$ とスペクトル測度が連続なことが同等であることをいえばよい．$\mu(\{\lambda\})=0$ $(\forall\lambda)$ ならば，任意のスペクトル測度 ν は μ に関して絶対連続だから，$\nu(\{\lambda\})=0$ $(\forall\lambda)$ となり連続である．逆は明らかである．

(3) 定理1による．

(4) $\varphi(t)$ が条件 (C) を満たせば条件 (B) を満たし又 $\varphi(t)$ が条件 (B) を満たせば明らかに条件 (A) を満たす．

4. 保測変換の場合

以上は flow (T_t) についてであるが，T がルベッグ空間 (Ω, B, m) 上の自己同型 (＝可逆な保測変換) のときも定理 1, 2 と同様なことが成立つ．証明は前と同様であるから定理だけ述べる．

〔定理3〕 T をルベッグ空間 (Ω, B, m) 上の自己同型とする．T が混合性をもつ為の必要十分条件は，$L_2(\Omega)\ominus C$ に誘導されるユニタリ作用素 U の最大スペクトル測度 μ が次の条件を満すことである：
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}e^{in\lambda}\,d\mu(\lambda)=0$$

これを証明する為に次の lemma を使う．

lemma 2. X を区間 $[0, 2\pi)$，B を X のボレル集合全体の σ-代数とする．μ が (X, B) 上の有限測度で，条件
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}e^{in\lambda}\,d\mu(\lambda)=0$$
を満すならば，任意の μ-可積分ボレル関数 f に対して，
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}e^{in\lambda}f(\lambda)\,d\mu(\lambda)=0.$$

〔定理4〕 T をルベッグ空間 (Ω, B, m) 上の自己同型とする．μ を $L_2(\Omega)\ominus C$ 上に誘導されたユニタリ作用素 U の最大スペクトル測度とし，$a_n=\int_0^{2\pi}e^{in\lambda}\,d\mu(\lambda)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ とおく，このとき次のことが成立つ．

(1) T がエルゴード的である為の必要十分条件は，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}a_k=0.$$

(2) T が弱混合性をもつ為の必要十分条件は，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}a_k e^{-ik\lambda}=0.\quad(\forall\lambda\in[0, 2\pi]).$$

(3) T が混合性をもつ為の必要十分条件は，
$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

(4) T が混合性をもつならば，弱混合性をもつ．又 T が弱混合性をもつならば，エルゴード的である．

統計数理研究所

文 献

[1] E. Hopf, Ergodentheorie, (1937).

[2] G. Maruyama, The harmonic analysis of stationary stochastic processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 4 (1949), 45-106.

[3] 十時東生, flow とエントロピー, Seminar on Probability, Vol 20, (1964).