エピデミックにおける age distribution (II)

崎　野　滋　樹

(1967年11月受付)

On the Age Distribution in Epidemic (II)

Sigeki SAKINO

Summary

In the previous paper,[1] I published that the mean age (duration time of disease) distribution $\alpha(x,t)$ and the mean number of susceptibles $\bar{R}_t$ were given by

$$\alpha(x,t)=A(t-x)e^{-m(x)}\,,$$

$$\frac{d\bar{R}_t}{dt}=-A(t)$$

where $A(t)$ represented the mean number of new infectives and

$$m(x)=\int^x \mu(u)du\,.$$

But it is very difficult to derive the mean number of new infectives $A(t)$. This $A(t)$ is given by

$$A(t)=\sum_{\{R_t,\, s(x,t)dx\}}\left\{\int_0^\infty \lambda(x)R_t\, s(x,t)dx\right\}$$

where R_t shows the number of susceptibles and $s(x,t)dx$ the number of infectives in age $(x-dx,x)$ at the time t. So as to derive the approximate $\hat{A}(t)$ of $A(t)$, I considered the arbitrary division $t_0=0,\ t_1, t_2, \cdots,\ t_l=t$ of the interval $(0,t)$ where the number of new infectives $Z(t_j)\Delta t_j$ in (t_j, t_{j+1}) takes the integral values 0 or 1 for each j. Then

$$R_t=R_0-\sum_j Z(t_j)\Delta t_j\,.$$

And, also, I set up the assumption as follows. That is, I assumed that the number of infectives $s(x,t)\Delta x$ in age $(x-\Delta x,x)$ satisfied the relation

$$s(x,t)\Delta x=Z(t-x)\Delta x\cdot\exp\left(-\sum_m^x \mu(u_m)\Delta u_m\right)$$

where $\sum\limits_m^x$ represented the summation at the points of division of the interval $(0,x)$. And, therefore, considering the simultaneous distribution of $Z(t_0)\Delta t_0$, $Z(t_1)\Delta t_1,\ \cdots,\ Z(t_{l-1})\Delta t_{l-1}$ instead of the number of susceptibles R_t and age distribution $s(x_1,t)\Delta x_0,\ s(x_2,t)\Delta x_1, \cdots,\ s(x_k,t)\Delta x_{k-1}$, we have, from the principle of epidemic propagation,

$$\hat{A}(t)=\lim_{\xi_1\to 0}\underset{\{Z(t_j)\Delta t_j\}}{\mathrm{E}}\left\{\left(R_0-\sum_j Z(t_j)\Delta t_j\right)\left[\sum_i \lambda(x_i)Z(t-x_i)\Delta x_i\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\exp\left(-\sum_m^x \mu(u_m)\Delta u_m\right)+\lambda(t)\cdot\exp\left(-\sum_j \mu(t_j)\Delta t_j\right)\right]\right\}$$

where

$$\hat{A}(t)\Delta t=E(Z(t)\Delta t)$$

and

$$\xi_1=\mathop{\mathrm{Max}}_j\,(t_{j+1}-t_j)\ .$$

From the above equation, we can derive the integral equation (24) of the approximate solution $\hat{A}(t)$ of $A(t)$. Now, when $\lambda(x)$, $\mu(x)$ are independent of age x, the equation (24) is reduced to (26) and the solution $\hat{A}(t)$ is represented by (37). And, from the boundary condition (25), the numerical solutions of $\hat{A}(t)$, $\hat{\alpha}(x,t)$ and the number of infectives, $\hat{I}(t)$ at time t are shown in Fig. 1, 2 and 3 as $\lambda=0.5$, $\mu=1.0$, $R_0=11$.

The Institute of Statistical Mathematics

§1. まえがき

これまでのエピデミック（伝染病）の拡がりに関しては，単に感受性者数ならびに病人数にのみ関係すると考えられてきた．がしかし，実際には，エピデミックの拡がり方は，むしろ病人の age（発病からの経過時間）に関係すると考えた方が自然である．にも拘わらず，この本質的な事柄はまったく看過されてきたというのが現状である．確かに，エピデミックのような非線型確率モデルの取扱いは極めて困難である．このことに関しては，既に“エピデミックにおける age distribution（I），1962”で述べた．

age の分布は，一般の出生死滅過程の理論からも判るように，出生数が判れば age の分布は決まる．エピデミックの伝播モデルの場合も同じであって，新患者の平均発生数 $A(t)$ が判れば，age の分布は一挙に解決される．がしかし，問題のむずかしさは，新患者の平均発生数そのものを求めることにある．それ故に，エピデミックの伝播の原則（感受性者数ならびに病人数に比例する）が失なわれないように問題を多少 modify して新患者の平均発生数を推定することを試みねばならない．このような考えから，§2 では従来の私の結果をまとめ，§3 では modify した形で新患者の平均発生数 $A(t)$ の近似値 $\hat{A}(t)$ を導く．更に，§4 では age x による新患者の発生比率 $\lambda(x)$，回復比率 $\mu(x)$ が何れも定数なる場合について，$\hat{A}(t)$，age の平均分布 $\hat{\alpha}(x,t)$ ならびに t 時点における新患者数 $\hat{I}(t)$ の数値例を与える．

§2. 感受性者数と病人数の同時分布

まず，記号の説明をしよう．

1．$t=0$ における感受性者数を R_0，age が $(0,\Delta x)$ にある病人数を $S(\Delta x,0)=S(\infty,0)=1$ とし，t 時点での感受性者数を R_t，age $X\leq x$ なる病人数を $S(x,t)$ であらわす．

2．age の領域を k 個の区間 (x_i,x_{i+1}) $(i=0,1,2,\cdots,k-1)$ に分割し，age が $(x-dx,x)$ にある病人数を $d_xS(x,t)$ とするとき，age が (x_i,x_{i+1}) にある病人数は

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} d_xS(x,t)=s(x_{i+1},t)(x_{i+1}-x_i)$$
$$=s(x_{i+1},t)\Delta x_i\quad (i=0,1,\cdots,k-1) \tag{1}$$

であらわされる．

3. $\lambda(x)$ は，age x の1人の病人が単位時間 $(t, t+1)$ で1人の感受性者に感染させる確率をあらわす.

4. $\mu(x)$ は，age x の1人の病人が単位時間 $(t, t+1)$ で回復する確率をあらわす.

ここで，われわれの要求する統計量は，確率変数 $s(x_{i+1}, t)\Delta x_i$ の平均，分散である．そこで，次のようなエピデミックの伝播に関する仮定を設け，t 時点での感受性者数 R_t と病人数 $s(x_{i+1}, t)\Delta x_i$ $(i=0, 1, 2, \cdots, k-1)$ の同時分布を考えよう.

仮定 1. t 時点で，感受性者数 R_t, age の分布 $s(x_{i+1}, t)\Delta x_i$ $(i=0, 1, 2, \cdots, k-1)$ が与えられたとき，続く単位時間 $(t, t+1)$ で1人の新患者が発生する条件附確率を

$$\int_0^\infty \lambda(x) R_t d_x S(x, t) + o(1) = \sum_i \lambda(x_i) R_t s(x_{i+1}, t)\Delta x_i + o(1) \tag{2}$$

とする．従って，単位時間で発生する新患者数は漸近的にポアッソンであり，平均，分散は (2) 式で与えられる.

仮定 2. t 時点で，age の分布 $s(x_{i+1}, t)$ $(i=0, 1, 2, \cdots, k-1)$ が与えられたとき，続く単位時間 $(t, t+1)$ で1人の病人が回復する確率を

$$\int_0^\infty \mu(x) d_x S(x, t) + o(1) = \sum_i \mu(x_i) s(x_{i+1}, t)\Delta x_i + o(1) \tag{3}$$

とする.

第1の仮定から，age の区間 (x_i, x_{i+1}) にある病人数をあらわす確率変数 $s(x_{i+1}, t)\Delta x_i$ が，0或は高々1なる整数値をとるように分割 (x_i, x_{i+1}) $(i=0, 1, 2, \cdots, k-1)$ が可能である．しかも，この分割は t とは無関係に選べる．そこで，上の二つの仮定に基づいて，確率変数 R_t と $s(x_{i+1}, t)\Delta x_i$ $(i=0, 1, 2, \cdots, k-1)$ の generating functional が時刻 t の変化によりどう変るかを調べてみよう．ところで，任意の実数 $\eta>0$, $x\geq 0$ で定義された可積分関数 $\theta(x)$ を用いて，R_t, $s(x_{i+1}, t)\Delta x_i$ の generating functional を定義しよう．それは，

$$\begin{aligned} M(\eta, \theta(x); t) &= \mathop{\mathrm{E}}_t\left\{\exp\left(\eta R_t + \int_0^\infty \theta(x) d_x S(x, t)\right)\right\} \\ &= \mathop{\mathrm{E}}_t\left\{\exp\left(\eta R_t + \sum_i \theta(x_i) s(x_{i+1}, t)\Delta x_i\right)\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

で与えられる．ただし，$\mathop{E}_t$ は確率変数列 R_t, $s(x_1, t)\Delta x_0$, $s(x_2, t)\Delta x_1, \cdots$, $s(x_k, t)\Delta x_{k-1}$ の同時分布による期待値をあらわす．いま，この $M(\eta, \theta(x); t)$ の時間変化のようすを調べるために，t 時点で R_t, $s(x_1, t)\Delta x_0$, $s(x_2, t)\Delta x_1$, $\cdots$, $s(x_k, t)\Delta x_k$ が与えられたとき，続く $t+\Delta t$ における条件附確率変数を $R^*_{t+\Delta t}$, $s^*(x_1, t+\Delta t)\Delta x_0, \cdots$, $s^*(x_k, t)\Delta x_k$ とするとき，仮定 1, 2 から，$R^*_{t+\Delta t}=R_t-1$ すなわち，$S(t, t+\Delta t)=1$ なる確率は，

$$\begin{aligned} &P_r\{S(t, t+\Delta t)=1\} \\ &\quad = \left(\sum_i \lambda(x_i) R_t s(x_{i+1}, t)\Delta x_i\right)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \tag{5}$$

また，

$$\begin{aligned} &P_r\{s(x_{i+1}+\Delta t, t+\Delta t)\Delta t = 0 / s(x_{i+1}, t)\Delta x_i = 1\} \\ &\quad = \mu(x_i)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \tag{6}$$

であるから，確率変数列 $R_{t+\Delta t}$, $s(x_{i+1}, t+\Delta t)$ $(i=0, 1, \cdots, k-1)$ の generating functional $M(\eta, \theta(x); t+\Delta t)$ は次の関係式を満す.

すなわち.

$$M(\eta,\theta(x);t+\Delta t)$$
$$=\underset{t}{\mathrm{E}}\Bigg[\prod_t\Bigg\{(1-\mu(x_i)s(x_{i+1},t)\Delta x_i\Delta t)\exp(s(x_{i+1},t)\theta(x_i+\Delta t))$$
$$+\mu(x_i)s(x_{i+1},t)\Delta t\Bigg\}\Bigg\{\sum_i\lambda(x_i)R_ts(x_{i+1},t)\Delta x_i\Delta t\cdot$$
$$\exp(\theta(0)+\eta(R_t-1))+\Bigg(1-\sum_i\lambda(x_i)R_ts(x_{i+1},t)\Delta x_i\Delta t\Bigg)\exp(\eta R_t)\Bigg\}\Bigg]$$
$$+o(\Delta t)\,. \tag{7}$$

そこで，$s(x_{i+1},t)\Delta x_i$ の平均，分散を $\alpha(x_{i+1},t)\Delta x_i$, $\beta(x_{i+1},t)\Delta x_i$, R_t の平均を $\bar{R}_t$ とおいて，$\Delta t\to 0$, $\xi_1=\underset{i}{\mathrm{Max}}\,(x_{i+1}-x_i)\to 0$ にするとき，(7) 式から $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$, $\bar{R}_t$ に関して

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial t}=-\mu\alpha\,,\\&\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial t}=\mu\alpha-2\mu\beta\,,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\frac{d\bar{R}_t}{dt}=-\underset{t}{\mathrm{E}}\left\{\int_0^\infty\lambda(x)R_ts(x,t)\,dx\right\} \tag{9}$$

なる微分方程式が導かれる．

(8) 式の一般解は

$$\alpha(x,t)=A(t-x)e^{-m(x)}\,, \tag{10}$$

$$\beta(x,t)=B(t-x)e^{-m(x)}+B(t-x)e^{-2m(x)}\,, \tag{11}$$

ただし，

$$m(x)=\int^x\mu(u)\,du \tag{12}$$

で与えられる．したがって，$A(t)$ が判れば，境界条件

$$\alpha(0,t)=\beta(0,t) \tag{13}$$

から $\alpha(x,t)$, $\beta(x,t)$ が決まる．これらの結果は，1962 年に発表した重な結果である．ところで，(10) 式における $A(t)$ は $(t,t+1)$ で発生した平均新患者数をあらわしているのであって，これを求めることがエピデミックの age の分布を解決する鍵になるのであって，問題は依然として容易なことではない．

そこで，

$$A(t)=\lim_{\xi_1\to 0}\underset{t}{\mathrm{E}}\,\{\sum_i\lambda(x_i)R_ts(x_{i+1},t)\Delta x_i\} \tag{14}$$

を直接求めないで，モデルを modify して $A(t)$ の近似値 $\hat{A}(t)$ を求める問題を考えよう．§1 で述べたように，エピデミックの伝播の原則は動かせない事実であって，これを変えないようにある仮定を設ける．

§3. age の平均分布 $\alpha(x,t)$ の推定

前節で述べたように，modify した形で新患者の平均発生数 $A(t)$ の近似値 $\hat{A}(t)$ を求める．そのために，観測された区間 $(0,t)$ を l 個の部分区間 (t_j,t_{j+1}) $(j=0,1,\cdots,l-1)$ に分割し，各区間の長さを $\Delta t_j=(t_{j+1}-t_j)$ であらわす．ただし，$t_0=0$, $t_l=t$ である．そして，分割された各部分区間 (t_j,t_{j+1}) における新患者の発生数を $Z(t_j)\Delta t_j=s(t_j,t_{j+1})\Delta t_j$ $(j=0,1,\cdots,l-1)$ であらわす．仮定 1 からすべての部分区間 (t_j,t_{j+1}) で確率変数 $Z(t_j)\Delta t_j$ が 0 あるいは高々 1 なる整数値をとるように小さな分割 $t_0=0$, $t_1,t_2,\cdots$, $t_{l-1},t_l=t$ を与えることができ

る．したがって，t 時点における感受性者数 R_t は

$$R_t = R_0 - \sum_{j=0}^{l-1} Z(t_j)\Delta t_j \tag{15}$$

であらわされる．このことから，感受性者数をあらわす確率変数 R_t は，時刻 t までに発生した新患者数の関数としてあらわされる．

つづいて，age の分布 $s(x,t)\Delta x$ に関する仮定を設ける．

仮定 3. 時刻 t で age が区間 $(x-\Delta x, x)$ にある病人数 $s(x,t)\Delta x$ が

$$s(x,t)\Delta x = Z(t-x)\Delta x \cdot \exp\left\{-\sum_j^x \mu(u_j)\Delta u_j\right\} \tag{16}$$

であらわされると仮定する．ただし，$\sum_j^x$ は $(0,x)$ の分割点における和を示す．これは，仮定2から可能である．

第3の仮定が §2 の仮定に modification を行ったものであり，この仮定がエピデミックにおける age の分布を決める役割をなす．そして (15), (16) 式からわかるように，R_t, $s(x,t)\Delta x$ はいずれも $Z(t_0)\Delta t_0, \cdots, Z(t_{l-1})\Delta t_{l-1}$ の関数になっている．したがって，前節までに考えた R_t, $s(x_{i+1},t)\Delta x_i$ $(i=0,\cdots,k-1)$ の同時分布を，$Z(t_j)\Delta t_j$ $(j=0,1,\cdots,l-1)$ の同時分布でおきかえて考え，$Z(t_j)\Delta t_j$ の平均を考えよう．

仮定 1, 3 から，$(t, t+\Delta t)$ において1人の新患者が発生する確率は

$$\begin{aligned} &P_r\{Z(t)\Delta t = 1/Z(t_0)\Delta t_0, Z(t_1)\Delta t_1, \cdots, Z(t_{l-1})\Delta t_{l-1}\} \\ &= \left(R_0 - \sum_{j=0}^{l-1} Z(t_j)\Delta t_j\right)\left\{\sum_{i=1}^{l} \lambda(x_i) Z(t-x_i)\Delta x_i \right. \\ &\left. \cdot \exp\left(-\sum_m^i \mu(u_m)\Delta u_m\right) + \lambda(t)\cdot\exp\left(-\sum_{j=0}^{l-1}\mu(t_j)\Delta t_j\right)\right\}\Delta t \\ &+ o(\Delta t) \end{aligned} \tag{17}$$

であらわされる．(17) 式における $\sum_i$ は分割点 $x_1=t_1$, $x_2=t_2$, $\cdots$, $x_l=t_l$ における和をあらわし，また $\sum_m^i$ は区間 $(0, x_i)$ の分割点における和をあらわす．また，

$$\underset{\{Z(t_j)\Delta t_j\}}{\mathrm{E}}(Z(t_j)\Delta t_j) = \hat{A}(t_j)\Delta t_j \tag{18}$$

とおく．ただし，$\underset{\{Z(t_j)\Delta t_j\}}{\mathrm{E}}$ は $Z(t_0)\Delta t_0$, $Z(t_1)\Delta t_1$; $\cdots$, $Z(t_{l-1})\Delta t_{l-1}$, $Z(t)\Delta t$ の同時分布に関する期待値をあらわす．そこで，(17) 式において $\xi_2 = \underset{j}{\mathrm{Max}}\,(t_j - t_{j-1}) \to 0$ とするとき，仮定1から $\hat{A}(t)$ に関して

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) = \lim_{\substack{\xi_2\to 0\\ \Delta t\to 0}} \underset{\{Z(t_j)\Delta t_j\}}{\mathrm{E}} &\left\{(R_0 - \sum_j Z(t_j)\Delta t_j)\left[\sum_i \lambda(x_i) Z(t-x_i)\Delta x_i \right.\right. \\ &\left.\left. \cdot \exp\left(-\sum_m^{x_i} \mu(u_m)\Delta u_m\right) + \lambda(t)\cdot\exp\left(-\sum_{j=0}^{l-1}\mu(t_j)\Delta t_j\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{19}$$

なる関係が得られる．

故に，(19) 式から

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= R_0\int^t \lambda(x)\hat{A}(t-x)e^{-m(x)}dx - \lambda(t)e^{-m(t)}\int^t \hat{A}(\tau)d\tau \\ &+ R_0\lambda(t)e^{-m(t)} - \lim_{\xi\to 0}\sum_{i,j}\lambda(x_i) \underset{\{Z(t_j)\Delta t_j\}}{\mathrm{E}} \\ &\left\{Z(t-x_i)\Delta x_i Z(t-y_j)\Delta y_j \cdot \exp\left(-\sum_m^{x_i}\mu(u_m)\Delta u_m\right)\right\}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$m(x)=\int^{x}\mu(u)du \tag{21}$$

が導かれる．従って，(20) 式の最後の項が計算されれば，$A(t)$ の推定値 $\hat{A}(t)$ が求められる．いま，$y_j>x_i$ とすると，

$$\begin{aligned}&\underset{\{Z(t_j)\Delta t_j\}}{\mathrm{E}}\{Z(t-x_i)\Delta x_i Z(t-y_j)\Delta y_j\}\\&=P_r\{Z(t-y_j)\Delta y_j=1\}P_r\{Z(t-x_i)\Delta x_i=1/Z(t-y_j)\Delta y_j=1\}\\&=\lambda(y_j-x_i)\Delta x_i\hat{A}(t-y_j)\Delta y_j\exp\left(-\sum_{m}^{y-x}\mu(u_m)\Delta u_m\right).\end{aligned} \tag{22}$$

ただし，$\sum\limits_{m}^{y-x}$ は区間 $(0, y_j-x_i)$ の分割点に対する和をあらわす．同じようにして，$x_i>y_j$ なる場合を計算される．また，$x_i=y_j$ なる分割点に対しては

$$\underset{\{Z(t_j)\Delta t_j\}}{\mathrm{E}}\{(Z(t_i)\Delta t_i)^2\}=\underset{\{Z(t_j)\Delta t_j\}}{\mathrm{E}}\{Z(t_i)\Delta t_i\}=\hat{A}(t_i)\Delta t_i \tag{23}$$

が成立する．このような分割の存在は仮定1から明らかである．従って，(20)，(22)，(23) から $\hat{A}(t)$ に関して次のような積分方程式が導かれる．

すなわち，

$$\begin{aligned}\hat{A}(t)=&(R_0-1)\int^{t}\lambda(x)\hat{A}(t-x)e^{-m(x)}dx-\lambda(t)e^{-m(t)}\int^{t}\hat{A}(\tau)d\tau\\&+R_0\lambda(t)e^{-m(t)}-\int^{t}\hat{A}(t-y)\,dy\int_0^{y}\lambda(y-x)e^{-m(y-x)}\{\lambda(x)e^{-m(x)}+\lambda(y)e^{-m(y)}\}dx.\end{aligned} \tag{24}$$

そこで，(24) 式を境界条件

$$\left.\begin{aligned}&\hat{A}(0)=\lambda(0)R_0,\\&\lim_{t\to\infty}\hat{A}(t)=0\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

を満すような解 $\hat{A}(t)$ を求めれば，それが $A(t)$ の近似解になる．しかも age の平均分布の近似解 $\hat{\alpha}(x,t)$ が求まることになり，エピデミック過程は近似的に解決されたことになる．ところで，このエピデミック・モデルの現象への応用において大切な点は，新患者の発生比率 $\lambda(x)$，回復比率 $\mu(x)$ が age にどのように関係しているかである．これを解決するには，いろいろな伝染病について，age との関係における特性を実験的に調べていかねばならない．

§4. $\lambda(x)=\lambda$, $\mu(x)=\mu$ なるときの数値解

前節までは，新患者の発生比率 $\lambda(x)$，回復比率 $\mu(x)$ が何れも age x に関係するとして，エピデミックの一般の伝播モデルについて述べた．ここでは，$\lambda(x)$，$\mu(x)$ が定数であるとして (24) 式の解を導き，$\hat{A}(t)$，$\hat{\alpha}(x,t)$ の数値例を導こう．

(24) 式から

$$\begin{aligned}\hat{A}(t)=&\lambda(R_0-1)\int_0^{t}\hat{A}(t-x)e^{-\mu x}dx-\lambda e^{-\mu t}\int_0^{t}\hat{A}(\tau)d\tau.\\&R_0\lambda e^{-\mu t}-\lambda^2\int_0^{t}\hat{A}(t-y)\,dy\int_0^{y}e^{-\mu(y-x)}(e^{-\mu x}+e^{-\mu y})dx.\end{aligned} \tag{26}$$

(26) 式における $\hat{A}(t)$ を

$$\hat{A}_1(t)=\hat{A}(t)e^{\mu t} \tag{27}$$

とおくとき，(26) 式は次のように書きかえられる．

すなわち，

$$\frac{d^3\hat{A}_1}{dt^3}+\{\mu-(R_0-1)\lambda+\lambda e^{-\mu t}\}\frac{d^2\hat{A}_1}{dt^2}$$
$$+\{2\lambda^2-(R_0-1)\lambda\mu-\lambda\mu e^{-\mu t}\}\frac{d\hat{A}_1}{dt}+\lambda^2\mu\hat{A}_1=0\,. \tag{28}$$

(28) 式は，変換

$$t=-\frac{1}{\mu}\log\tau \tag{29}$$

を施すとき，

$$\mu^3\tau^3\frac{d^3\hat{A}_1}{d\tau}+(\alpha-\lambda\mu^2\tau)\tau^2\frac{d^2\hat{A}_1}{d\tau}+2\lambda\mu(\lambda-\mu)\tau\frac{d\hat{A}_1}{d\tau}-\lambda^2\mu\hat{A}_1=0\,, \tag{30}$$

ただし，$\alpha=2\mu^3+(R_0-1)\lambda\mu^2$.

これを，境界条件

$$\lim_{\tau\to1}\hat{A}_1(\tau)=\lambda R_0 \tag{31}$$

によって解こう．$\hat{A}_1$ が次のような級数展開

$$\hat{A}_1=\tau^{\gamma}\sum_{i=0}a_i\tau^i \tag{32}$$

による解を求めよう．(30)，(32) 式から

$$\sum_{i=0}\{\mu^3(\gamma+i)(\gamma+i-1)(\gamma+i-2)+\alpha(\gamma+i)(\gamma+i-1)$$
$$+2\lambda^2\mu(\gamma+i)-\lambda^2\mu\}a_i\tau^{\gamma+i}$$
$$=\lambda\mu^2\sum_{i=1}(\gamma+i)(\gamma+i-1)a_{i-1}\tau^{\gamma+i} \tag{33}$$

なる関係式が導かれる．ところで，(33) 式は (0,1) 区間内のあらゆる τ について成立するから，係数の間に，

$$\mu^3\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)+\alpha\gamma(\gamma-1)+2\lambda^2\mu\gamma-\lambda^2\mu=0\,,\quad a_0\neq0 \tag{34}$$

かつ，$i\geqq1$ に対して

$$a_i=\frac{\lambda^2\mu(\gamma+i)(\gamma+i-1)a_{i-1}}{\mu^3(\gamma+i)(\gamma+i-1)(\gamma+i-2)+\alpha(\gamma+i)(\gamma+i-1)+2\lambda^2\mu(\gamma+i)-\lambda^2\mu} \tag{35}$$

なる関係がある．

(34) 式の根を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ とするとき，(31)，(32)，(35) 式からすべての係数 $a_i(\gamma_1)$，$a_i(\gamma_2)$，$a_i(\gamma_3)$ が決まる．したがって (30) 式の解は

$$\hat{A}_1(\tau)=C_1\tau^{\gamma_1}\sum_i a_i(\gamma_1)\tau^i+C_2\tau^{\gamma_2}\sum_i a_i(\gamma_2)\tau^i+C_3\tau^{\gamma_3}\sum a_i(\gamma_3)\tau^i \tag{36}$$

ただし，C_1, C_2, C_3 は任意定数をあらわす．したがって，境界条件 (25) を満すように C_1, C_2, C_3 を選ぶとき，$\hat{A}(t)$ は

$$\hat{A}(t)=C_1e^{-\gamma_1\mu t}\sum_i a_i(\gamma_1)e^{-(i+1)\mu t}+C_2e^{-\gamma_2\mu t}\sum_i a_i(\gamma_2)e^{-(i+1)\mu t}$$
$$+C_3e^{-\gamma_3\mu t}\sum_i a_i(\gamma_3)e^{-(i+1)\mu t}\,. \tag{37}$$

試みに，$\lambda=0.5$, $\mu=1.0$, かつ，$R_0=11$, age 0 の病人1人から出発してエピデミックが拡がったとしよう．(34) 式の根 $\gamma_1=-0.5$, $\gamma_2=0.96$, $\gamma_3=-4.91$, $C_1=-C_2=1$, $C_3=0$ として $\hat{A}(t)$，$\hat{\alpha}(x,t)=\hat{A}(t-x)e^{-\mu x}$，ならびに時刻 t に於ける病人数 $\hat{I}(t)$

$$\hat{I}(t)=\int_0^t\alpha(x,t)dx+e^{-\mu t} \tag{38}$$

を図示した結果は，Fig. 1, 2, 3 に示されたごとくである．

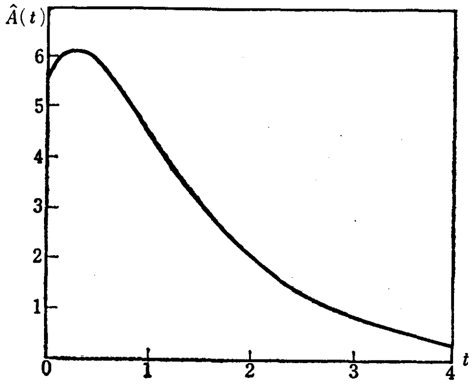

Fig. 1. $\hat{A}(t)$; the approximate value of the number of new infectives.

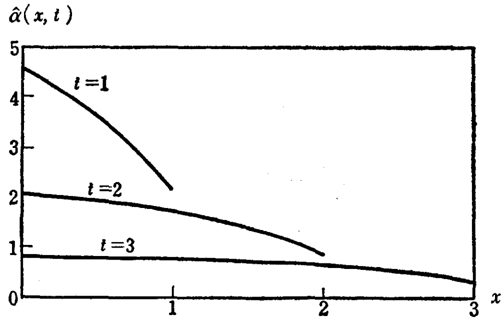

Fig. 2. $\hat{\alpha}(x,t)$; approximate age distribution of infectives.

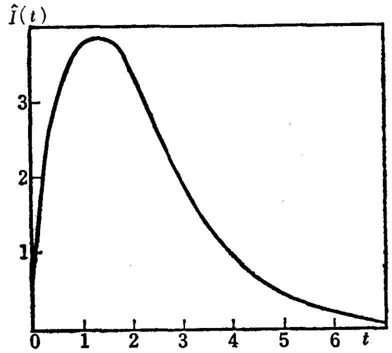

Fig. 3. $\hat{I}(t)$; the approximate number of infectives at time t.

§5. 総　括

§1 で述べたように，エピデミックの age の平均分布を求めるためには，新患者の平均発生数 $A(t)$ を求めればよい．すなわち，(14) 式が求まればよいが，問題はそう簡単ではない．そこで，t 時点における R_t, $s(x_1,t)dx_0$, $s(x_2,t)dx_1, \cdots$, $s(x_k,t)dx_{k-1}$ の同時分布を考える代りに，t 時点までの新患者 $Z(t_0)dt_0$, $Z(t_1)dt_1, \cdots$, $Z(t_{l-1})dt_{l-1}$ の同時分布を考えて $A(t)$ の近似 $\hat{A}(t)$ を求めた．そして，新患者の発生比率 $\lambda(x)$，回復比率 $\mu(x)$ がいずれも定数なる場合の数値例を与えた．

この研究は科学研究費（特定研究）による研究の一部である．

統計数理研究所

文　献

[1] S. Sakino (1962): On the Age Distribution in Epidemic (I) (in Japanese). Proc. Inst. Statist. Math. Vol. 10, No. 1, p. 33～39.

[2] D. G. Kendall (1949): Stochastic Processes and Population. Growth J. R. S. S. Vol. XI, p. 230～260.