綜　合　報　告

ノン・パラメトリックな(連続分布の)適合度検定に用いられる統計量の或るクラスについて

鈴　木　義一郎

(1966年12月受付)

On Some Class of the Statistics Used in the Non-Parametric Tests of Fit (for continuous distribution functions)

Giitiro Suzuki

In this paper, we make a brief review of the various results with respect to the generalized D-statistics used in the non-parametric tests of fit, which was initially proposed by Kolmogorov ([59]). The content of the paper is the following:

§0. Introduction

I. Characterization of D-statistics.

§1. Empirical distribution function

§2. (d)-structured statistics.

II. Probability distributions of D-statistics

§3. Generalized D-statistics

a. General acceptance region A (F)

b. Computational method for the size of A(F)

§4. Various D-statistics

a. One-sided case

b. Two-sided case

III. D-statistics in testing statistical hypothesis

§5. Construction of the general confidence region

§6. Power of goodness-of-fit D-tests

§7. Various compititors.

§8. Conclusion.

The Institute of Statistical Mathematics

§0. 始　め　に

1933年 Kolmogorov [59] の導入した D-統計量

$$D_n = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)| \tag{0.1}$$

に関する主題が，少なくとも最近の5年間を除けば，かなりの数の統計学者と幾人かの確率論研究者とによって，研究，発展せしめられて来た．例えば Savage [85] 等を見て戴ければ判るように，ノン・パラメトリックな推論に関する文献の大半を占めるものが，経験分布函数に基いた統計量を扱ったものであり，その中の大部分がこの D-統計量に関するものである．

かくも多くの研究者を虜にしたこの主題について，この数年余り，成果が見られなくなったのは何故か．既に大部分の問題が解決済みなのだろうか．この問に対する答えが肯定的であれ否定的であれ，この辺で D-統計量に関する主要な結果を綜括して置くことは，有意義なことと思われる．我が国では，この主題で研究を進められている研究者は皆無に等しいが，この問題に関する限り，それ程の統計的知識を要さずに直ぐ取組めるし，今後実際面に於る適用可能性をも十分秘めていると思われるので，和文にて記述して置くのも何かと好都合であろう．

この小報告では，「適合度検定用の D-統計量」にのみ限定して，多少主観的な綜括を試みる．1957 年以前の主として検定問題に関するものは Darling の綜合報告 [27] があるし，文献のみに関しては [84], [72], [44] 等も参照し得るので，引用文献数は，繁雑さを避ける為に最小限に止めた．

D-統計量とほゞ平行して議論され，最近の Biometrika 等の雑誌にも割合載っているものに，von Mises の ω^2-統計量があるが，この主題に関しては，この雑誌の橋本の報告 [45] があるので，それを参照されたい．又，Doob [32], Donsker [31] 等数学者の興味を換起した D-統計量の極限定理と Wiener-Lévy 過程との結びつき等，確率過程論的観点からも考察できるが，同じ雑誌の加地の報告 [53] に全て委ねる．統計学の立場からは，多標本問題に於る D-統計量というものも考察されねばならないが，これに関しては，いずれ機会を見て報告する予定である．

I. D-統計量の特徴づけ

§1. 経験分布函数

$F(x)$ を実軸 $R=(-\infty, \infty)$ 上の連続な分布函数とする．F に従う独立な確率変数の系列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を用いて

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\{\text{no. of } i\,;\ X_i<x\} \tag{1.1}$$

なる経験分布函数 (empirical distribution function) が定義される．これは，x を固定して考えるとき，事象 $[X<x]$ の出現比率 $F(x)=Pr\{X<x\}$ に対する十分統計量であって，勿論最小分散不偏推定量である．

Aggarwal [1] は，これを全体的に眺めて，ある種の変換群の下で不変 (invariant) で，且

$$L(F, \hat{F})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[F(x)-\hat{F}(x)]^2}{F(x)[1-F(x)]}\,dF(x) \tag{1.2}$$

という損失函数を最小にする推定量として，経験分布 F_n を特徴づけた．(1.2) の代りに

$$\tilde{L}(F, \hat{F})=\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)-\hat{F}(x)]^2\,dF(x) \tag{1.3}$$

を用いて同様の議論を行った場合には，(1.1) そのものは得られないが，分布函数のクラスの中から (1.3) を最小にするという観点が立てば，やはり経験分布 F_n が定まる．

Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz [33] は (1.2), (1.3) のタイプより少し一般の損失函数の下で，而もより広義のランダマイズされた決定法則 (decision rule) のクラスの中で考えても，確率 1 で経験分布 F_n を用いる法則が，漸近的にミニ・マックスになることを示した．彼らは又 [57] に於て，多次元分布の場合へも拡張を試みた．

後に述べる Kolmogorov の極限定理 [59] (多次元への拡張は Kiefer-Wolfowitz [56]) は，経験分布の理論分布への確率収束の速度が指数位であることを表現しているものであるが，Sethuraman [87] はそれを次のような形で表わしている．任意の連続な多次元分布及び任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Pr\left\{\sup_{X_n}|F_n(X_n)-F(X_n)|\geqq\varepsilon\right\}=\log\rho^*(F,\varepsilon).$$

但し,

$$\rho^*(F,\ \varepsilon)=\sup_{X_n}\left\{\max\left[\rho\left(F(X_n),\ \varepsilon\right),\ \rho\left(1-F(X_n),\ \varepsilon\right)\right]\right\},$$

$$\rho(p,\ \varepsilon)=\begin{cases}\left[\dfrac{p}{p+\varepsilon}\right]^{p+\varepsilon}\left[\dfrac{1-p}{1-p-\varepsilon}\right]^{1-p-\varepsilon}, & 0\leqq p\leqq 1-\varepsilon,\\ 0, & 1-\varepsilon<p\leqq 1.\end{cases}$$

Sanov [83] は R 上の分布 F のある F-distinguishable class Ω (詳細は [83] の定義3) に対して,

$$P_r\left\{F_n\in\Omega\right\}=\exp\left[n\left\{\sup_{\Phi\varepsilon\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}\log\frac{dF}{d\Phi}\,d\Phi+o(1)\right\}\right]$$

なる関係の成立することを示し,その系として,

$$(1.4)\qquad -\lim_{\varepsilon\to 0+}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_r\left\{\sup_x|F_n(x)-F(x)|<\varepsilon\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\log\frac{d\Phi}{dF}\,d\Phi$$

なる関係を導いた. F が単位区間 I=[0, 1] 上の一様分布のとき, (1.4) の右辺がいわゆる分布 Φ のエントロピーを与えている点興味深い.

他方,“経験分布が理論分布へ一様に概収束する”という事実は,一般に Glivenko-Cantelli の定理として知られているが, Fortet-Mourier [37] は,函数空間上の独立確率変数列の強大数の法則といった観点から,多次元の場合の結果を導出している.他にも,経験分布 $F_n(t)$ を非減少な確率過程として眺めたときの Burke [13] の拡張, sup. をとる範囲を拡張しようと試みた筆者の結果 [98] 等種々あるので,例えば [98] の引用文献を参照されたい.

§2. (d)-構造の統計量

前節では, D-統計量 (0.1) の基になる経験分布函数 (1.1) に対する特徴づけを試みた.今度は, D-統計量そのものを,分布形に依存しない (distribution-free な;略して d. f. な) 確率変数という観点から考察してみよう.

Ω, Ω' を分布函数のある2つのクラスとする.分布 $F\in\Omega'$ を持つ独立変数列から構成される確率ベクトル $X_n=(X_1,\cdots,X_n)$ の標本空間を $\mathfrak{X}(F^{(n)})$ とする.各 $G\in\Omega$ に依存する確率変数 $S_G=S_G(X_n)$ が $(\Omega;\ \Omega')$ に於る統計量 (statistics) であるとは,

(i) $S_G=S_G(\cdot)$ が $\mathfrak{X}(F^{(n)})$ の殆んど至るところで定義され,

(ii) $S_G(X_n)$ がある確率分布 $\mathcal{P}_{F^{(n)}}S_G^{-1}$ を有するときである.特に確率分布 $\mathcal{P}_{G^{(n)}}S_G^{-1}$ が各 $G\in\Omega=\Omega'$ に無関係であるとき, $S_G(X_n)$ を $(\Omega;\ \Omega)$ に於る d. f. な統計量と言う.更に Ω が,狭義単調な連続分布のクラス C* の部分集合で,各 $G\in\Omega$,各 $F\in\Omega'$ に対して $\mathcal{P}_{F^{(n)}}S_G^{-1}$ が $\tau=FG^{-1}$ にのみ依存するとき, $S_G(X_n)$ を $(\Omega;\ \Omega')$ に於る狭義 d. f. な統計量と言う.

次に $(\Omega;\ \Omega')$ に於る統計量 $S_G(X_n)$ が, n 次元単位球上の対称な (可測) 函数 Φ を用いて

$$S_G(x_n)=\Phi\left(G(x_1),\cdots,G(x_n)\right)$$

と表わされるとき, (d)-構造を持つと定義する. (d)-構造の統計量と (狭義) d. f. な統計量との間に次のような関係の成立することが知られている ([4], [7], [9]).

(A) C を連続な分布函数のクラスとする. (C; C) に於る統計量が (d)-構造を持てば, d. f. であるが,逆は言えない.

(B) (C*; C*) に於る統計量が狭義 d. f. ならば, d. f. である.

(C) (C*; C*) に於る統計量が (d)-構造を持てば,狭義 d. f. である.又 (C*; C*) に於る統計量が対称で狭義 d. f. なら (d)-構造をもつ.

更に Bell [3] は (C) に関する一般的考察を試みて,次の3条件を満足するような $(\Omega;\ \Omega')$ に於る統計量に関しては,対称で狭義 d. f. であることと (d)-構造を持つことが同値であることを示した:

(i) $\Omega\subset$C*.

(ii) Ω' は Ω の下で閉じている(即ち任意の $F\in\Omega'$, G, $H\in\Omega$ に対して, $FG^{-1}H\in\Omega'$).

(iii) Ω' は symmetrically complete.

更に Bell は, この3条件を満す $(\Omega;\,\Omega')$ として例えば次のようなものを掲げている:

- $\Omega\subset C^*$, $\Omega'=$凡ゆる分布の全体
- $\Omega\subset C^*$, $\Omega'=C$
- $\Omega\subset C^*$, $\Omega'=C^*$

例えば, (0.1) の D_n は (C; C) に於る統計量で,

$$D_n=\sup|F_n(x)-F(x)|$$
$$=\max_{1\leq i\leq n}\left[F(X_i^*)-\frac{i-1}{n},\quad \frac{i}{n}-F(X_i^*)\right]$$

と書けるから (d)-構造を有し, 従って狭義 d.f. であることが判る. 他に ω^2-統計量 [91], Anderson-Darling [2] の重みつきの K_n, W_n^2 等についても, 同様のことが言える. 更に Kimball [58], Sherman [88] 等の Spacing statistics についてもそうである. 尚, 以前に Robbins [80] も又連続函数 f を用いた確率変数 $f(X_1,\cdots,X_n)$ が d.f. な tolerance limit となる為の必要十分条件を示している.

David [29] は, 最近 (d)-構造の統計量と順序統計量との間の漸近独立性について証明した この事実を用いると, サンプル数 n が十分大であるならば, "母集団分布がある特定の形をして, 如何なる 'outlier' をも含まない" といった仮説を検定する際の採択域が, D-統計量から定まる領域と順序統計量によって与えられるものとの共通部分として定まり, その信頼係数を各々の積で与えても良いことになる. 尚サンプル数 n が小さいときには, この議論は用いられないが, 我々が後に §5 で述べる一般の信頼域がこの種の検定にも用いられる.

II. D-統計量の確率分布

§3. 一般化された D-統計量

a. 経験分布の標本空間上の一般的な採択域 $A(F)$.

まず自然数 n に関係せしめた. 単位区間 $I=[0,1]$ 上の非減少な函数の対 (β_n,γ_n) を, 次の4条件を満足するように定義する. (第1図参照)

(i) 各 $t\in I$ に対して

$$0\leq\gamma_n(t)\leq t\leq\beta_n(t)\leq 1.$$

(ii) β_n は右連続. 従って

$$\mu_j=\mu_j[\beta_n]=\begin{cases}0, & j=1,\cdots,n_0,\\ \min\left\{t\in I;\ \beta_n(t)\geq\dfrac{j}{n}\right\}, & j=n_0+1,\cdots,n,\end{cases}\tag{3.1}$$

なる実数値が定義できる. 但し $n_0=[n\beta_n(o)]$ で [ ] はガウス記号である.

(iii) γ_n は左連続. 従って

$$\nu_j=\nu_j[\gamma_n]=\begin{cases}\max\left\{t\in I;\ \gamma_n(t)\leq\dfrac{j-1}{n}\right\}, & j=1,\cdots,n_1,\\ 1, & j=n_1+1,\cdots,n,\end{cases}\tag{3.2}$$

なる実数が定義される. ここで $n_1=\min\{[n\gamma_n(1)]+1,n\}$.

(iv) (3.1), (3.2) によって実数の組 (μ_j,ν_j) が, 各 $j=1,2,\cdots,n$ について不等式

$$\mu_j<\nu_j\tag{3.3}$$

を満足する. (以下に於ては (β_n,γ_n) は固定して考えるので, 特にまぎらわしくない限り, "$\mu_j[\beta_n]<\nu_j[\gamma_n]$" を (3.3) のように表わすことにする.)

F を任意の $R=(-\infty,\infty)$ 上の連続な分布函数とする. 対応する大きさ n の標本からの経験分布函数 F_n は, 増加点が高々 n ケの階段状の分布函数の集合 S_n を標本空間にもつ確率

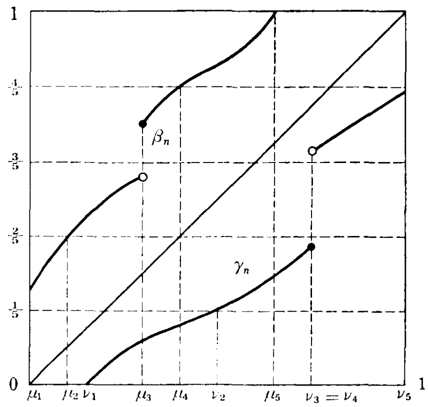
変数と見做すことができる．任意に固定された，(i)～(iv) の条件を満足する (β_n, γ_n) を用いて，S_n 上に次のような採択域 (acceptance region) を定義する．

(3.4) $A(F)=A(F;\ \beta_n,\ \gamma_n)$
$$=\{F_n\in S_n;\ \gamma_n[F(x)]\leqq F_n(x)\leqq\beta_n[F(x)],\ \forall x\in R\}.$$

一方，$U_1^*, U_2^*, \cdots, U_n^*$ を I 上の一様分布 U からの順序統計量として，

(3.5) $\alpha=\alpha(\beta_n,\ \gamma_n)$
$$=Pr\{\mu_j\leqq U_j^*\leqq\nu_j,\ j=1,2,\cdots,n\}$$

と置く．容易に判るように，(3.4) で定義される採択域 $A(F)$ の大きさが，一様分布 U に対応する経験分布函数 $U_n(t)$ が β_n, γ_n によって囲まれる領域内にある確率 (3.5) で与えられる．(直接的証明は [99] の定理 1. 又 Birnbaum [7] 等の定理により (3.4) が (d)-構造の統計量である事実を用いれば直ちに証明できよう．)



第1図 $(n=5)$

これまで論ぜられた．種々の D-統計量に基いて作られる S_n 上での採択域が，すべて (3.4) のタイプに還元され得ることは，明らかであろう (§4 参照)．

b. 採択域 $A(F)$ の大きさ $\alpha(\beta_n,\ \gamma_n)$ の計算法

ある種の制約条件を満す境界の組 $(\beta_n,\ \gamma_n)$ を用いて構成される S_n 上での採択域 $A(F)=A(F;\ \beta_n,\ \gamma_n)$ の大きさが，F の分布形に関係なく，

$$Pr\{F_n\in A(F)\}=\alpha(\beta_n,\ \gamma_n)\equiv Pr\{\mu_j\leqq U_j^*\leqq\nu_j,\ j=1,\cdots,n\}$$

と一様分布の順序統計量によって計算されることが判った．そこで，$\alpha(\beta_n,\ \gamma_n)$ の計算法を [99] に従って見て行こう．(個々の特別な場合での従来の計算式は，§4 に於てその概観が与えられるであろう．)

まず $\gamma_n=\mathbf{0}$ (恒等的に 0 である函数) である場合には，次のようにして求められる．

与えられた β_n から (3.1) に従って求めた $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ を順次用いて，

$$Q_0=1$$
$$Q_k=Q_k(\mu_1,\cdots,\mu_k)=-\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\mu_k^{\,k-i}Q_i,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

なる多項式群を定義する．そこで

$$f_n(\mu_1,\cdots,\mu_n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Q_k(\mu_1,\cdots,\mu_k)$$

と置けば，

$$\alpha(\beta_n,\ \mathbf{0})=f_n(\mu_1,\cdots,\mu_n),$$

によって与えられる．

一般の場合にも，やゝ複雑にはなるが同種の計算のくり返しによって求められる．

まず，(3.1)，(3.2) によって定まる μ_j, ν_j, $j=1,\cdots,n$ から，次のような実数の組を作る $j=1,\cdots,n_1$ (n_1 は条件 (iii) で定義される自然数) について

$$\mu_k^{(j)}=\begin{cases}\mu_k, & k=1,\cdots,j,\\ \max(\nu_j,\ \mu_k), & k=j+1,\cdots,n.\end{cases}$$

更に　$1\leqq i\leqq j\leqq n_1$　について

$$\mu_k^{(j,i)}=\begin{cases}\max\left\{0,\ \dfrac{\mu_{k+i-1}-\nu_i}{1-\nu_i}\right\}, & 1\leqq k\leqq j-i,\\[2mm] \max\left\{\dfrac{\nu_j-\nu_i}{1-\nu_i},\ \dfrac{\mu_{k+i-1}-\nu_i}{1-\nu_i}\right\}, & j-i+1\leqq k\leqq n-i+1.\end{cases}$$

そこで,

$$b_j=f_n\left(\mu_1^{(j)},\cdots,\mu_n^{(j)}\right)$$

$$C_{j\,i}=\begin{cases} f_{n-i+1}\left(\mu_1^{(j,i)},\cdots,\mu_{n-i+1}^{(j,i)}\right) \\ \quad -f_{n-i+1}\left(\mu_1^{(j,i+1)},\cdots,\mu_{n-i+1}^{(j,i+1)}\right), & 1\leqq i<j \\ f_{n-j+1}\left(\mu_1^{(j,j)},\cdots,\mu_{n-i+1}^{(j,j)}\right), & i=j\end{cases}$$

と置く. 行列

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ C_{n_1 1} & C_{n_1 2} & \cdots & \cdots & C_{n_1 n_1}\end{bmatrix}$$

が正則であることから, 逆行列 C^{-1} が定まり, その第 (n_1, j) 元を c_j^* と表わせば,

$$\alpha(\beta_n,\gamma_n)=f_n(\mu_1,\cdots,\mu_n)-\sum_{j=1}^{n_1}b_j\,c_j^*$$

によって一般の場合も計算できる (証明は筆者 [99] 参照).

この方法によれば, 結果を explicit に表現することは不可能事に近いが, 計算機を用いて計算させるには, 同種の計算のくり返しである点, 実用的である. 実際, この方法を適用した例として筆者の報告 [100] がある.

Wald-Wolfowitz [106] も, 一般の $\alpha(\beta_n,\gamma_n)$ に対する計算法を提示している. 唯彼等の β_n, γ_n に関する条件が, §3-a で課した条件 (i)～(iv) よりやゝ制約的である. 即ち (ii), (iii) に於ける半連続性の仮定を通常の連続性に, 更に (iv) に於ける不等式 (3.3) が

$$\nu_j-\mu_j\geqq\frac{1}{n}$$

で置き換えられている. (この為に, Rényi タイプ ([79], [50]) のものや比タイプ ([15]) のものを含まない.) このような条件の下で, 彼等は次のような計算法を与えた.

$$P_0(t)\equiv 1$$

と置き,

$$P_k(t)=\int_{\mu_k}^{\min(t,\nu_k)}P_{k-1}(s)\,ds,\qquad k=1,2,\cdots,n$$

と t に関する多項式を順次定義すると,

$$\alpha(\beta_n,\gamma_n)=n!\,P_n(1).\tag{3.6}$$

又, $\gamma_n=0$ の場合には,

$$P_0^+(t)\equiv 1,$$

$$P_k^+(t)=\int_{\mu_k}^{t}P^+_{k-1}(s)\,ds,\qquad k=1,2,\cdots,n,$$

と置いて,

$$\alpha(\beta_n, 0) = n!\, P_n^+(1). \tag{3.7}$$

ところで，(3.6) や (3.7) の表現は定積分の計算を含んでいて，実際上余り好ましくない．そこで彼等は，片側の場合の (3.7) に対しては，次のような行列式を用いて表現した．

$$\alpha(\beta_n, 0) = \begin{vmatrix} \frac{n!}{n!} & \frac{n!}{(n-1)!} & \frac{n!}{(n-2)!} & \cdots & \frac{n!}{1!} & \frac{n!}{0!} \\ \mu_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\mu_2^2}{2!} & \mu_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\mu_n^n}{n!} & \frac{\mu_n^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{\mu_n^{n-2}}{(n-2)!} & \cdots & \mu_n & 1 \end{vmatrix}$$

勿論，$\beta_n=1$ である場合にも，同様の平行した議論が為されている．而し両側の (3.6) の表現については，行列式等のより計算を行い易い形には書き換えられていない．唯，$\alpha(\beta_n, \mathbf{0})$ や $\alpha(\mathbf{1}, \gamma_n)$ の値が共に十分 1 に近いような場合には

$$\alpha(\beta_n, \gamma_n) \cong \alpha(\beta_n, \mathbf{0}) + \alpha(\mathbf{1}, \gamma_n)$$

が秀れた近似を与える事実を指摘している．適用可能性の観点からはともかく，一般的な境界で而も有限な n に対する確率の計算法に関して与えた先駆的業積として文献 [106] は，数が多い割に本質的なものの少いこの種の文献の中では，特筆されるべきものの一つであろう．

§4. 種々の D-統計量

a. 片側線型境界

Smirnov [93] は，片側検定用の D-統計量として

$$D_n^- = \sup_{-\infty<x<\infty} \{F_n(x) - F(x)\}$$

なるものを導入し，その極限分布を求めた：

$$\lim_{n\to\infty} P_r\{\sqrt{n}\, D_n^- < \lambda\} = 1 - e^{-2\lambda^2}. \tag{4.1}$$

有限な n に対する D_n^- の精密な確率分布は，Birnbaum-Tingey [11] によって与えられた：

$$\begin{aligned} d_n^-(\varepsilon) &= Pr\{D_n^- < \varepsilon\} \\ &= 1 - \varepsilon \sum_{j=0}^{[n(1-\varepsilon)]} \binom{n}{j} \left(1 - \varepsilon - \frac{j}{n}\right)^{n-j} \left(\varepsilon + \frac{j}{n}\right)^{j-1}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

尚，彼等はこの表現を用いて

$$d_n^-(\varepsilon) = 1 - d$$

となるような $\varepsilon=\varepsilon_{n,\alpha}$ の値の，$\alpha=0.1,\ 0.05,\ 0.01,\ 0.001$；$n=5, 8, 10, 20, 40, 50$ の場合についての結果を与えている．又 (4.2) の確率は

$$\beta_n^\varepsilon(t) = \min(t + \varepsilon,\ 1) \tag{4.3}$$

という境界を用いて，単に

$$d_n^-(\varepsilon) = \alpha(\beta_n^\varepsilon,\ 0) \tag{4.4}$$

と表わされる（第2図）から，§3-b で述べた方法によっても計算出来る．更に，Wald-Wolfowitz [106] の方法も，この場合に適用可能であるが，行列式の計算を含んでいる為，n の増加と共にぼう大な計算時間を要するであろう．尚，Takács [101] が互に交換可能な（非負値）増分をもつ確率過程に対する一般の結果から，Birnbaum-Tingey の結果 (4.2) を導いている．尚，(4.2) の確率に対するある種の近似が，Butler-McCarty [14]，Whittle [109] 等によって与えられている．Whittle の得た不等式は

$$d_n^-(\varepsilon) < 1-(1-\varepsilon)^{2n\varepsilon+2} < 1-(1-\varepsilon)^2 e^{-2n\varepsilon^2-n\varepsilon^3/(1-\varepsilon)} \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1),$$

$$1-d_n^-(\varepsilon) < e^{-2n\varepsilon^2+3.83n[\varepsilon/(1-\varepsilon)]^3} \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq 0.31).$$

(4.2) のある種の拡張は Ishii [49] によって与えられた.

$$d_n^-(\varepsilon;\,\delta) = P_r\{D_n^-(\delta_r) < \varepsilon\}$$

$$(4.5)\qquad = \sum_{m \leqq \min\{n,\, n(\delta+\varepsilon)\}} \binom{n}{m} (1-\delta)_{n-m} \Big\{\delta^m - \Big(\delta - \frac{m}{n} + \varepsilon\Big) \cdot \sum_{i=0}^{[n(\delta-\varepsilon)]} \binom{m}{i} \Big(\frac{i}{n}+\varepsilon\Big)^i \Big(1-\varepsilon-\frac{i}{n}\Big)^{m-i} \Big\},$$

ここで

$$D_n^-(\delta_r) = \sup_{0<F(x)\leqq\delta} \{F_n(x) - F(x)\}.$$

(4.5) 式で $\delta \to 1$ とすると (4.2) の右辺の値に近づくことは容易に判る. 尚 (4.5) に対応する漸近的な結果は Maniya [66] によって与えられている.

一方 Rényi [79], Chan Li-Chien [15], Csörgö [22], Ishii [50] 等は, 理論分布と経験分布との比

$$R_n = \sup_{F(x)>0} \frac{F_n(x)}{F(x)}$$

の分布を考えた. まず

$$(4.6)\qquad r_n(t) = Pr\{R_n < t\} = \begin{cases} 0, & t \leqq 1 \\ 1-\dfrac{1}{t}, & t \geqq 1 \end{cases}$$

となることは, Daniel [24], Robbins [81], Chan Li-Chien [15] 等によって証明された. Chan Li-Chien [15] は更に

$$R_n(\delta_r) = \sup_{0<F(x)\leqq\delta} \frac{F_n(x)}{F(x)}$$

なる確率変数の分布を考え, $\delta = \dfrac{c}{n}$ (c は n を越えない自然数) のとき, 次の結果を証明した。

$$r_n^+(t;\,\delta) = Pr\{R_n(\delta_r) < t\}$$

$$(4.7)\qquad = \begin{cases} 0, & t \leqq 0, \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{[ct]} b\Big(n,\, r,\, \frac{c}{n}\Big) - \sum_{k=1}^{[ct]} \frac{1}{k} b\Big(n,\, k,\, \frac{k}{nt}\Big) \sum_{r=k}^{[ct]} b\Big(n-k,\ r-k,\, \frac{ct-k}{nt-k}\Big), & 0 < t \leqq \dfrac{n}{c}, \\ 1-\dfrac{1}{t}, & t > \dfrac{n}{c}. \end{cases}$$

ここで

$$b(n,\, j,\, \Delta) = \binom{n}{j} \Delta^j (1-\Delta)^{n-j}.$$

Tang [103] も, 全く同様の結果を示しているが, 証明法その他に関して何ら見るべきものが無い. Ishii は [50] に於て, 統計量

$$(4.8)\qquad R_n(\delta_l) = \sup_{\delta \leqq F(x) \leqq 1} \frac{F_n(x)}{F(x)}$$

の分布を与えた: $t>1$, $t\delta<1$ に対して,

$$(4.9)\qquad r_n^l(t:\,\delta) = Pr\{R_n(\delta_l) < t\}$$

$$= \frac{t-1}{t} \sum_{j=[n-nt\delta]+1}^{n} \binom{n}{j} \left(1 - \frac{n-j}{nt}\right)^{j-1} \left(\frac{n-j}{nt}\right)^{n-j}.$$

$R_n(\delta_r)$ や $R_n(\delta_l)$ より一般の統計量

$$R_n(a,\ b) = \sup_{a \leqq F(x) \leqq b} \left\{ \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)} \right\}$$

の極限分布については，既に Rényi [79] が与えている．

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{R_n(a,\ b) < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\lambda\sqrt{\frac{b}{1-b}}} e^{-u^2/2} \times \left[\int_0^{\left(\sqrt{\frac{b}{1-b}}\,y - u\right)\sqrt{\frac{a(1-b)}{b-a}}} e^{-t^2/2}\, d t\right] d u \tag{4.10}$$

尚，(4.9) 式は Ishii [50] の結果の誤りを指摘した Csörgő [22] の結果である．

Pyke [77] は Poisson 過程の sup. や inf. の確率を計算する為に，確率変数

$$D_n{}^*(a) = \sup\{a\,n\,F_n(x) - F(x)\} = \max_{1\leqq i\leqq n}\{a\,i - U_i{}^*\}$$

の分布を計算し，

$$d_n{}^*(\varepsilon,\ a) = Pr\{D_n{}^*(a) < \varepsilon\} = (1+\varepsilon - n\,a) \sum_{j=0}^{[\varepsilon/a]} \binom{n}{j} (j\,a - \varepsilon)^j (1 + \varepsilon - j\,a)^{n-j-1} \tag{4.11}$$

なる結果を与えた．

$$D_n{}^*\left(\frac{1}{n}\right) = D_n{}^-$$

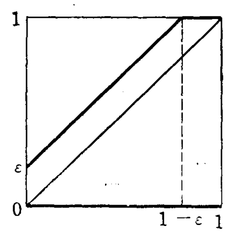
であることに注意すれば，(4.11) が (4.2) 式の拡張になっていることが判る．又 (4.11) 式は，片側 D-検定の Chapman [18] が考えた対立仮説より少し一般の場合の検定力を計算する為にも用いられる．更に，Birnbaum-Pyke [8] にならって

$$D_n{}^*(a) = a\,i^* - U^*_{i^*} \tag{4.12}$$

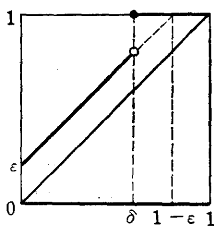
となるような整数値の確率変数 $i^* = i^*(a)$ が定義されるが，[8] の結果 (7.6) と比較して

$$Pr\left\{i^*\left(\frac{1}{n+1}\right) = j\right\} = \frac{1}{n+1} \quad (j\ \text{に無関係})$$

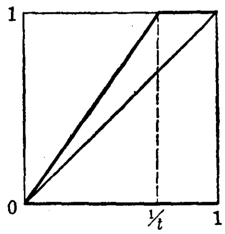
となる事実を指摘しているのは，直接この節の議論と関連はないが興味深い．尚，Dempster



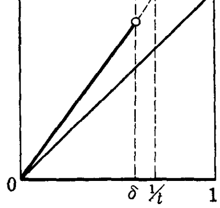
第2図



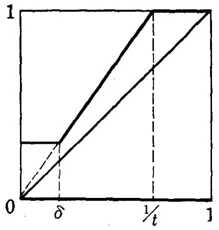
第3図



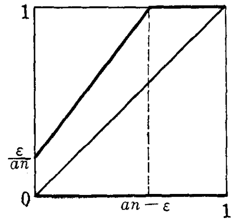
第4図



第5図



第6図



第7図

[30], Dwass [35] 等も又, 同じ時に, 夫々独立に (4.11) に類する関係を証明している. Smirnov が [95] に於て, 以上述べてきたような型の統計量の精密な及び極限の確率分布について統一的に議論している.

尚, (4.2) の確率に対して境界 (4.3) を用いて (4.4) と表現し, 第2図を対応せしめたように, (4.5), (4.6), (4.7), (4.9), (4.11) 等に対しても, 第3図から第7図を対応させて, §3に述べた計算法を適用せしめることができる.

b. 両側線型境界

Massey [71] は, Kolmogorov [59] の与えた漸近的な結果

$$\lim_{n\to\infty} d_n\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty} Pr\left\{D_n<\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right\}=\Psi(\lambda) \tag{4.13}$$

$$\equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j e^{-2j^2\lambda^2}$$

に対応する有限な n についての表現を, 次のような漸化式の形で与えた.

$$d_n\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{n!}{n^n}U(k,n),\quad k=1,\cdots\cdots,n-1. \tag{4.14}$$

ここで $U(\circ,\circ)$ は, 境界条件

$$\begin{aligned} &U(i,m)=0, && i\geqq m+k\\ &U(i,o)=0, && i=1,\cdots\cdots,k-1\\ &U(k,o)=1, && \end{aligned}$$

の下で, 関係

$$U(j,m+1)=\sum_{i=1}^{j+1}\frac{U(i,m)}{(j+1-i)!},\quad 1\leqq j\leqq 2k-1,$$
$$0\leqq m\leqq n-1.$$

を満足するものである.

これに対し, Chang Li-Chien [16] の与えた表現は explicit ではあるが, 次のように非常に複雑で, 計算機で実際計算せしめるのに (4.14) の表現より優れていると言い難い.

$$d_n(\varepsilon)=1-\frac{2\cdot n!}{n^n}\sum_{j=1}^{\left[\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right]}\sum_{m_1+\cdots+m_j=n}\prod_{i=1}^{j-1}w_{m_i}(2n\varepsilon)\left[w_{m_j}{}^*(n\varepsilon)\right]$$

$$+\frac{n!}{n^n}\sum_{j=1}^{\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]}\sum_{m_1+\cdots+m_j=n}\prod_{i=1}^{j-1}w_{mi}(2n\varepsilon)\left[w_{m_j}{}^*(n\varepsilon)+\sum_{l_1+l_2=m_j}w_{l_1}(n\varepsilon)w_{l_2}{}^*(n\varepsilon)\right]$$

但し,

$$w_m(\beta)=\sum_{l=0}^{[m-\beta]}\frac{(\beta^2-l)(\beta+l)^{-2}(m-\beta-l)^{m-l}}{(m-l)!},\quad m\geqq\beta,$$

$$w_m^*(\beta)=\sum_{l=0}^{[m-\beta]}\frac{(\beta^2-\beta l)(\beta+l)^{-2}(m-\beta-l)^{m-l}}{(m-l)!},\quad m\geqq\beta,$$

$$w_m(\beta)=w_m{}^*(\beta)=0,\qquad m<\beta.$$

Blackman [12], Kemperman [54] 等は, 更に一般の場合の確率

$$d_n(a,b)=Pr\{-a<F_n(x)-F(x)<b\} \tag{4.15}$$

に対して, (4.13) と類似の表現を与えているが, 頻雑そのものである故, 記述は省略する. 尚 (4.15) に対する極限の確率分布については, 既に Smirnov [93] によって

$$\lim_{n\to\infty} d_n\left(\frac{a}{\sqrt{n}},\frac{b}{\sqrt{n}}\right)=\Psi^*(a,b) \tag{4.16}$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \{2\, e^{-2j^2(a+b)^2} - e^{-2[ja+(j-1)b]^2} - e^{-2[(j-1)a+jb]^2}\}$$

のように与えられている．その後 Feller [36]，Doob [32]，Donsker [31] 等が，(4.13) や (4.16) の関係の別証を与えた．特に Doob [32] の証明は，ガウス過程と関連せしめた点興味深い．即ち $\{x(t) : t \in I\}$ を，条件

$$\begin{aligned} &E\{x(t)\} = 0\,, && 0 \leqq t \leqq 1\,, \\ &E\{x(t) - x(s)^2\} = (t-s)[1-(t-s)]\,, && 0 \leqq s \leqq t \leqq 1\,, \\ &Pr\{x(o) = 0\} = 1 && \end{aligned}$$

を満足するガウス過程とするとき

$$\lim_{n\to\infty} d_n\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = Pr\left\{\max_{0\leqq t\leqq 1} |x(t)| < \lambda\right\} \tag{4.17}$$

という事実に注目して，確率過程の理論を用いて，(4.13)，(4.16) の関係を示した．もっとも Doob は (4.17) の関係に対して厳密な証明を与えなかったので，後に Donsker [31] がそれを正当化した．Kiefer [55] は，ある種の拡散方程式の解として (4.13) や (4.16) に対応するガウス過程の確率を特徴づけ，非常に簡単な見易い証明を与えた．更に Kac [51]，Korolyuk [60, 61]，Darling [28] 等は又，ある種のポアソン過程と関連させて (4.13)，(4.16) の関係を示した．特に Korolyuk，Darling 等は有限な n の確率に対して考察し，極限の確率による近似式を与えている．例えば，Darling [28] の結果に

$$d_n\left(\frac{a}{\sqrt{n}}, \frac{b}{\sqrt{n}}\right) = \Psi^*(a, b) + \frac{1}{6\sqrt{n}}\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial a} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial b}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4.18}$$

ここで $\Psi^*(a, b)$ は (4.16) の右辺で与えられる．特に $a=b=\lambda$ と置いて

$$d_n\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = \Psi(\lambda) + \frac{1}{6\sqrt{n}}\Psi'(\lambda) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.19}$$

を得る．$\Psi(\lambda)$ は (4.13) の右辺で与えられるものである．(4.18) や (4.19) 式は，有限な n の場合の確率を，極限のそれで近似しようと試みたもので，Chung [20] の結果がその先駆として掲げられよう．

最後に，極限の確率分布に関しては，もう少し一般の場合の結果が与えられているので，それを簡単に紹介して置こう．Anderson-Darling [2] は，ある種の重み $\psi(t)$ $(\geqq 0)$ をつけた統計量

$$D_n(\psi) = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|\,\psi(F(x)) \tag{4.20}$$

を提示し，Doob [32] の Wiener 過程の議論へ還元するという考えを用いて，(4.20) の極限分布を求める為の一般的手法を示した．而し，その方法は形式的なもので，実際に一般の (4.19) については explicit な表現は与えられない．唯，函数 $\psi(t)$ が階段函数である場合については，その極限分布を計算する解析的な式が与えられている．特に，

$$\psi_0(t) = \begin{cases} 1\,, & a < t \leqq b \\ 0\,, & 0 \leqq t \leqq a\,, \quad b < t \leqq 1 \end{cases}$$

の場合には Maniya [66] の与えた確率分布で，次のような表現を与えている：

$$\begin{aligned} b(\lambda; \psi_0) &= \lim_{n\to\infty} Pr\{D_n(\psi_0) < \lambda/\sqrt{n}\} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{-\lambda}{1-a}}^{\frac{\lambda}{1-a}} dx \int_{\frac{-\lambda}{1-b}}^{\frac{\lambda}{1-b}} B_j(x, y; \lambda)\, dy \end{aligned} \tag{4.21}$$

但し，

$$B_j(x, y; \lambda) = (-1)^j (1-a)\sqrt{\frac{1-b}{2\pi a(b-a)}} \exp\left\{-\frac{2j^2\lambda^2}{1-a} - 2\lambda j(-1)^j\right\}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(1-a)x^2}{2a}-\frac{(1-a)(1-b)}{2(b-a)}\left[y-(-1)^j x-\frac{2j\lambda}{1-a}\right]^2\right\}.$$

彼等は更に，経験分布の変動が両端で小さくなる事実から推測して

$$\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t(1-t)}, & 0<a<t\leqq b<1,\\ 0, & \text{他}\end{cases} \tag{4.22}$$

といったタイプの重みが効果的であろうと述べているが，極限分布に関する表現は何も与えていない．唯，最近 Vandewiele [104] が適合度検定問題の一般論を展開した際に，(4.22) の重みが表われる事実は興味深い．即ち，ある仮説 H の検定問題を二項分布に関する初等的な仮説の集合 $E=\{H_t\,;\,-\infty<t<\infty\}$ に関する問題に還元し，E に属する各仮説を全て採択する場合にのみ仮説 H を採択することにする．このとき，各 H_t の棄却域を定めるときに二項分布を正規分布で近似するものとすれば，全ての H_t を採択する (H を採択する) 採択域が，(4.22) の重みをつけた統計量 (4.20) によって与えられることになるのである．

Malmquist [65] は，やはり Doob [32] の方法にならって次のタイプの極限分布を与えた．

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{\sqrt{n}\,|F_n(x)-F(x)|<(a-b)F(x)+b,\ x(s)\leqq x\leqq x(t)\right\} \tag{4.23}$$

$$=\frac{\sqrt{t}}{2\pi\sqrt{t-s}}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{A_1(m)}^{A_2(m)}dx\int_{B_1(m)}^{B_2(m)}f_m(x,y)\,dy\quad (a\geqq b).$$

但し，$x(s)$ は

$$F(x)=\frac{s}{1+s}$$

となるような x で，更に

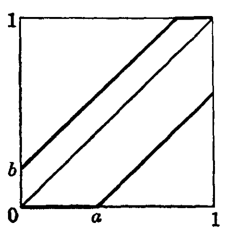
$$\left.\begin{aligned}A_i(m)&=\left[(-1)^i(as+b)-2asm\right]/\sqrt{s}\\ B_i(m)&=\left[(-1)^i(at+b)-2bm\right]/\sqrt{t}\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&i=1,2,\\ &m=0,1,\cdots,\end{aligned}$$

$$f_0(x,y)=\exp\left\{\frac{-1}{2\sqrt{t-s}}\left[\sqrt{t}\,x^2-2\sqrt{s}\,xy+\sqrt{t}\,y^2\right]\right\},$$

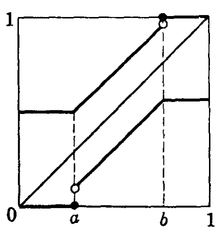
$$f_m(x,y)=2(-1)^m e^{-2m^2ab}\exp\left\{\frac{-1}{2\sqrt{t-s}}\left[\sqrt{t}\,x^2+2\sqrt{s}\,xy+\sqrt{t}\,y^2\right]\right\}.$$

尚，(4.22) 式で $a=b$ の場合が (4.21) 式，更に $b=0$ の場合は (4.10) の関係に対応する両側の場合の結果で Rényi [79] によって与えられている．更に Rényi 型の確率変数で sup をとる範囲を経験分布 F_n の方に制限した場合に関する結果も Csörgö [23] によって報告されている．又，Gihman [42] の結果もかなり複雑な truncation の場合を扱ったものとして特筆される．

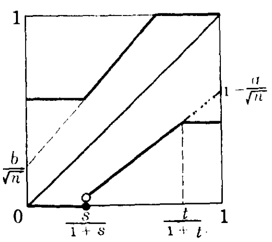
以上述べた如何なる型の確率についても，有限な n に対しては §3-b の計算法が適用され得る．即ち (4.15)，(4.21)，(4.23) 等の確率に対しては，夫々第 8, 9, 10 図を対応せしめることが出来る．



第8図



第9図



第10図

III. 検定問題に於る D-統計量

§5. 一般的な信頼領域の構成

§3 では，与えられた境界の組 (β_n, γ_n) を用いて，§4 に述べた方法を用いて計算される大きさ $\alpha(\beta_n, \gamma_n)$ の採択域 $A(F)$ を構成した．今度は，任意の連続分布 F からの順序統計量 $X_1^*, \cdots, X_n^*$ を用いて，信頼係数が $\alpha(\beta_n, \gamma_n)$ である一般的な信頼領域(confidence region)を構成してみよう．まず β_n, γ_n から (3.1), (3.2) によって $\mu_j, \nu_j, j=1, \cdots n$ を求み，更に次のような2つの非減少函数を定義する．

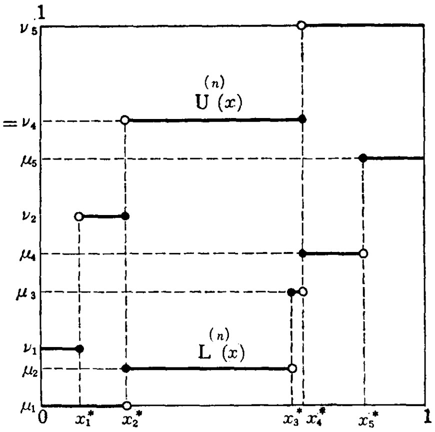
(5.1)
$$L^{(n)}(x)=L^{(n)}(x;\mu_n, \boldsymbol{X}_n^*)$$
$$=\begin{cases}0, & x<X_1^*,\\ \mu_i, & X_i^*\leqq x<X^*_{i+1},\ i=1,\cdots,n-1,\\ \mu_n, & x\geqq X_n^*,\end{cases}$$

(5.2)
$$U^{(n)}(x)=U^{(n)}(x;\nu_n, \boldsymbol{X}_n^*)$$
$$=\begin{cases}\nu_1, & x\leqq X_1^*,\\ \nu_{i+1}, & X_i^*<x\leqq X^*_{i+1},\ i=1,\cdots,n-1,\\ 1, & x>X_n^*.\end{cases}$$

そこで連続な分布函数のクラス C の中に，次のようなランダムな部分集合を定義する．

(5.3)
$$R(F_n)=R\left(\boldsymbol{X}_n^*;\mu_n[\beta_n], \nu_n[\gamma_n]\right)$$
$$=\left\{G\in C;\ L^n(x)\leqq G(x)\leqq U^n(x),\ \forall x\in R\right\}.$$

この信頼領域の信頼係数が $\alpha(\beta_n, \gamma_n)$ となる事実の証明は容易であろう (筆者 [99] 参照)．例えば，第1図の β_n, γ_n と一様分布からの大きさ5の標本 (0.22, 0.10, 0.68, 0.65, 0.84) を用いて (5.3) の信頼域を構成してみると，第11図のようになる．その他，信頼域の構成例に関しては [106], [111] 等の結果もある．



第11図

§6. 適合度 D-検定の検定力

境界 (β_n, γ_n) から (5.3) により作られる信頼領域 $R(F_n)$ を用いて行う検定方式を，単に検定 $[\beta_n, \gamma_n]$ と表わす．そこで，ある種の対立仮説に対する適合度検定 $[\beta_n, \gamma_n]$ の検定力 (power) について調べてみよう．

F を狭義単調で連続な (従って逆写像 F^{-1} が存在するような) 分布函数とする．又 φ を I から I への狭義単調増加連続函数で，$\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ なる如きものとして，次のような検定問題を考えてみよう．

(6.1)
$$\begin{cases}\text{帰無仮説} & H: F\\ \text{対立仮説} & K: G=\varphi F\end{cases}$$

これに対する検定 $[\beta_n, \gamma_n]$ の検定力が

(6.2)
$$p_\varphi(\beta_n, \gamma_n)=1-\alpha(\beta_n\varphi^{-1}, \gamma_n\varphi^{-1})$$

で与えられることは，対応する統計量が (d)-構造を持つ事実と，φ の単調性の仮定とを用いることに依り，直ちに証明される．従って，検定 $[\beta_n, \gamma_n]$ の (6.1) に対する精確な検定力が，§3 で述べた方法で計算可能である．実際，$\varphi(t)=t^{\frac{1}{1+\delta}}$ $(\delta>0)$ $(\gamma_n=0)$ の場合の計算例が，筆者 [100] に於て示されてある．

これまで，種々の D-検定が提示されて来たが，非常に特別の型の問題に対して以外は，その精確な検定力が表現されていない．唯，対立仮説のある種の一般的なクラスの中での検定力に対する下(上)限 (lower (upper) bound) についての表現とか，漸近的な値に対しての表現に関しては，いくつかの文献があるので，それ等についての概括を以下に於て試みる．

Massey [69, 70] は，仮説 F の対立仮説として

$$\max_x |F(x)-G(x)| = |F(x_0)-G(x_0)| = \Delta$$

なる x_0 が存在するような分布 G を考えたとき，検定力の下限に対する漸近的な値として，

$$1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2[\Delta\sqrt{n}-d_\alpha(n)]}^{2[\Delta\sqrt{n}+d_\alpha(n)]} e^{-t^2/2}\,dt \tag{6.3}$$

を与えた．ここで $d_\alpha(n)$ は

$$Pr\{D_n > d_\alpha(n)\,|\,F\} = \alpha$$

によって定まる量である．当時 Birnbaum-Tingey [11] の結果 (4.2) を参照し得なかったので，彼独自の漸化式による方法 ([68] 参照) によって $d_\alpha(n)$ の値に対する表を作っている．又このような検定が一致性を有するが偏りを持つことを指摘している．更に彼は χ^2-検定との比較をも試みて，d-検定の方が，(i) 対立仮説との最大変異に関する "detectability" や (ii) グループ分けを要さないので，不適切な分け方による情報の損失の心配がないこと (iii) 計算量の少いこと等に関して勝っているが，反面 (i) 仮説の分布が完全には記述されてなく推定すべきパラメーターを含む場合や (ii) 離散分布の場合等については適用性を有さないといった事実を述べている．而し，最近 Slakter [89] は，等確率になるようなグループ分けが為された場合には，χ^2-検定の方が勝っているという経験的な結果を報告している．

Birnbaum [5] は (4.2) に類する関係を用いて，

$$C(F:\delta) = \{G\,|\,\exists\, x_0;\ \max_x\{F(x)-G(x)\} = F(x_0)-G(x_0) = \delta\}$$

なるクラスの対立仮説についての検定力の下限に関して

$$\sum_{i=0}^{[nF(x_0)-\alpha)]}\binom{n}{i}(F(x_0)-\delta)^i(1-F(x_0)+\delta)^{n-i} \tag{6.4}$$

なる最良の精密な表現を与えた．Birnbaum 等 ([6], [10]) は，統計的に比較可能なクラス

$$C(F:\delta) = \{G\in C(F:\delta)\,|\,0 \leqq F(x)-G(x) \leqq \delta\} \tag{6.5}$$

を対立仮説とする場合に，同様の考察を行った．

Chapman [18] は，やはり (6.5) の対立仮説の下で片側 D_n^- 検定が "partially ordered" という特性を有することに注目し，一般の partially ordered な検定 ((d)-構造の統計量に基いた検定が，ある種の単調性を持てば partially ordered になる) の，クラス (6.5) に対する検定力の下限，上限が夫々

$$G_l(x) = \begin{cases} F(x) & 0 \leqq F(x) < t_0 \\ t_0+\delta & t_0 \leqq F(x) \leqq t_0+\delta \\ F(x) & t_0+\delta \leqq F(x) \leqq 1 \end{cases}$$

$$G_u(x) = \min[F(x)+\delta,\ 1]$$

という型の分布を考えることによって得られることを示した．そして，D_n^- 検定始め ω^2-検定 Fisher-Pearson の検定等力に対する下限上限の近似式を与えた．

van der Waerden [105] は，F を標準正規分布 Φ_0 とし，対立仮説を平均 $\mu>0$，分散 1 の正規分布 Φ_μ としたときの D_n^- 検定の検定力を，$n=2, 3, 5$ の場合について数値計算し，古典的な最強力検定との比較を図示した．Malmquist [65] は $\Phi_{m/\sqrt{n}}(m>0)$, $n=1, 2, \cdots$ という対立仮説の系列に対する中央を少しふくらました片側検定

$$\beta_n^{a,b}(t) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{a-b}{\sqrt{n}}\right)t+\dfrac{b}{\sqrt{n}}, & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left|\ \left(1-\frac{a-b}{\sqrt{n}}\right)t+\frac{a}{\sqrt{n}}\,,\qquad \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1\right.$$

の漸近的な検定力についての上限，下限を Doob [32] の議論の拡張から導出した．例えば，下限に対する表現は次のようなものである．

$$1-\Phi_0\big(a+b-2m\varphi(o)\big)+2e^{-2a'}\,\Phi_0\big(a-b-2m\varphi(o)\big)-e^{-4'(a-)}\,\Phi_0\big(a-3b-2m\varphi(o)\big)$$

但し，Φ_0 は標準正規分布函数，φ はその密度である．

このような対立仮説の系列に対して漸近的な検定力を求める方法が，最近 Quade [78] によって，より一般に而も統一的に議論された．彼は

$$\sup|F(x)-G_n(x)|=\delta n^{-1/2}+o(n^{-1/2})$$

なる関係を満足する対立仮説の系列 $\{G_n\}$ のクラス C_δ 及び $C_\delta(\tau)$，$C_\delta{}^+$ 等の部分クラスに対する漸近的な検定力の下限，上限を求め，更にそれに附随した不等号関係について種々議論を加えている．

筆者 [100] は，(6.1) のタイプで

$$\varphi(t)=t^{\frac{1}{1+\delta}}\quad(\delta>0)$$

の場合の問題を考え，夫々

(i) $\qquad \beta_n{}^{(1)}(t)=\min(t+\varepsilon,\ 1),\quad \varepsilon>0$

(ii) $\qquad \beta_n{}^{(2)}(t)=\min(\alpha t,\ 1),\quad \alpha>1$

(iii) $\qquad \beta_n{}^{(2)}(t)=\min(kt,\ 1),\quad k>1$

の場合の検定 $[\beta_n{}^{(i)},\ \mathbf{0}]$ の検定力を (6.2) に従って精密に計算した．信頼係数 95% の場合，$n=10,20$，$\delta=0.1\,(0.1)\,1.0$ の各々で一様に (iii) の検定が秀ぐれているが，99% になると，$n=10$ では3者共ほゞ同程度であるが，$n=20$ の場合 δ の各値について (i) の検定が勝り，以下 (iii)，(ii) の順になることを報告している．

最後に，効率 (efficiency) の概念を用いて検定問題の一般論を展開した Hoeffding-Rosenblatt [47] について簡単に触れて置こう．C を $R=(-\infty,\ \infty)$ 上の連続分布の全体とし，C_1, C_2 を互に素な C の可測部分集合とする．大きさ n の標本を用いて行なわれる

(6.6) $\quad\begin{cases}\text{帰無仮説}\quad H\colon X_1,\cdots,X_n \text{ は } F\in C_1 \text{ に従う．}\\ \text{対立仮説}\quad K\colon X_1,\cdots,X_n \text{ は } G\in C_2 \text{ に従う．}\end{cases}$

というタイプの検定問題を記号で $(C_1,\ C_2)_n$ と表わすことにする．t_n を $(C_1,\ C_2)_n$ に対する検定（函数）とする．即ち，t_n は R^n から $[0,1]$ への可測函数で，$\boldsymbol{X}_n=(X_1,\cdots,X_n)$ の観測値 $\boldsymbol{x}_n=(x_1,\cdots,x_n)$ を用いて "$t_n(\boldsymbol{x}_n)$ の確率で仮説 H を $1-t_n(\boldsymbol{x}_n)$ の確率で K を採択する" といった決定をすることである．

適当な正数 α_1, α_2 に対して，検定 t_n が $(C_1,\ C_2)_n$ に対する水準 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$ の検定であるとは，条件

(6.7) $\quad\begin{cases}\alpha(t_n,\ F)\geqq 1-\alpha_1, & \forall F\in C_1\\ \alpha(t_n,\ G)\leqq \alpha_2, & \forall G\in C_2\end{cases}$

を満足するときである．ここで

$$\begin{aligned}\alpha(t_n,\ F)&=E\left\{t_n\ (\boldsymbol{X}_n)\,|\,F\right\}\\ &=\int_{R^n}t_n(\boldsymbol{x}_n)\,dF(x_1)\cdots\cdots dF(x_n).\end{aligned}$$

次に検定の系列 $\boldsymbol{t}=\{t_n\}$ に対して "efficiency index" $N(t)=N(t;C_1,C_2,\alpha_1,\alpha_2)$ なるものを定義する．固定された $C_1,C_2,\alpha_1,\alpha_2$ に対して，(6.7) の関係を満足する最小の標本数として検定系列 $\boldsymbol{t}=\{t_n\}$ の index $N(\boldsymbol{t})$ が定義される．如何なる有限の n についても (6.7) が成立しない場合には $N(\boldsymbol{t})=\infty$ と定義する．更に，検定列のある集合 T に対しても

(6.8) $$N(T)=\inf_{t\in T}N(\boldsymbol{t})$$

なる "efficiency index" を定義すると，2つのクラス T_1, T_2 間に相対的な効率が

$$\mathrm{eff}(T_1/T_2)=N(T_2)/\mathrm{N}(T_1)$$

によって与えられる．これは Pitman の定義した効率のノン・パラメトリックな場合への拡張に当る．

例えば，$\mathrm{C}_1=\{F\}$，$\mathrm{C}_2=\{G;\ \sup|F(x)-G(x)|>\delta\}$ と置いた場合に，集合 T として

$$t_n(\boldsymbol{x}_n)=\begin{cases}1, & \sqrt{n}\ \sup|F_n(x)-F(x)|\leqq C_n\\ 0, & \sqrt{n}\ \sup|F_n(x)-F(x)|>C_n\end{cases} \tag{6.9}$$

によって与えられる $\boldsymbol{t}=\{t_n\}$ のクラスを考える．かかる T に対する index (6.8) は，$\delta\to 0$ のとき漸近的に

$$N(T)\sim\frac{1}{\delta^2}\left\{\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{1}{\alpha_1}}+\frac{1}{2}\lambda(\alpha_2)\right\}^2$$

で与えられることを示している．ここで $\lambda(\alpha)$ は

$$\alpha=1-\Phi(\lambda)\qquad(\Phi\ \text{は標準正規分布函数})$$

によって定まる $\lambda=\lambda(\alpha)$ である．

Rosenblatt [92] は，適当な単調函数 H_1，H_2 を用いて与えられる複合仮説

$$\mathrm{C}_1=\{F\in\mathrm{C};\ H_1(x)\leqq F(x)\leqq H_0(x),\ \forall x\}$$
$$\mathrm{C}_2=\{G\in\mathrm{C};\ \inf_{F\in C_1}\sup_x|F(x)-G(x)|\geqq l\}$$

の検定問題 $(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)_n$ に，(6.9) の検定例のクラスを考えた．efficiency index そのものは与えてないが，それより少し大き目の自然数の求め方を提示している．

Kac-Kiefer-Wolfowitz [52] は，正規性に関する複合仮説の検定問題に対して，種々の距離に基いた統計量の分布に関して議論し，χ^2-検定の効率を比率している．特に D-統計量に類するものとして

$$v_n=\sup_t|F_n(t)-\Phi(t;\bar{x}_n,s_n^2)| \tag{6.10}$$

を提示している．ここで $\Phi(\cdot;\bar{x}_n,S_n^2)$ は平均分散が，夫々標本平均 $\bar{x}_n$，標本分散 s_n^2 である正規分布である．v_nの分布形に関する表現は何も与えていないが，$n=25$，100 の場合について得られた経験的な結果が報告されている．而し，ω^2-タイプの

$$w_n=\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(t)-\Phi(t;\bar{x}_n,s_n^2)\}^2\,d\Phi(t;\bar{x}_n s_n^2)$$

に関しては，経験的な結果以外に極限分布の解析的考察が為されている．勿も，この種の距離に関しては，同じ頃 Darling [26] が

$$C_n^2=n\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(x)-F(x;\hat{\theta}_n)\}^2\,dF(x;\hat{\theta}_n) \tag{6.11}$$

なる一般の統計量について，ある種の正則性の条件の下で ω_n^2 と C_n^2 の極限分布が一致する事実を証明している．尚，ノン・パラメトリックな検定の効率について種々議論し，綜括している文献として Noether [75] がある．

§7.　種々の適合度検定

これまで議論してきた D-統計量に対して，種々の適合度検定用の統計量がその競争相手として掲げられる．ここでは，主に経験分布函数 $F_n(x)$ に基いた統計量の代表的なものについて概観を与える．

Kuiper [64] は，D-統計量を少し修正した

$$V_n=\sup\{F_n(x)-F(x)\}-\inf\{F_n(x)-F(x)\}$$

なる確率変数を提示した．この V_n の分布が，分布形 F には勿論，サークル上の分布の場合には原点の選び方にも依存しないという事実に注目して，この統計量がサークル上での観測値

に関する適合度検定に適していると述べている．彼は V_n の分布について，次のような漸近的結果を与えている．

$$Pr\left\{V_n < \frac{c}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2(4j^2c^2-1)e^{-2j^2c^2} + \frac{8}{3\sqrt{n}} c \sum_{j=1}^{\infty} j^2(4j^2c^2-c3)e^{-2j^2c^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{7.1}$$

特に $c>\frac{6}{5}$ の場合には，

$$1-2(4c^2-1)e^{-2c^2}+\frac{8}{3\sqrt{n}}c(4c^2-3)e^{-2c^2}$$

なる表現が比較的良い近似値を与えることを指摘している．有限な n に対する (7.1) の精密な確率についての upper (lower) tail に関しては，Stephens [97] の結果がある。

$z \geqq \left[\frac{n}{2}\right]\Big/ n$ に対して

$$Pr\{V_n > z\} = \sum_{i=0}^{[n(1-z)]} \binom{n}{i}\left(1-z-\frac{i}{n}\right)^{n-i-1} J_i\ , \tag{7.2}$$

ここで J_i は $s_i = z+\frac{i}{n}$ と置いて次式で与えられる．

$$J_i = S_i{}^i n - S_i{}^{i-1} i\left(3-\frac{2}{n}\right) + S_i{}^{i-2} i(i-1)\left(\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right) - S_i{}^{i-3}\frac{i(i-1)(i-2)}{n^2}\ .$$

$\left(\frac{1}{n} \leqq z \leqq \frac{2}{n}\right.$ に対して $\left. Pr\{V_n < z\} = n!\left(z-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)$.

尚，(7.2) の結果はそれ程複雑でないが，導き方は非常に面倒である．唯 V_n の平均値に関しては，導き方も非常に単純で

$$E\{V_n\} = \frac{n!}{n^{n+1}} \sum_{i=0}^{n\ 1} \frac{n^i}{i!} = 0\ (n^{-1/4}). \tag{7.3}$$

D-統計量よりも歴史的に見て古いものに Cramér [21], von Mises [73] 等の提唱した

$$\omega_n{}^2 = n\int_{-\infty}^{\infty}[F_n(x)-F(x)]^2\,dF(x)$$

がある．Smirnov [90, 91] が一般化された

$$W_n{}^2 = n\int_{-\infty}^{\infty}[F_n(x)-F(x)]^2\,\psi(F(x))\,dF(x)$$

の極限分布の特性函数に対して

$$\lim_{n\to\infty} E\{e^{itW_n{}^2}\} = D(2it)\}^{-1/2} \tag{7.4}$$

なる結果を与えた．ここで $D(\lambda)$ は

$$k(s,t) = \frac{1}{2}\psi(s)\psi(t)[s+t-|s-t|-st]\ ,\quad 0\leqq s,\ t\leqq 1$$

を核に持つ Fredholm の行列式の値である．これより $D(\lambda)$ の零点 λ_j, $j=1,2,\cdots\cdots$ を用いて

$$\lim_{n\to\infty} Pr\{W_n^2 > x\} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \int_{\lambda_{2k-1}}^{\lambda_{2k}} \frac{e^{-tx/2}}{\sqrt{-t^2 D(t)}} dt .$$

後に kac [51]. Anderson-Darling [2] 等は Doob 流の考えを用いて，(7.4) の関係に対する簡単な証明を与えた．(W_n^2 の極限分布の統一的議論は [2].) 有限な n に対する確率分布の解析となると，D-統計量に対するものと比較してかなり厄介である．Marshall [67] が ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2 の確率分布を与えた．$n=1$ の場合には

$$Pr\{\omega_1^2 \leqq z\} = \begin{cases} 0 , & z < \dfrac{1}{12} , \\ \left(4z - \dfrac{1}{3}\right)^{1/2} , & \dfrac{1}{12} \leqq z \leqq \dfrac{1}{3} , \\ 1 , & z > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

と簡単であるが，2以上になると非常に煩雑な表現になる．但し，数値的に極限分布と比較してみて，収束が非常に速い事実を指摘している．Pearson-Stephens [76] は，最初の4次のモーメントを用いてピアソン曲線で近似することを試みた．

D-統計量に対して V_n が考えられたように，ω_n^2-統計量に対しても

$$U_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} \left\{F_n(x) - F(x) - \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(y) - F(y)]dF(y)\right\}^2 dF(x)$$

といった統計量が考えられる．Watson [108] がその漸近分布を与え，Stephens [96] が $n=4$ までの精密な確率分布を求めた．[96] の II では，一般の n に対して，次のような結果も与えている．

$Pr\{U_n^2 < z\}$

$$= \begin{cases} 0 , & z \leqq \dfrac{1}{12n} \\ \dfrac{(n-1)!\sqrt{n}\{\sqrt{\pi}R\}^{n-1}}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)} , & \dfrac{1}{12n} \leqq z \leqq \dfrac{1}{12n} + \dfrac{1}{2n^2} \\ (n-1)!\sqrt{n}\{\sqrt{\pi}R\}^{n-1} \left\{\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)} - \dfrac{nI}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\right\}, & \\ & \dfrac{1}{12n} + \dfrac{1}{2n^2} \leqq z \leqq \dfrac{1}{12n} + \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

但し

$$R = \left(z - \frac{1}{12n}\right)^{1/2} , \quad I = \int_0^{\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}nR}} \sin^{n-1}\theta\, d\theta .$$

経験分布に基いた統計量に関しては，他にも色々考えられる．Darling [28] は

$$F_n(x) - F(x) - a/\sqrt{n}$$

の零点の個数を表わす確率変数 $N_n(a)$ の分布について

$$\text{(7.5)} \qquad Pr\{N_n(a) \leqq k\} = 1 - \frac{a\sqrt{n}+k}{n^n} \sum_{j=0}^{[n-a\sqrt{n}-k]} \frac{n!}{j!(n-k-j)!}$$

$$\times (j + a\sqrt{n} + k)^{j-1}(n - j - a\sqrt{n} - k)^{n-j-k}$$

なる結果を得ている．これは

$$Pr\{D_n^- < a\} = Pr\{N_n(a) = 0\}$$

であるから，(4.2) の結果の拡張になっている．尚，$a=0$ の場合，(7.5) の漸近的な結果は既に Smirnov [92] によって

$$\lim_{n\to\infty} Pr\{N_n(o) > x\sqrt{n}\} = e^{-x^2/2}$$

の如く与えられている。又 $N_n(0)$ の期待値に関しては橋爪 [46] の結果

$$E\{N_n(o)\} = -1 + 2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{i}{n}\right)^{i}\left(1-\frac{i}{n}\right)^{n-i}$$

があり，対応する極限の結果は Feller [36] によって与えられている．Darling [28] は更に

$$T_n(a) = \int_{F_n(x) > F(x)+a/\sqrt{n}} dF(x)$$

なる確率変数 ($F_n(x)$ のグラフが $F(x)+a/\sqrt{n}$ を越えた垂直な部分のルベツク測度の和) の漸近分布に関して

$$\lim_{n\to\infty} Pr\{T_n(a) > z\} = a\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^{1-z}\frac{1-z-t}{[t(1-t)]^{3/2}}e^{-2a^2/t}\,dt$$

なる結果を与え，有限な n については，その特性函数を示し，$T_n(o)$ が $[0, 1]$ 上の一様分布であるという Gnedenko-Mihalevic [43] の結果を再び証明した．尚，$T_n(o)$ が一様分布をするという事実は Birnbaum-Pyke [8] Dwass [34]，Kuiper [63] 等も証明しているし，極限分布が一様分布になることは Kac [51] が初めて指摘した．Birnbaum-Pyke [8]，Dwass [34]，Kuiper [62] 等は更に統計量

$$S_n = \inf\{F(x) : F_n(x) - F(x) = D_n^-\}$$

の分布も $[0, 1]$ 上の一様分布となることを示し，更に

$$A_n = \frac{1}{n}\, i^*\left(\frac{1}{n}\right)$$

なる確率変数（(4.12) の関係で定義される）についても

$$Pr\left\{A_n = \frac{j}{n}\right\} = n^{-n}\sum_{i=n-j}^{n-1}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} i^i (n-i)^{n-i-1} \tag{7.6}$$

$$E\{A_n\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{n!}{n^{n+1}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n^i}{n!} \tag{7.7}$$

のような結果を与えた．(7.3)，(7.7) より

$$E\{A_n\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E\{V_n\}$$

という関係があることは興味深い．又，不等式

$$x - \sqrt{E\{V_n\}} \leqq Pr\{A_n < x\} \leqq x$$

と $\lim_{n\to\infty} E\{V_n\}=0$ なる事実に注意すれば，確率変数 α_n の漸近分布は一様分布となることが判る．又 Chan Li-Chien [17]，Cheng Ping [19] 等は piercing point，non-negative jump point の個数の確率分布を求めた．極限分布はやはり一様分布となることが示されてある．Takács [102] がこの種の統計量の分布について，統一的な証明を与えた．

経験分布函数を直接含んでいないが，順序統計量に基いた Kimball [58]，Sherman [88] 等の統計量がある．Darling [25] は両者を統一して

$$H_n = \sum_{j=0}^{n} h[F(X^*_{j+1}) - F(X^*_j)]$$

なる統計量の分布の特性函数を与えた．

$$E\{e^{itH_n}\} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^s\left(\int_0^\infty e^{-rs+ith(r)}dr\right)^{n+1} ds\ .$$

これより，$h(x)=x^\alpha\,(\alpha>0)$ と置いて Kimball [58] の統計量 ($\alpha=2$ の場合は Moran [74])，又 $h(x) = \frac{1}{2}\left|x - \frac{1}{n+1}\right|$ と置いて得られる Sherman [88] の統計量等が，漸近的に正規分布をすることが一括して証明される．Ishii [48] は life test にも用いられるよう．Darling の

統計量を更に

$$H^{(s)}{}_n = \sum_{j=0}^{s} h\left[F(X^*{}_{j+1}) - F(X^*{}_j)\right]$$

のように修正して，同様の事柄を議論した．

以上述べたもの以外でも，χ^2-検定や，階数 (rank) に依る検定等を始めとして非常に多くの検定法が提示されていて，それらの概括を述べることは紙数の制限や筆者の能力から推して不可能である．これらの詳細な議論に関しては，例えば [38]，[110]，[107] 等の本を繙れたい．

§8. 終 り に

以上でこの小報告を終えようと思うが，適合度検定用の D-統計量に関する文献を一通り見渡して感じたことを，私見を交えて二，三列挙して見たい．

この種の文献は数が多い割に，本質的なものが少い．特に 1960 年以降では，面白いものが殆んど見受けられない．又，統計量の確率分布に関するものが多くて，検定力まで言及しているものは殆んど見受けられない．これらの歴史的事実を我流で解釈してみると次のようなことになろう．

この主題は，比較的“数学色”の強い問題ではあるが，数学の分野に於ては極く狭い範囲のものに過ぎない．その数少い主要な問題は，Kolmogorov や Doob を始めとして優秀な数学者達の手によって，1960 年頃まで殆んどが解決されて了った．残された問題は，Gihman [40, 41] や Schmid [86] 等の離散型分布の場合の議論を完全にすること，Geffroy [39] や Kiefer-Wolfowitz [56, 57] 等の結果は見られるが殆んど未解決の多次元化の問題等が考えられる．但し，これらは厄介な問題で早急に解決されそうではない．

未解決な問題となると，むしろ統計的なものの方が多い．統計的観点より本質的に究明した文献というと非常に数少い，強いてそれらを挙げるならば，Bell [3]，Birnbaum 等 [9] の“分布形に依らない統計量”といった特徴づけ，或は Aggarval [1]，Dvoretzky 等 [33] の経験分布函数という推定量の特徴づけ，更に検定力の下（上）限についての表現を与えた Birnbaum [5]，Chapman [18]，Massey [69]，Quade [78]，等の結果，精密な検定力を求めた筆者の結果 [99, 100]．life test への適用を計った Ishii の結果 [49] 位のものであろう．これで統計的な問題が出つくしたのであろうか．否，未だ重要なものが欠けている．与えられた対立仮説を見て，如何なる統計量が適しているか，又 D-統計量に限定しても，どのような境界が最適かを決める問題が，全く手掛けられていない．このような問題は，以前に Wald-Wolfowitz [106] や Birnbaum [4] 等によって提示されているのだが‥‥．かかる問題が解決される為には．パラメトリックな推論に於て展開された，一致性，十分性等の推定量の良否を決める統一的な判定規準とか，Neyman-Pearson 流の理論を，ノン・パラメトリックな立場より議論されなければなるまい．

このような大きな問題でなくとも，統計学的観点からすると，複合仮説の検定問題や種々の結果を実際により速く計算可能な形で表現するといった感じのものが，今後もかなり出る余地を残しているように思われる．この小報告が，今後この種の主題に興味を持たれ，更に研究を進めようとされる方々の一助ともなれば幸甚である．

最後に，この報告を作成するに際して，種々助言や議論をして戴いた当研究所の藤本熙氏，又，この主題の関連領域の報告作成に快諾された橋本・加地両君，更に文献の整理その他に種々協力戴いた平石嬢に謝意を表する次第である．

統計数理研究所

参 考 文 献

文献の番号の肩に「**」印の附してあるものは，適合度検定用の D-統計量の理論に関して本質的なもの，「*」印はやゝ本質的で証明その他に関してオリジナルなもの，更に「†」印は expository なものとか，引用文献数の多いものである．引用文献の雑誌名中次の略号を用いてある．

A. I. S. M. : Annals of the Institute of Statistical Mathematics
A. M. S. : Annals of Mathematical Statistics
J. A. S. A. : Journal of Americal Statistical Association

[1]* Aggarval. Om P., "Some minimax invariant procedures for estimating a cumultative distribution function", **A.M.S.** 26 (1955), 450–463.

[2]**Anderson, T.W. and Darling, D.A. "Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes", **A.M.S.** 23(1952), 193–212.

[3]* Bell, C.B., "On the structure of distribution-free statistics", **A.M.S.,** 31(1960), 703–709.

[4] Birnbaum, Z.W., "Distribution-free tests of fit for continuous distribution functions", **A.M.S.,** 24(1953), 1–8.

[5]**———, "On the power of a one-sided test of fit for continuous distribution functions", **A.M.S.,** 24(1953) 484–489.

[6] ———, "On the power of a distribution-free test of fit", **Proc. Inter. Congress of Math.** 2(1954), 278–279.

[7] ———, "Characterization of distribution-free statistics", **J.A.S.A.** 49(1954). 343–344.

[8] Birnbaum, Z.W. and Pyke R. "On some distributions related to the statistic D_n^+", **A.M.S.** 29(1958), 179–187.

[9]* Birnbaum, Z.W. and Rubin, H., "On distribution-free statistics", **A.M.S.,** 25 (1954), 593–598.

[10] Birnbaum, Z.W. and Schower, E. M., "On the power of a one-sided test of fit against stochastically comparable alternatives", **A.M.S.,** 25(1954), 619 (abstract).

[11]**Birnbaum, Z.W. and Tingey, F. "One-sided confidence contours for probability distribution functions", **A.M.S.,** 22(1951), 592–596.

[12]* Blackman, J., "An extension of the Kolmogorov distribution", **A.M.S.,** 27(1956), 513–520; 29, 318–324. (correction).

[13] Burke, G., "A uniform ergodic theorem" **A.M.S.,** 36(1965), 1853–1858.

[14] Butler, J.B. and McCarty, R.C., "A lower bound for the distribution of the statistic D_n^+", **Notices of Amer. Math. Soc.,** 7 (1960)., 80–81. (abstract).

[15]**Chang Li-Chien. "On the ratio of an empirical distribution function to the theoretical distribution function", **Acta Math. Sinica**, 5(1955), 347–368.

[16]* ———, "On the precise distribution of A.N. Kolmogorov and its asymptotic analysis", **Acta Math. Sinica,** 6(1956)., 55–81.

[17] ———, "Relvative positions of the empirical and theoretical distribution functions", **Academic Records of Peking Univ.,** 2(1956), 129–157.

[18]**Chapman, D.G. "A comparative study of several one-sdied goodness of fit tests", **A.M.S.,** 29(1958), 655–674.

[19] Cheng Ping, "Non-negative jump points of an empirical distribution function relative to a theoretical distribution function", **Acta Math. Sinica,** 8(1958), 333–347. (Selected Transl. 3, 205–224).

[20]* Chung, K.L., "An estimate concerning the Kolmogorov limit distribution", **Trans. Amer. Math. Soc.,** 67(1949), 36–50.

[21] Cramér, H., "On the composition of elementary errors", **Skand, Acruarietids 11**(1928), 141–180.

[22] Csörgő, Miklós, "Exact probability distribution function of some Rényi type statistics", **Proc. Amer. Math. Soc.,** 16(1965), 1158–1166.

[23] ——— "Some Rényi type limit theorems for empirical distribution function", **A.M.S.,**

36(1965), 322–326.

[24] Daniel, H.E. "The statistical theory of the strength of bundles of thread, I", **Proc. Roy. Stat. Asoc.,** 183(1945), 405–435.

[25] Darling, D.A., "On a class of problems related to the random division of an interval", **A.M.S.,** 24(1953), 239–253.

[26] ————, "The Cramér-Smirnov test in the parametric case", **A.M.S.,** 26(1955), 1–20.

[27]† ———— "The Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises test", **A.M.S.** 28(1957). 823–838.

[28]* ————, "On the theorems of Kolmogorov-Smirnov", **Theory Prob. Appl.** 5(1960), 356–361.

[29] David, H.T. "Order statistics and statistics of structure (d) " **A.M.S.,** 36(1965), 897–906.

[30]* Dempster, A.P., "Generalized D_n^+ statistics", **A.M.S.,** 30(1959), 593–597.

[31]* Donsker, M.D. "Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems", **A.M.S.,** 23(1952), 277–281.

[32]**Doob, J.L. "Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems", **A.M.S.,** 20(1949), 393–403.

[33]* Dvoretzky, A., Kiefer, J. and Wolfowtiz, J., "Asymptotic minimax character of the smaple distribution function and of the classical multinomial estimator", **A.M.S.**, 27(1956), 642–669.

[34] Dwass, M. "On several statistics related to empiricial distribution functions", **A.M.S.,** 29(1958), 188–191.

[35]* ————, "The distribution of a generalized D_n^+ statistics", **A.M.S.,** 30(1959), 1024–1028.

[36]* Feller, W. "On the Kolmogoroff-Smirnov limit theorems for empirical distributions", **A.M.S.** 19(1948), 177–180.

[37] Fortet, R. et Mourier, E., "Convergence de la repartition empirique vers la repartition theoretique", **Ann. Scient. Ec. Norm Sup**, 70, 3(1953), 267–285.

[38] Fraser, D.A.S., **Nonparametric methods in statistics,** John Wiley, New York (1957).

[39] Geffroy, Jean, "Sur un propriete de l'ecart maximum entre les fonctions de reparatition theorique et empirique d'un echantrillon de n points a deux dimensions", **Comptes Rendus** (Paris), 242(1956), 2282–2283.

[40] Gihman, I.I., "On a criterion of fit for discrete random variables", **Dopovidi Akad. Nauk Ukrain RSR** (1952), 7–9.

[41]* ———— "On the empirical distribution function in the case of grouping of the data", **Dokl. Akad. Nauk SSSR** 82(1952), 837–840 (Selected Transl. 1, 77–81).

[42] ————, "Limit theorems on empirical distribution functions", **Visnik, Kiersbkogo, Vniversitetu**, 1(1958), 13–29

[43] Gnedenko, B.V. and Mihalevic, V.S. "Two theorems on the behavior of empirical distribution functions", **Dokl. Akad. Nauk. SSSR**, 85(1952), 25–27.

[44]† Govindarajuru, Z., "A supplement to Mendehalls Bilbiography on life testing and related topies", **J.A.S.A.,** 59(1964), 1231–1291.

[45]† 橋本智雄, "Cramér-von Mises-Smirnov 型適合度検定について", **統計数理研究所彙報**, 15 (1967).

[46] 橋爪浅治, "分布函数とその経験分布函数の交点の数の平均値について", **数学**, 3 (1951), 50–52.

[47]* Hoeffding, W. and Rosenblatt, J., "The efficiency of tests", **A.M.S.,** 26(1955), 52–63.

[48] Ishii, Goro, "Test of fit in life test", **A.I.S.M.,** 9(1957), 117–125.

[49]* ————, "Kolmogorov-Smirnov test in life test", **A.I.S.M.,** 10(1958), 37–46.

[50]* ————, "On the exact probabilities of Rényi's tests", **A.I.S.M.,** 11(1959), 17–24.

[51]* Kac, M. "On deviations between theoretical and empirical distributions", **Proc. Nat. Acad. Sci.,** 35(1949), 252–257.

[52] Kac, M., Kiefer, J. and Wolfowitz, J., "On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods", **A.M.S.,** 26(1955), 189–211.

[53]† 加地紀臣男, "Kolmogorov-Smirnov の極限定理について", **統計数理研究所彙報**, 14 (1966)

[54]* Kemperman, J.H.B. "Some exact formulae for the Kolmogorov-Smirnov distributions",

Indag. Math., 19(1957), 535–540.

[55] Kiefer, J., "A functional equation technique for obtaining Wiener process probabilities associated with theorems of Kolmogorov-Smirnov type", **Proc. Camb. Phil. Soc.,** 55(1959), 328–332.

[56]* Kiefer, J. and Wolfowitz, J., "On the deviations of the empiric distribution function of vector chance variable", **Trans. Amer. Math. Soc.,** 87 (1958), 173–187.

[57] ————, "Asymptotic minimax character of the sample distribution function for vector chance variables", **A.M.S.,** 30(1959). 463–489.

[58] Kimball, B.F., "Some basic theorems for developing tests of fit for the case of non-parametric probability distribution functions", **A.M.S.,** 18(1947), 540–584.

[59]** Kolmogorov, A.N. "Sulla determinazone empirical delle leggi probabilita", **Giorn. Ist· Ital. Atturai,** 4(1933), 1–11.

[60] Korolyuk, V.S., "Asymptotic expansions for A.N. Kolmogorov's and N.V. Smirnov's criteria of fit", **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, 95, 3(1954), 443–446.

[61]† ————, "Asymptotic analysis of the distribution of the maximum deviation in the Bsenoulli scheme", **Theory of Prob. and Appl.** 4(1960), 339-366

[62] Kuiper, N.H., "Alternative proof of a theorem of Birnbaum and Pyke,", **A.M.S.,** 30(1959), 251–252.

[63] ————, "On the random cumulative frequency function", **Indag. Math.,** 22 (1960), 32–37.

[64]* ————, "Tests concerning random points on a circle", **Indag. Math.,** 22(1960), 38–47.

[65] Malmquist, S., "On certain confidence contours for distribution functions", **A.M.S.,** 25 (1954), 523–533.

[66]* Maniya, G.M. "Generalization of the criterion of A.N. Kolmogorov", **Doklady Akad. Nauk SSSR** (NS), 69(1949), 495–497.

[67] Marshall, A. "The small sample distribution of $\omega_n{}^2$", **A.M.S.,** 29(1958), 307–309.

[68] Massey, F.J., Jr., "A note on the estimation of distribution function by confidence limits," **A.M.S.,** 21(1950), 116–119.

[69]* ————, "A note on the power of a non-parametric test", **A.M.S.,** 21(1950), 440–443; 23, 637–638 (correction).

[70] ————, "The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit", **J.A.S.A.,** 46(1951), 68–78.

[71]* ————, "The distribution of the maximum deviation between two samples cumulative step functions", **A.M.S.,** 22(1951), 125–128.

[72]† Mendenhall, W., "A bibligoraphy on life testing and related topcis," **Biometrika** 45 (1958), 521–543.

[73] von Mises, R., **Wahrscheinlichkeitsrechnung**, Leipzig-Wien, (1931).

[74] Moran, P., "The random divisions of an intervals" **J. Roy. Stat. Soc., Suppl.** 9(1949), 92–98.

[75] Noether, G.E., "The efficiency of some distribution-free tests", **Statistica Neerlandica** 12 (1958), 63–73.

[76] Pearson, E.S. and Stephens, M.A., "The goodness-of-fit tests based on W_N and $U^2{}_N$", **Biometrika,** 49(1962), 397–402.

[77]* Pyke, R., "The supremum and infinimum of the Poisson process", **A.M.S.,** 30(1959) 568–576.

[78]* Quade, D. "On the asymptotic power of the one-sample Kolmogorov-Smirnov tests", **A.M.S.,** 36(1965), 1000–1018.

[79]** Rényi, A. "On the theory of order statistics", **Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,** 4(1953), 191–231. (English translation)

[80] Robbins, H., "On distribution-free tolerance limits in random sampling", **A.M.S.,** 15(1944), 214–216.

[81] ———— "An one-sided confidence interval for an unknown distribution function", **A.M.S.,**

25 (1954), 409 (abstract).

[82]* Rosenblatt, J. "Some modified Kolmogorov-Smirnov tests of approximate hypotheses and their properties", **A.M.S.,** 33(1962), 513–524.

[83] Sanov, I.N., "On the probability of large deviations", **Mat. Sb.**(N.S.) 42(84), (1957), 11–44.

[84]† Savage, I.R., "Bibliography on non-parametric statistics and related topics", **J.A.S.A.** 48(1953), 844–906.

[85]† ———, **Bibliography of non-parametric satistics,** Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, (1962).

[86]* Schmid, P. "On the Kolmogorov and Smirnov limit theorems" **A.M.S.,** 29(1958), 1011–1027.

[87] Sethuraman, J., "On the probability of large deviations of families of sample means", **A.M.S.,** 35(1964), 1304–1316.

[88] Sherman, B., "A random variable related to the spacing of sample values", **A.M.S.,** 21(1950), 339–361.

[89] Slakter, M.J., "A comparison of the Pearson Chi-square and Kolmogorov goodness-of-fit test with respect to validity" **J.A.S.A.,** 60(1965), 854–858.

[90] Smirnov, N.V., "Sur la distribution de ω^2", **Comptes Rendus,** (Paris), 202(1936), 449–452.

[91] ———, "On the distribution of the ω^2 criterion of von Mises", **Rec. Math.,** (NR), 2(1937), 973–993.

[92]** ———, "On the deviation of the empirical distribution function" **Rec. Math.** (NR) 6 (1939), 3–26.

[93]* ———, "On the estimation of the discrepancy between empirical distribution for two independent samples", **Bull. Math. Univ. Moscou,** 2(1939), fasc. 2, 3–14.

[94]* ———, "Approximation laws of distribution of random variables from empirical data", **Uspehi Matem. Nauk,** 10(1944), 179–206.

[95]† ———, "Probabilities of large values of nonparametric one-sided goodness of fit statistics," **Trudy Mat. Inst. Steklov,** 64(1961), 185–210.

[96] Stephens, M.A., "The distribution of the goodness-of-fit statistic $U^2{}_N$ I,II", **Biometrika** 50(1963), 303–313, 51, 393–397.

[97]* ———, "The goodness-of-fit statistic V_N: distribution and signfiicance points", **Biometrika** 52(1965), 309–321.

[98] Suzuki, G., "On the Glivenko-Cantelli theorem", **A.I.S.M.,** 18(1966), 29–37, 381 (Correction).

[99]*† ———, "On the exact probabilities of some generalized Kolmogorov's D-statistics" **Res. Memo.** No. 9(1966).

[100]* ———, "Kolmogorov-Smirnov tests of fit based on some general bounds", **Res. Memo.** No. 11(1966).

[101]* Takács, L., "On the distribution of the supremum for stochastic processes with interchangeable increments", **Trans. Amer. Math. Soc.** 119(1965), 367–379.

[102] ———, "The distributions of some statistics depending on the deviations between empirical and theoretical distribution functions", **Sankhya,** A 27(1965), 93–100.

[103] Tang, S.C., "Some theormes on the ratio of empirical distribution to the theoretical distribution", **Pacific J. Math.,** 12(1962), 1107–1114.

[104] Vandewiele, G. and Witte, P., "A test of goodness of fit", **Statistica Neerlandica,** 20(1966), 87–105.

[105] van der Waerden, B.L. "Testing a distribution function", **Indag. Math.,** 15(1953), 201–207.

[106]** Wald A. and Wolfowitz, J. "Confidence limits for continuous distribution functions", **A.M.S.,** 10(1939), 105–118; 12, 118–119 (correction).

[107]† Walsh J.E., **Handbook of non-parametric statistics,** I, II, van Nostrand Comp. (1962, 1965).

[108] Watson, G.S., "Goodness of fit tests on a circle, I,II", **Biometrika,** 48(1961), 109–114: 49, 57-63.

[109]* Whittle, P. "Some exact results for one-sided distribution tests of the Kolmogorov-Smirnov type", **A.M.S.,** 32(1961), 399–505.

[110] Wilks, S., **Mathematical statistics,** John Wiley, New York (1962).

[111] Wolfowitz, J., "Non-parametric statistical inference", **Berkeley Symposium** (1949), 93–113.