分枝輸送過程について

今　井　晴　男

(1967年4月受付)

On the Branching Transport Processes

Haruo Imai

As an example of the branching processes of moving particles, the neutron transport processes in the bounded convex domain D with the absorbing boundary in the three dimensional space R^3 are considered.

The collision probabilities, the numbers and velocity of particles produced by collision depend on the velocity v and position x.

The process is described by the numbers N (t, x, v) of particles in D at time t, under the condition that there was a single particle with velocity v and position x at time o.

An integral equation is developed by the usual method for the probability generating function $G^{\circ}(t, x, v, z)$ of the distribution of N (t, x, v). This equation is considered to define the generating function $G^{\circ}(t, x, s, z)$, and the existence and uniqueness of the solution are proved.

B.A. Sevast'janov (Teor. Verojat. 1958) considered the branching processes of diffusing particles. H.E. Conner (Journal SIAM. 1964) treated the age and position dependent branching processes of particles diffusing in the one dimensional interval, and obtained the same kinds of results as Sevast'janov and R. Ballman-T.E. Harris (Ann. of Math. 1952). In these cases the motion of particles is diffusion and the probability of a particle to be absorbed at the boundary within the time t is a continuous function of t. As a result the equation for the generating function has a unique continuous solution.

In the case of the transport processes however, a particle moves with a constant velocity, and at a definite time $\tau=\tau$ (x, v) it arrives at the boundary. So that at $t=\tau$ the probability of finding the initial particle in D decreases from a finte positive value to zero. This fact results in disconitinuties of the generating function, and the equation for G° (t, x, v, z) has no continuous solution.

The solution G° (t, x, v, z) however is prooved to be the sum of a step function in t and the unique continuous solution G (t, x, v, z) of the auxiliary equation.

The Institute of Statistical Mathematics

1. 3次元空間の有界で，とつな領域にある媒質の中を運動する1種類の粒子による分枝過程について，領域内にある粒子数の分布の母関数に関する方程式を導く．この方程式は，時刻について連続な解はもたないが，分布の母関数として要請される性質をみたす解が存在し，一意に決まることを証明し，その解からきまる分布の二，三の性質を調べるのが目的である．

ここで考えるのは，中性子輸送過程で，粒子は領域の中で生まれてから，媒質と衝突するまで，一定の速度で運動する．衝突によって，散乱，吸収および分裂が起こる．一つの粒子が衝突するまでの時間，分裂によって生まれる粒子の箇数の分布，および生まれた粒子の速度分布は，粒子の速度と位置に関係する．

吸収壁をもつ有界領域D内を拡散運動する粒子の分枝過程については，B. A. Sevast'janov [7, 8] などがある．この場合は，粒子の世代を考えることによって，本質的に，時刻が離散的な場合を扱っている．H. E. Conner [3] は，R. Bellman; T. E. Harris[1, 2] の年令に関係する分枝過程と，1次元区間での拡散運動を組み合せて，年令と場所に関係する分枝過程につ

いて，B. A. Sevast'janov や R. Bellman; T. E. Harris らと類似の結果を出している．

拡散運動する粒子の分枝過程では，粒子の運動と変形（分裂，消滅）は，独立なものとして扱われる．粒子の寿命の密度関数と，拡散運動の推移確率密度

$$f(t)=ce^{-ct},\quad p(x,y,t)$$

をもつとき，

$$\frac{\partial p}{\partial t}=D\Delta p\,;\quad p(x,y,0)=\delta(x-y)\,;\quad p(x,y,t)=0,\quad y\in\partial D$$

であるから，t 時間後に1つの粒子が D の中で消滅する確率

$$\int_D\int_0^t p(x,y,s)f(s)\,ds\,dy$$

は t の連続関数である．場所 x，時刻 t における分裂箇数の分布の母関数を $H(t,x,z)$ とすると，t 時間後の粒子数の分布の母関数 $G(t,x,z)$ は，つぎの方程式で与えられる．

$$G(t,x,z)=a(t,x)+z\,b(t,x)+\int_D\int_0^t H\bigl(s,y,G(t-s,y,z)\bigr)\cdot p(x,y,s)f(s)\,ds\,dy$$

$a(t,x)$ は，t までに境界に吸収される確率，$b(t,x)$ は時刻 t に D の中で運動を続けている確率である．

粒子の運動が拡散運動であることと，関数 $H(t,x,z)$ が連続という仮定から，この方程式は，t,x,z について連続な解 $G(t,x,z)$ をもつことが導かれる．

これにたいして，輸送過程は，拡散する粒子の分枝過程とつぎの点で異なる．拡散運動では，時刻までに境界に吸収される確率が，t の連続関数であるが，輸送過程では，粒子が有限の距離を直進するから，粒子が境界に到達する時刻は，位置 x と速度 v で一意に決まる．そのために t までに境界に吸収される確率は，t について，階段関数の形の不連続性をもつ．

ここで考えるのは，空間的に均質でない領域 D の中の輸送過程で，寿命の分布，分裂箇数の分布が，速度と場所に関係する．一つの粒子 xv（位置 x，速度 v）があるとき，t 時間後の粒子数の分布の母関数 $G^\circ(t,x,v,z)$ にたいして，つぎの関係が導かれる．

$$\begin{aligned}G^\circ(t,x,v,z)=&\int_0^t ds\,\chi(x+tv)\,h(s,x,v)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}q(x+tv,v,k)\cdot\\&\Bigl[\int_{R^3}du\bigl\{f(x+sv,v,u)\,G^\circ(t-s,\,x+sv,u,z)\bigr\}\Bigr]^k\\&+g^a(t,x,v,z)+g^b(t,x,v,z)\end{aligned}$$

ここに $\chi(\cdot)$ は D の定義関数で，b,f,q などは，z,x,t,v の連続関数である．g^a, g^b は t について，階段形の不連続関数である．

十分大きい $a>0$ を固定して $0\leq t\leq a$ で考えると，この形からわかるように，この方程式は t について連続な解をもたない．

拡散運動する粒子の場合と異って，この不連続性のために，拡散の場合と幾分異る取扱いが必要となる．$G^\circ(t,x,v,z)$ を，t について階段形の不連続関数と，補助方程式の連続な解の和に分けることによって，解の性質を明らかにすることができる．

2. 輸送過程はつぎのように記述することができる．R^3 の有界とつ領域 D の中を粒子が等速度で運動し，媒質と衝突して，吸収，散乱しまたは分裂が起こる，分裂によって何箇かの粒子が生まれ，それらの粒子が互に独立に，同じ規則にしたがって行動する．粒子が境界 ∂D に達すると，吸収され消滅する．粒子は衝突するまで，生まれたときの速度を保つ，時刻 $t=0$ に1つの粒子 xv があるとき，t における状態は，そのとき存在する粒子の速度と位置の分布で表わされるが，ここでは D の中の粒子の総数 $N(t,x,v)$ だけに限る．

複雑さをさけるために，散乱による速度変化，吸収による消滅も，分裂と同一視して，分裂によって新らしい粒子が1箇生まれ，または，分裂によって0箇の粒子が生まれると考える．このようにして，粒子の変形は，分裂だけであるとし，これと境界での消滅を考える．

後で使う記号をあげる．粒子の位置 $x\big(=(x_1, x_2, x_3)\big)$，速度 $v\big(=(v_1, v_2, v_3)\big)$ とする．粒子 xv の t 時間後の位置を $r(t)=x+tv$，領域 D と D^C の定義関数をそれぞれ $\chi(x)$，$\chi'(x)$ で表わす．粒子 xv が D の境界 ∂D に到達する時刻を $\tau(x, v)$ とする．

$$\tau(x, v)=\min\big(t\,;\ r(t)\in D^C\big)$$
$$\tau(t, x, v)=\min\big(t, \tau\ (x, v)\big)$$

粒子 xv が dt 時間に分裂を起こす確率を $c\ (x, v)dt+0(dt)$ とする．ここに $|v|^{-1}c\ (x, v)=c_0$ (x, v) は衝突の断面積である．時刻 t まで D の中で変形をうけない確率を $l\ (t, x, v)$ とし，$l(t, x, v)\ c\big(r(t), v\big)$ を $b(t, x, v)$ と書く．粒子 xv の分裂箇数の分布を $q(x, v, k)$ $(k=0, 1, 2\cdots\cdot)$，そのとき生まれた粒子の速度分布は，密度 $f(x, v, u)$ をもっとする．

これらの関数について，つぎの仮定をおく，

(a)　$c(x, v)$，$l(t, x, v)$，$q(x, v, k)$，$f(x, v, u)$

は非負で，変数 t, x, v, u について，$0\leq t\leq a$；$x\in\bar{D}=D+\partial D$，$v\in R^3$，$u\in R^3$ で連続かつ有界である．

(b)　$$\sum_{k=0}^{\infty} q(x, v, k)=1$$

$$\int du\, f(x, v, u)=1$$

$$\int_{|u|>n} du\, f(x, v, u)<n^{-\delta}\qquad(\delta>0)\quad(n\to\infty)$$

$$Q(x, v)=\sum_{k=0}^{\infty} k\, q(x, v, k)<M$$

$$c(x, v)\cdot(1+|v|)<M$$
$$b(t, x, v)<M$$

(c)　$$d\, l(t, x, v)=-l(t, x, v)\ c\big(r(t), v\big)\, d\, t+0(d\, t)$$

したがって，$c\big(r(t), v\big)=-\dfrac{1}{l\ (t, x, v)}\dfrac{\partial}{\partial t}l\,(t, x, v)$，　$b(t, x, v)=-\dfrac{\partial}{\partial t}l\,(t, x, v)$

$$l(t, x, v)=\exp\left[-\int_0^t c\big(r(s), v\big)\, d\, s\right],\quad l(o, x, v)=1$$

これらの関数は $x\in\bar{D}$ でだけ定義されているが，必要に応じ，$\bar{D}$ の外にも連続有界であるように拡張してあるとする．

3.　$t=0$ で D 内に1つの粒子 xv があるとき，時刻 t における D 内の粒子の箇数の分布 $p^\circ(t, x, v, n)$ $(n=0, 1, 2\cdots\cdot)$ を考えるのであるが，その分布の母関数

$$G^\circ(t, x, v, z)=\sum_{n=0}^{\infty} p^\circ(t, x, v, n)\, z^n\qquad|z|\leq 1$$

を考え，これがみたす非線形の積分方程式を導く．

時刻 t における状態は，(1)：0世代の粒子が D の中に存続するか，(2)：D の境界 ∂D に吸収されたか，(3)：D の中である時刻，$0\leq s<t$ で分裂を起こしたかのいずれかである．

この系で，t における粒子の総数を $N(t, x, v)$ で表わす．上の (1)，(2)，(3) が起こって，かつ $N(t, x, v)=n$ の確率をそれぞれ $p^a(t, x, v, n)$，$p^b(t, x, v, n)$ および $p^c(t, x, v, n)$ とする

$$p^\circ(t. x, v, n)=p^a(t. x, v, n)+p^b(t, x, v, n)+p^c(t, x, v, n)$$
$$p^a(t, x, v, n)=\delta_{1n}\, l\,(t, x, v)\,\chi\big(r(t)\big)\tag{1}$$
$$p^b(t, x, v, n)=\delta_{0n}\, l\big(\tau(x, v), x, v\big)\,\chi'\big(r(t)\big)\tag{2}$$

である．

時刻 t までに，D の中で衝突が起こる場合の分布 $p^c(t, x, v, n)$ は，最初の粒子が，時刻 s～$s+ds$ で分裂して，k 箇の粒子が生まれ，$N(t, x, v)=n$ となる確率を $k=0.1.2\cdots\cdot$ と ds について加えたものである．s～$s+ds$ で粒子 $r(s)v$ が分裂して生成する1箇の粒子によって，

時刻 t で n 箇の粒子ができる確率は

$$\int_{R^3} d\,u\, f\big(r(s), v, u)\big)\, p^\circ\big(t-s, r(s), u, n\big) \tag{3}$$

である．したがって k 箇の粒子によって n 箇となる確率は，

$$\Big[\int_{R^3} d\,u\, f\big(r(s), v, u\big)\, p^\circ\big(t-s, r(s), u, n\big)\Big]^{*k} \tag{4}$$

である．ここに $*k$ は分布の k 回重ね合わせで，$k=0$ にたいしては，δ_{0n} なる分布を表わすものとする．これからつぎの関係が成立つ．

$$p^c(t, x, v, n) = \int_0^t d\,s\,\chi\big(r(s)\big)\, b(s, x, v)\cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q\big(r(s), v, k\big)\Big[\int_{R^3} d\,u\, f\big(r(s), v, k\big)\, p^\circ\big(t-s, r(s), u, n\big)\Big]^{*k} \tag{5}$$

したがって $N(t, x, v)$ の分布は

$$p^\circ(t, x, v, n) = \int_0^t \chi\big(r(s)\big)\, b(s, x, v) \sum_{k=0}^{\infty} q\big(r(s), v, k\big)$$

$$\Big[\int_{R^3} d\,u\,\big\{f\big(r(s), v, u\big)\, p^\circ\big(t-s, r(s), u, n\big)\big\}\Big]^{*k}$$

$$+ p^a(t, x, v, n) + p^b(t, x, v, n) \tag{6}$$

をみたすと考えることができる．

4. 関数 p^a, p^b, p^c, p^0, q の母関数をつくる．

$$h(x, v, z) = \sum_{k=0}^{\infty} q(x, v, h)\, z^k$$

$$G^\circ(t, x, v, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p^\circ(t, x, v, n)\, z^n$$

$$g^a(t, x, v, z) = p^a(t, x, v, 1)\, z = z\, p^a(t, x, v)$$

$$g^b(t, x, v, z) = p^b(t, x, v, 0) = p^b(t, x, v)$$

$$G^c(t, x, v, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p^c(t, x, v, n)\, z^n$$

これらの関数 h, g^a, g^b は，単位円 $|z|\leq 1$ で z の連続関数，$|z|<1$ で正則で $|z|\leqq 1$ で有界である．k 回重ね合わせの母関数は，母関数の k 回の積であるから，(4)，(5) からつぎの方程式が導かれる．

$$g^a(t, x, v, z) = z\, l(t, x, v)\ \chi\big(r(t)\big) \tag{7}$$

$$g^b(t, x, v, z) = l\big(\tau(x, v), x, v\big)\, \chi'\big(r(t)\big) \tag{8}$$

$$G^\circ(t, x, v, z) = \int_0^t d\,s\,\chi\big(r(s)\big)\, b(s, x, v)\cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q\big(r(s), v, k\big)\Big[\int_{R^3} d\,u\,\big\{f\big(r(s), v, u\big)\, G^\circ\big(t-s, r(s), u, z\big)\big\}\Big]^k$$

$$+ g^a(t, x, v, z) + g^b(t, x, v, z) \tag{9}$$

この方程式 (9) の著しい特徴は，与えられた関数が $0\leq z\leq 1$ で非負で，$z=1$ いたいして，$\varphi(t, x, v) = G^\circ(t, x, v, 1)$ に関する方程式を

$$\varphi(t, x, v) = \int_0^t\int_{R^3} d\,s\,d\,u\,K(t, s, x, v, u)\ \varphi\big(t-s,\ r(s),\ u\big)$$

の形に書くとき，この核が，

$$\int_0^t\int_{R^3} d\,s\,d\,u\,K(t, s, x, v, u) = 1$$

をみたすことである．

5.　ここで考えている粒子系の状態をくわしく書き表わすためには，各時刻に存在する粒子の位置 x と速度 v を考え，ある時刻における状態は $S=\bigcup_n (R^3\times D)^n$ の中の点で表わさなければならないが，ここでは単に D の中の箇数だけを考え，上に導いた方程式 (9) によって $G^\circ(t,x,v,z)$ を定義したものと考え，$G^\circ(t,x,v,z)$ から決まる $I=\{0,1,2\cdots\}$ 上の確率分布 $p^\circ(t,x,v,n)\cdot\{0\leq t\leq a\}$ の族を考える．

$G^\circ(t,x,v,z)$ が I 上の確率分布の母関数であるためには，$0\leq z\leq 1$ で，$0\leq G^\circ(t,x,v,z)\leq 1$ $|z|\leq 1$ で $|G^\circ(t,x,z)|\leq 1$ かつ，$|z|<1$ で z の正規関数であることなどが要請される．したがって，(9) によって $N(t,x,v)$ の分布が，一意に定義されるためには，このような性質をみたす解 $G^\circ(t,x,v,z)$ が存在し，一意に決まることを示す必要がある．

方程式 (9) は，不連続な関数を含み，連続な解をもたないから，ふつうの，逐似近似の方法で解の存在と一意性を示す前に，その不連続な部分の取扱いに注意が必要である．g^a, g^b の形は (6)，(7) で与えられているから，$G^c(t,x,v,z)$ が求まれば，直ちに $G^\circ(t,x,v,z)$ が得られる．そこで，$G^c(t,x,v,z)$，$p^c(t,x,v,n)$ などを $G(t,x,v,z)$，$p(t,x,v,n)$ と書いて，(8)，(9) をつぎの形に書きかえる．

$$G^\circ(t,x,v,z)=G(t,x,v,z)+g^a(t,x,v,z)+g^b(t,x,v,z) \tag{10}$$

$$G(t,x,v,z)=\int_0^t ds\,\chi\big(r(s)\big)\,b(s,x,v)\,H\big(t-s,r(s),v,F\big) \tag{11a}$$

$$H\big(t-s,r(s),v,F\big)=\sum_{k=0}^{\infty}q\big(r(s),v,k\big)\,F^k\big(t-s,r(s),v,z\big) \tag{11b}$$

$$F\big(t-s,r(s),v,z\big)=z\,\Phi^a\big(t-s,r(s),v\big)+\Phi^b\big(t-s,r(s),v\big)+\Phi\big(t-s,r(s),v,z\big) \tag{11c}$$

$$\Phi\big(t-s,r(s),v.\,z\big)=\int du\,f\big(r(s),v,u\big)\,G\big(t-s,r(s),u,z\big) \tag{11d}$$

ただし

$$\Phi^a\big(t-s,r(s),v\big)=\int du\,f\big(r(s),v,u\big)\,\chi\big(r(s)+(t-s)u\big)\,l\big(t-s,r(s),u\big) \tag{12}$$

$$\Phi^b\big(t-s,r(s),v\big)=\int du\,f\big(r(s),v,u\big)\,\chi'\big(r(s)+(t-s)u\big)\,l\big(\tau(r(s),u),r(s),u\big) \tag{13}$$

分布 $p^\circ(t,x,v,n)$ は (9) で定義された母関数を z で展開したときの z の係数である．また $p(t,x,v,z)$ は t までに最初の粒子が分裂しかつ，$N(t,x,v)=n$ となる確率で，方程式 (11) の解の展開係数である．つぎに，方程式 (11) の解で，各変数について連続かつ，$|G(t,x,v,z)|\leq 1$ をみたし，$|z|<1$ で正則な解が一意にきまること，およびその展開係数が，非負であることなどを示す．

6.　はじめに二，三の定義をしておく．

$$\begin{aligned}
&S=\{z;\ |z|\leq 1\} && z \text{ は複素数}\\
&T=\{t;\ 0\leq t\leq a\} && a \text{ は定数}\\
&T_0=T-\{0\}\\
&\mathfrak{D}=T\times D\times R^3\times S\\
&\bar{\mathfrak{D}}_0=T_0\times\bar{D}\times R^3\times S\\
&\bar{\mathfrak{D}}=T\times\bar{D}\times R^3\times S
\end{aligned}$$

また A，A_1，A_2 などはある関数の上界を示す定数とする．

$\bar{\mathfrak{D}}$ 上の複素関数で，つぎの性質

(i)　$\mathfrak{D}\cup\bar{\mathfrak{D}}_0$ で (t,x,v,z) の連続関数

(ii)　$|z|<1$ で z の正則関数

をみたす $f(t,x,v,z)$ の作る線形空間に，$\bar{\mathfrak{D}}$ での一様収束のノルム

$$\|f\|=\sup\big\{|f(t,x,v,z)|\big\}$$

を与えた空間を E と書く，また $\bar{\mathfrak{D}}$ で連続な E の部分空間を $E_1\subset E$ とする．したがって E は完備である．

方程式 (11a), (11b), (11c), (11d) で定義される変換を T_h, T_g, T_f で表わし, $T=T_g \cdot T_h \cdot T_f$ とする.

$$G=TG,\ G=T_g H,\ H=T_h F,\ F=T_f G$$

E につぎの半順序を定義する: f、$f' \in E$ にたいし, $0 \leq z \leq 1$ で,

$$f(t,x,v,z) \leq f'(t,x,v,z)$$

のとき, $f \leq f'$ とする,

この定義からつぎの性質が成立つ,

(性質1)

(a) T_g, T_h, T_f したがって T は, E の部分集合 B:

$$B=\left\{f \in E;\ |f(t,x,v,z)| \leq 1-p^a(t,x,v)-p^b(t,x,v)\right\}$$

で定義され, E の半順序を保存する非線形写像である. この性質をもつ T を正であるという. ただし, $\Phi^a(t,x,v)$ が E に属することは (性質2) の結果による. $TB \subset B$ は (19) と同様に示される.

(b) $0 \leq z \leq 1$ において

$$0 \leq z\Phi^a(t,x,v)+\Phi^b(t,x,v) \leq l\left(\tau(t,x,v),x,v\right) < 1$$

(c) $\displaystyle\int_0^t ds\,\chi\left(r(s)\right) b(s,x,v)+l(t,x,v)\,\chi\left(r(t)\right)+l\left(\tau(x,v),x,v\right)\chi'\left(r(t)\right)=1$

上の (c) は, 左辺を

$$\int_0^t ds\,\chi\left(r(s)\right)\left[-\frac{\partial}{\partial s}l(s,x,v)\right]+l(t,x,v)\,\chi\left(r(t)\right)+l\left(\tau(x,v),x,v\right)\chi'\left(r(t)\right)$$

と書いてみれば, $t \geqq \tau(x,v)$ で $1-l\left(\tau(x,v),x,v\right)+l\left(\tau(x,v),x,v\right)=1$, また $t<\tau(x,v)$ では, $1-l(t,x,v)+l(t,x,v)=1$ となるからである.

$\Phi^a\left(t-s,r(s),v\right)$, $\Phi^b\left(t-s,r(s)v\right)$ が $t>s$ で (t,s,x,v) の連続関数であることを示すためにまず, つぎの性質を証明する.

(性質2) $$\Phi^a(t,x,v)=\int du\,f(x,v,u)\,l(t,x,v)\,\chi(x+tu)$$

は, $\overline{\mathfrak{D}}_0 \cup \mathfrak{D}$ でそれぞれの変数について連続である. $\Phi^b(t,x,v)$ も同じである.

(証明) v の連続関数であることはあきらかである. $\Phi^b(t,x,v)$ も同じであるから, Φ^a が, t と x について連続であることを示す. x について連続なことを示すために,

$$F(t,x,v,u)=f(x,v,u)\,l(t,x,v)$$

と書く,

$$\begin{aligned}\delta_x\Phi^a(t,x,v)&=\Phi^a(t,x',v)-\Phi^a(t,x,v)\\&=\int du\left[F(t,x,v,u)\,\chi(x'+tu)-F(t,x,v,u)\,\chi(x+tu)\right]\\&=\int du\left[\left\{F(t,x',v,u)-F(t,x,v,u)\right\}\cdot\left\{\chi(x'+tu)-\chi(x+tu)\right\}\right.\\&\quad+F(t,x,v,u)\cdot\left\{\chi(x'+tu)-\chi(x+tu)\right\}\\&\quad\left.+\left\{F(t,x',v,u)-F(t,x,v,u)\right\}\cdot\chi(x+tu)\right]\end{aligned}$$

$\chi(\cdot)$ 以外は連続であるから

$$\delta_x=\int du\,F(t,x,v,u)\left\{\chi(x'+tu)-\chi(x+tu)\right\}$$

が $x' \to x$ で0に収束することを示す.

(i) $t>0$ とする. x 空間 R^3 から速度空間 R^3 への等距離写像: $T_x y=y-x$

$$T_x:\ y=(y_1,y_2,y_3) \to u=(y_1-x_1,\ y_2-x_2,\ y_3-x_3)$$

による D の像 $V_x \subset R^3$ とする. $T_{x'}$ による D の像 $V_{x'}$ とする.

$$V_1=t^{-1}(V_{x'}-V_x)=\{t^{-1}u;\ u \in V_{x'}-V_x\}$$
$$V_2=t^{-1}(V_x-V_{x'})=\{t^{-1}u;\ u \in V_x-V_{x'}\}$$

とする. 時刻 0 に x, x' を出る粒子 xu と, $x'u$ について, D の境界に達する時刻が, $\tau(x,$

$u) > t$, $\tau(x', u) > t$ をみたすような $u \in R^3$ の集合が $t^{-1}V_{x'}$ $t^{-1}V_x$, であるから,

$$\delta_x = \int_{V_1} d\,u\,F(t, x, v, u) - \int_{V_2} d\,u\,F(t, x, v, u)$$

したがって

$$|\delta_x| \leq M^2 \int_{V_1} d\,u + M^2 \int_{V_2} d\,u = M^2 (\|V_1\| + \|V_2\|)$$
$$\leq 2\,M^2\,t^{-3}\,A\,|x - x'| \to 0 \qquad (A \text{ は } D \text{ の直径の } 2 \text{ 乗}) \tag{14}$$

ここに $\|V_1\|$ は V_1 の体積である. これで, x について連続が言えた.

(ii) $t=0$ での連続性は, $x, x' \in D$ なら

$$\chi(x' + t\,u) - \chi(x + t\,u) = 0$$

から言うまでもない.

t に関する連続性を示すには, 前と同じようにして,

$$\delta_t = \int d\,u\,F(t, x, v, u) \{\chi(x + t'\,u) - \chi(x + t\,u)\}$$

が $t' \to t$ で 0 に収束することを示せばよい.

(iii) $t > 0$ ならば, T_x による D の像 V_x, $V_t = t^{-1}V_x$, $V_{t'} = t'^{-1}V_x$ を考える. $t' \uparrow t$ のときも同じであるから, $t' \downarrow t$ とする. δ_t の積分は, 時刻 0 における粒子 xv にたいし, $t < \tau(x, u) \leq t'$ であるような u の範囲での積分と一致するから, $V_3 = V_t - V_{t'}$ 上での積分で与えられる.

$$|\delta_t| \leq M^2 \int_{V_3} d\,u = M^2 \|V_3\| = M^2 \|V_x\| (t^{-1} - t'^{-1}) \to 0\ (t' \to t) \tag{15}$$

(iv) $t=0$ での連続性は, $\varepsilon > 0$ を十分に小さくとって, $0 < t' < \varepsilon$ なる t' にたいし, $V_4 = R^3 - V_t$ での積分を考えればよい. $x \in D$ と境界 ∂D の距離

$$\rho = \min\{|x - y|\,;\, y \in \partial D\} > 0$$

とおけば, $u \in V_4$ にたいして, $|u| \geqq \rho\varepsilon^{-1}$ である. $f(x. v, u)$ の性質

$$\int_{|u| > n} d\,u\,f(x, v, u) < n^{-\delta}$$

によって, $\varepsilon \downarrow 0$ で,

$$\int_{V_4} d\,u\,f(x, v, u) \leq \int \varepsilon^{\delta}\,\rho^{-\delta} \to 0\,.$$

〔証明終〕

これを用いて, $\Phi^a(t-s, r(s), v)$, $\Phi^b(t-s, r(s), v)$ が $T_0 \times T_0 \times D \times R^3$ で (t, s, x, v) $(t > s)$ の連続関数であることが示される.

(性質 3)

$\Phi^a(t-s, r(s), v)$, $\Phi^b(t-s, r(s), v)$ は $T_0 \times T_0 \times D \times R^3$ で $(t > s)$ において連続である.

(証明) Φ^b も同じであるから, Φ^a の連続性を示す. また $r(s)$, $t-s$ が, t, s, x, v の連続関数であるから, $\Phi^a(t, x, v)$ が $\mathfrak{D}_0$ で連続であることを言えばよい.

$t, x, v, t > 0$ にたいしては, $|t - t'| \leq t/2$ をみたす t' は正である.

$$\delta\,\Phi^a = |\Phi^a(t', x', v') - \Phi^a(t, x, v)|$$
$$\leq |\Phi^a(t', x', v') - \Phi^a(t', x', v)| + |\Phi^a(t', x', v) - \Phi^a(t', x, v)|$$
$$+ |\Phi^a(t', x, v) - \Phi^a(t, x, v)|$$

$(t', x', v) \to (t, x, v)$ $(t' \geq t/2 > 0)$ のとき, 右辺第 1 項が 0 に行くことは, $\chi(x' + t'v')$ で, $|v' - v| < \varepsilon$, $|x' - x| < \varepsilon$, $|t - t'| < \varepsilon$ のはんいの t', x', v' にたいして, $x' + t'v'$ の動くはんいが, v' を固定して, $|x' - x| < \varepsilon + 2\,\varepsilon\,t$, $|t' - t| < \varepsilon$ を動くときの $x' + t'v$ の値の中に含まれるから, 第 2 項が, 0 に行くことを示せば同時に示されたことになる.

(14) で t を $\geqq t/2$ として,

$$|\delta_x| \leq 2\,M^2\,t^{-3}\,2^3\,A\,|x - x'|$$

により, 第 2 項は 0 に行く, 同様に第 3 項も (15) で, $|t' - t| < \varepsilon < t/2$ として, $|t^{-1} - t'^{-1}| \leq 2\,\varepsilon\,t^{-2}$ であるから,

$$|\delta_t| \leqq M^2 \| V_x \| \cdot 2\varepsilon t^{-2}$$

からしたがう．(証明終)

以上によって，$\Phi^a(t-s,\ r(s),\ v)$，$\Phi^b(t-s,\ r(s),\ v)$ が $T_0\times T_0\times \bar{D}\times R^3$ $(t>s)$ で連続であることがわかった．この結果により，(11b) の級数 $H(t-s,\ r(s),\ v,\ F)$ が一様に収束するから，G が $\bar{\mathfrak{D}}_0$ で連続ならば (11c) の F したがって H が $T_0\times T_0\times \bar{D}\times R^3$ $(t>s)$ で連続，$G(t,x,v,z)$ がその s についての積分として $\bar{\mathfrak{D}}$ で連続であることがわかる．

7.　以上の準備のもとに，つぎの結果が示される．

(結果1)

(a)　$G=G(t,\ x,\ v,\ z)$ に関する非線型方程式 (11) の解で，$B_1=B\cap E_1$ に属し，$0\leq z\leq 1$ で非負，$|z|\leq 1$ で

$$|G(t,\ x,\ v,\ z)| \leq 1-p^a(t,\ x,\ v)-p^b(t,\ x,\ v) \tag{16}$$

をみたすものが存在する

(b)
$$G(t,\ x,\ v,z)=\sum_{n=0}^{\infty} p(t,\ x,\ v,\ n)\, z^n \tag{17}$$

と展開したとき，係数 $p(t,\ x,\ v,\ n)$ が，各 n について，$(t,\ x,\ v)\in T\times \bar{D}\times R^3$ の非負連続関数にとれる．

(c)　B_1 の任意の $G_0(t,\ x,\ v,\ z)$ から

$$G_n(t,\ x,\ v,\ z)=T\,G_{n-1}(t,\ x,\ v,\ z)$$

によって定義した関数列 $\{G_n\}$ は，(11) の解に $\mathfrak{D}=T\times \bar{D}\times R^3\times S$ で一様に収束する．

(d)
$$G(t,\ x,\ v,\ 1)=1-p^a(t,\ x,\ v)-p^b(t,\ x,\ v) \tag{18}$$

をみたし，上の性質 (a)，(b) をもつ解が存在する．

(証明)　$G_0(t,\ x,\ v,\ z)\in B_1$ を任意にとって，

$$F_n(t,\ x,\ v,\ z)=T_f\,G_{n-1}(t,\ x,\ v,\ z)$$
$$H_n(t,\ x,\ v,\ z)=T_h\,F_n(t,\ x,\ v,\ z)=H(t,\ x,\ v,\ F_n)$$
$$G_{n+1}(t,\ x,\ v,\ z)=T_g\,H_n(t,\ x,\ v,\ z)$$

によってこれらの関数列を定義する．性質2により，G_n は $\bar{\mathfrak{D}}_0\cup\mathfrak{D}$ で連続である．

$|F_n|\leq 1$ ならばこの列は定義できる．T が正であるから，$0\leq z\leq 1$ にたいして

$$0\leq G_n\leq G_{n+1}\qquad (n=0,\ 1,\ 2\cdots)$$

である．さらに

$$G_n(t,\ x,\ v,\ z)+p^a(t,\ x,\ v)+p^b(t,\ x,\ v)\leq 1$$

はつぎのようにしてわかる．$n=0$ にたいして成立っているから，n まで仮定すると，

$$F_n(t,\ x,\ v,\ z)=z\,\Phi^a(t,\ x,\ v)+\Phi^b(t,\ x,\ v)+\int du\, f(x,\ v,\ u)\, G_n(t,\ x,\ u,\ z)$$
$$\leq \int du\, f(x,\ v,\ u)\,\big\{p^a(t,\ x,\ v)+p^b(t,\ x,\ v)-G_n(t,\ x,\ v,\ z)\big\}\leq 1$$

したがって $H_n(t,\ x,\ v,\ F_n)$ が定義できて，$|H_n|\leq 1$ である．

$$G_{n+1}(t,\ x,\ v,\ z)=\int_0^t ds\,\chi(x+sv)\; b(s,\ x,\ v)\; H_n(t-s,\ r(s),\ v,\ F_n)$$

において，性質1の (c) によって，

$$G_{n+1}(t,\ x,\ v,\ z)+p^a(t,\ x,\ v)+p^b(t,\ x,\ v)$$
$$\leqq \int_0^t ds\,\chi(x+sv)\, b(s,\ x,\ v)+p^a(t,\ x,\ v)+p^b(t,\ x,\ v)=1$$

となる．これから

$$0\leq G_n(t,\ x,\ v,\ z)\leq G_{n+1}(t,\ x,\ v,\ z)\leq 1-p^a(t,\ x,\ v)-p^b(t,\ x,\ v) \tag{19}$$

したがって，$0\leq z\leq 1$ にたいしては，G_n が n について増加列で有界であるから，$\bar{\mathfrak{D}}$ の各点 $(t,\ x,\ v,\ z)$ で $G_n(t,\ x,\ v,\ z)\uparrow G(t,\ x,\ v,\ z)$ が示された．

複素数 $|z|\leq 1$ にたいしては，

$$|G_n(t, x, v, z)| \leq G_n(t, x, v, 1)$$

であるから，$|z| \leq 1$ での収束だけ言えば，$0 \leq z \leq 1$ にたいする結果から，$|z| \leq 1$ で $|F_n| \leq 1$, $|G_n| \leq 1$ が成立ち，逐次近似列が定義できる．極限 G が (11) の解であること および $G \in E$ は，上の収束 $G_n \to G$ が，$\overline{\mathfrak{D}}$ で一様であることを示せば十分である．

$$\begin{aligned} &G_{n+1}(t, x, v, z) - G_n(t, x, v, z) \\ &= \int_0^t ds\, \chi(r(s))\, b(s, x, v)\, [H(t-s, r(s), v, F_n) \\ &\quad - H(t-s, r(s), v, F_{u-1})] \\ &= \int_0^t ds\, \chi(r(s))\, b(s, x, v)\, H'(t-s, r(s), v;\ \zeta) \cdot \\ &\quad [F_n(t-s, r(s), v, z) - F_{n-1}(t-s, r(s), v, z)] \end{aligned}$$

ここに，ζ は複素数 $|\zeta| \leq 1$ で，H' は ζ による微分を表わす．

$$\begin{aligned} &F_n(t-s, r(s), v, z) - F_{n-1}(t-s, r(s), v, z) \\ &\quad = \int du\, f(r(s), v, u)\, [G_n(t-s, r(s), u, z) - G_{n-1}(t-s, r(s), u, z)] \end{aligned}$$

で，関数 b, f, H' は有界 $\leq M$ であるから，

$$\begin{aligned} &|G_{n+1}(t, x, v, z) - G_n(t, x, v, z)| \leq A \int_0^t ds\, |G_n(t-s, r(s), v, z) \\ &\quad - G_{n-1}(t-s, r(s), v, z)| \\ &|G_1(t, x, v, z) - G_0(t, x, v, z)| < tA \end{aligned}$$

から，

$$|G_n(t, x, v, z) - G_{n-1}(t, x, v, z)| \leq \frac{t^n A^n}{n!} \leq \frac{(aA)^n}{n!}$$

である．すなわち，$\{G_n(t, x, v, z)\}$ は，E における基本列であるから，$G_n(t, x, v, z) \to G(t, x, v, z) \in E$ が示された．したがって，**6** の最後の注意により，$G \in E_1$ である．

G_n が正則であるから，

$$G_n(t, x, v, z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_n(t, x, v, k) z^k$$

と展開できる．この係数 $p_n(t, x, v, k)$ が，非負で，

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_n(t, x, v, k) \leq 1 - p^a(t, x, v) - p^b(t, x, v)$$

をみたすことは，帰納的に直ちにわかる．

$p_n(t, x, v, k)$ が，$\overline{\mathfrak{D}}$ で連続であることは，

$$k!\, p_n(t, x, v, k) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^k G_n(t, x, v, z) \right]_{z=0} = I_n k!$$

の積分表示

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{G_n(t, x, v, z)}{z^{k+1}}\, dz$$

から明らかである．

極限関数 $G(t, x, v, z)$ の展開係数が，非負連続で，(b) をみたすことは，

$$k!\, p(t, x, v, k) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^k G(t, x, v, z) \right]_{z=0} = I k!$$

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \lim_{n \to \infty} \frac{G_n(t, x, v, z)}{z^{k+1}}\, dz$$

において，E で $G_n(t, x, v, z) \to G(t, x, v, z)$ から，積分と極限が交換できて，$p(t, x, v, k)$ は，$\mathfrak{D}$ で連続で非負な関数 $p_n(t, x, v, k)$ の一様収束極限として，(b) をみたす．

(d) を示すには，逐次近以列の G_0 としてつぎの

$$G_0(t, x, v, z) = 1 - z p^a(t, x, v) - p^b(t, x, v)$$

から $G_n(t, x, v, z)$ を作れば，上の証明から

$$G_0(t, x, v, 1) = 1 - p^a(t, x, v) - p^b(t, x, v)$$

で，$G_n(t, x, v, z)$ が増加列で (16) をみたしているから明らかである．(証明終)

8. 合成積の形をした方程式で使われる一般な方法によって，(11) の解が B の中にただひとつであることが示される．

(結果2) 方程式 (11) の解 $G \in B$ は，ただ1つである．(この G は実は $B_1 = B \cap E_1$ の中にあることは明らか)．したがって，結果1の (c) による逐次近似が，唯一つの解 $G(t, x, v, z) \in B_1$ に $\mathfrak{D}$ で一様に収束する．この解は (16), (18) をみたす．

(証明) $G, G^* \in B_1$ が解であるとする．これから (11) で作った H, F などをそれぞれ H, H^*, F, F^* などと書く．

$$R(t, x, v, z) = |G(t, x, v, z) - G^*(t, x, v, z)|$$

とおくと，

$$|F(t, x, v, z) - F^*(t, x, v, z)| \leq \int du\, f(x, v, u)\, R(t, x, v, z)$$

$$\leq A \cdot R(t, x, v, z)$$

$$|H(t, x, v, F) - H(t, x, v, F^*)| \leq |H'(t, x, v, \zeta)| \,.$$

$$|F(t, x, v, z) - F^*(t, x, v, z)| \leq A_2 \cdot R(t, x, v, z)$$

したがって，

$$R(t, x, v, z) = |G(t, x, v, z) - G^*(t, x, v, z)| \leq A_3 \int_0^t ds \int_{R^3} du\, f(r(s), v, u)\, R(t-s, r(s), u, z)$$

である．これをみたす非負連続関数 $R(t, x, v, z)$ は0に限る．実際

$$\psi(n) = \sup \{e^{-nt} R(t, x, v, z)\} \,.$$

とおくと，$\psi(n)$ は $n>0$ で有界で

$$\psi(n) \leq A_3 \int_0^t ds \int_{R^3} du\, f(r(s), v, u)\, e^{-nt} R(t-s, r(s), u, z)$$

$$\leqq A_3 \psi(n) \int_0^t ds \int_{R^3} du\, f(r(s), v, u)\, e^{-ns}$$

したがって十分大きい n にたいして

$$\psi(n) = \sup \{e^{-nt} R(t, x, v, z)\} = 0$$

すなわち $R(t, x, v, z) = 0$ が示された．(証明終)

9. 以上によって，(11) が，B の中にただ1つの解をもつことがわかった．したがって，(9) で定義された $G^\circ(t, x, v, z)$ については，つぎの結果が成立つ．

(結果3) (a) $G^\circ(t, x, v, z)$ に関する方程式 (9) の解で，

$$G^\circ(t, x, v, z) = G(t, x, v, z) + g^a(t, x, v, z) + g(t, x, v, z), \quad G^\circ \in B$$

と表わせるものがただ一つ存在して，この G は (結果1) の (d) で定義された逐次近似で求められる．

(b) $G^\circ(t, x, v, z)$ は $|G^\circ(t, x, v, z)| \leq 1$ をみたし，$|z| < 1$ で z の正則関数で，$G^\circ - G$ は，t について，$t = \tau(x, v) = \tau$ において，

$$g^a(\tau - 0, x, v, z) - g^b(\tau + 0, x, v, z)$$

だけの jump をもち，それ以外は $\mathfrak{D}$ で連続である．

(c) $G^\circ(t, x, v, z)$ は，$G^\circ(t, x, v, 1) = 1$ をみたし，

$$G^\circ(t, x, v, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p^\circ(t, x, v, n) z^n \quad |z| \leq 1$$

と展開するとき，$p^\circ(t, x, v, z)$ は $n \geqq 2$ で，$(t, x, v, z) \in \mathfrak{D}$ の連続関数で，$p(t, x, v, z)$ と一

致し，$n=0$, 1にたいしては，

$$p^{\circ}(t, x, v, 1)=p(t, x, v, 1)+p^{a}(t, x, v)$$
$$p^{\circ}(t, x, v, 0)=p(t, x, v, 0)+p^{h}(t, x, v)$$

である．

この $p(t, x, v, n)$, $(n=0, 1)$ は $\mathfrak{D}$ で連続で，不連続部分 $p^{a}(t, x, v)$, $p^{h}(t, x, v)$ は，$t=\tau(x, v)$ でそれぞれ，$l(\tau, x, v)$ だけの jump をもつ．

おわりに第三研究部崎野室長におせわになったことを附記して感謝致します．

統計数理研究所

文　献

[1] R. Bellman; T.E. Harris: (1948) On the theory of age-dependent stochastic branching processes. Proc. Nat. Acad. Sc. 34, pp. 601-604.

[2] R. Bellman; T.E. Harris: (1952) On age-dependent binary branching processes. Ann. of Math. 55, pp. 280-295.

[3] H.E. Conner: (1964) Extinction probabilities for age-and position-dependent branching processes. Journal. SIAM. 12, pp. 899-909.

[4] T.E. Harris: (1951) Some mathematical models for branching processes. 2d Berk. Symp., pp. 305-328.

[5] T.E. Harris (1963) The theory of branching processes. Springer.

[6] B.A. Sevast'janov: (1951) The theory of branching random processes. Uspehi Mat. Nauk 6, pp. 47-99.

[7] B.A. Sevasti'janov: (1958) Branching stochastic processes for particles diffusing in a restricted domain with absorbing boundaries. Teor. Verojat. 3, pp. 121-136.

[8] B.A. Sevast'janov: (1961) The extinction conditions for branching processes with diffusion. Teor. Vervjat. 6, pp. 267-286.

[9] B.A. Sevast'janov: (1964) The age-dependent branching processes. Teor. Verojat. 9, pp. 577-594.

[10] L. Pál: (1958) On the theory of stochastic processes in nuclear reactors. Nuovo Cimento. 7, Ser 10. Suppl., pp. 25-42.