順位相関係数・順位の和に関する二，三の計算結果

高　橋　宏　一
駒　沢　　　勉

(1966年11月受付)

Some Numerical Results of Rank Correlations and the Ordered Component of Sum of Two Ranks.

Koiti TAKAHASI and Tsutom KOMAZAWA

Let $X=(X_1, \cdots, X_n)$ and $Y=(Y_1, \cdots, Y_n)$ be two random variables indepently, each being distributed with $N(\mu, \sum)$, where $\mu=(0, l, 2l, \cdots, (n-1)l)$ and $\sum=n\times n$ unit matrix. Let $Q=(Q_1, \cdots, Q_n)$ and $R=(R_1, \cdots R_n)$ be the ranks corresponding to X and Y respectively.

In § 2 we present the table of the expected rank correlations of Q and R, which were obtained by the Morte-Carlo method.

Let $(q_1, \cdots, q_n)$ and $(r_1, \cdots, r_n)$ be two random permutations of $(1, 2, \cdots, n)$. Let t_i be the i-th least component of $(q_1+r_1, q_2+r_2, \cdots, q_n+r_n)$, $i=1, 2, \cdots, n$. In § 3 the distibutions of t_1 are given.

Institute of Statistical Mathematics

§ 1. 要　約

かつて住宅各部の汚染・損耗の実態調査をおこない，その資料を解析したが，その調査では汚染や損耗の度合の測定は物理的な器具を使用できなかったため，調査員の観察と判断によっておこなわれた．したがって得られた資料の中には順位だけが与えられている種類のものも多かった．([1], [2], [3])．

そうした順位に関する資料を解析する際におこなった二，三の計算結果を示す．

§ 2 では n 次元正規分布 $N(\mu, \sum)$（ただし，$\mu=(0, l, 2l, \cdots, (n-1)l)$，$\sum$ は単位行列）からの独立な二組のサンプルがとられたときのそれぞれの順位統計量の間の順位相関係数の平均と分散を $l=0, 0.1, 0.2, \cdots, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$（他にいくつか）$n=2, 3, \cdots, 20$ の組み合わせに対してモンテカルロ法で調べた結果が述べられる．

§ 3 では，$(1, 2, \cdots, n)$ の $n!$ 個の置換が $1/n!$ の確率をもつ分布から独立にとられた二つの置換の和の最小成分の分布について論ずる．

§ 2. あるモデルでの順位相関係数

n 個の対象についての m 個の順位が与えられたとき，次のようなモデルを考えることができる．ひとつの順位は $N(\mu, \sum)$，($\mu=(0, l, 2l, \cdots, (n-1)l)$，$\sum$ は $n\times n$ の単位行列）からのサンプル $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を順位 $(R_1, \cdots, R_n)$，（小さい成分から大きいものへ順に $1, 2, \cdots, n$)，に直して出て来たものと考える．ここではもとの分布が正規分布（連続分布）だから同順位は起らないと考えてよい． m 個の順位は，それぞれ独立にとられたサンプルに対応してい

る順位である．このようなモデルは例えば [4] でもっと一般な型でもちいられている．

ここでは，このようなモデルにおける二つの順位の順位相関係数を考察する．$N(\mu,\sum)$ から独立にとられた二組のサンプルを $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$，それぞれに対応する順位統計量を $(R_1, \cdots, R_n)$，$(Q_1, \cdots, Q_n)$ とし，

$$r=1-\frac{6\sum_{j=1}^{n}(R_j-Q_j)^2}{n^3-n}$$

とおく．この r の分布の平均 ρ や分散 σ^2 をモンテカルロ法で調べてみる．

結果を述べるに先立って，これらを調べることの意義に触れておく．n 個の対象に対してつけられた m 個の順位が実際に得られたとする．そのとき，それらの順位付けが上述のモデルで説明された機構にしたがって行なわれていると仮定する．いま l が同一としても n が大なるほど平均的に r は大きいことは容易に考えられる．こうした意味での n の影響を考慮することが現在のモデルのような立場での順位相関係数の値の解釈にとって必要である．ところで ρ の推定量としては m 個の順位のあらゆる二つづつの組み合わせに対して計算した順位相関係数の算術平均が考えられる．ρ の推定値が得られたときに，n と l のいろいろな値に対してのモデルにしたがって計算された ρ の数値の表があれば，n は既知であるからその表で ρ に r を代用して逆に l の一つの推定値を見出せる．この操作を経るならば順位相関係数の数値の解釈にとって一つの具体的な image をもつことが出来る．

次にモンテカルロ法で ρ と σ^2 を計算した手順を簡単に説明する．使用した計算機は TSK III 電子計算機（統計数理研究所）である．

i) 正規乱数 $N(0,1)$ を作る：

ディジタル乱数発生器から2進 12 桁の一様乱数を作り出して，Box & Muller の Direct Method で標準正規乱数を作る．すなわち，

$$X_1=(-2\log U_1)^{\frac{1}{2}}\cos 2\pi U_2$$
$$X_2=(-2\log U_1)^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi U_2$$

によって，二つの正規乱数 X_1, X_2 を計算する．ただし，U_1, U_2 は一様乱数である．このような繰返し演算によって磁気テープ記憶装置に約 12,000 ケの正規乱数を作り上げておく．

ii) 順位統計量を作り，r の平均と標準偏差を求める：

(1) まず，i) で作った正規乱数 20 ケを一組として二組の乱数 $(a_1, a_2, \cdots, a_{20})$，$(b_1, b_2, \cdots, b_{20})$ を取り出す．

(2) $$\begin{array}{l} X_k=a_k+(k-1)l \\ Y_k=b_k+(k-1)l \end{array} \quad (k=1, \cdots, 20)$$

なる置換をほどこし，$N((k-1)l, 1)$ にそれぞれしたがう確率変数の組み

$$(X_1, \cdots, X_{20}),\ (Y_1, \cdots, Y_{20})$$

を作る．

(3) $(X_1, \cdots, X_n)$，$(Y_1, \cdots, Y_n)$ から順位統計量，$(R_1, \cdots, R_n)$，$(Q_1, \cdots, Q_n)$; $n=2, 3, \cdots, 20$ を作る．すなわち，はじめに (X_1, X_2) を小さい順に並べかえた組 (Z_1, Z_2) をつくっておく．同時に (X_1, X_2) の小さい順に自然数 1，2 を与え順位 (R_1, R_2) を記録する．(Y_1, Y_2) に対しても同様な操作をおこない順位 (Q_1, Q_2) を作り出し，そのときの r を計算する．次に，X_3 をもってきて (Z_1, Z_2) の大小順のどこに位置するか調べ新しい (Z_1, Z_2, Z_3) を作る．同時に X_3 に対応する順位を R_3 とし，前の R_1，R_2 のうち R_3 以上のものには 1 をたして新しく (R_1, R_2, R_3) を作る．同様に (Q_1, Q_2, Q_3) を作りここで r を計算する．一般に $n=k-1$ まで操作が終っているとき，そこで作られている $(Z_1, \cdots, Z_{k-1})$ と X_k を比較して R_k を定め

第1表 順位相関係数の期待値の推定値

l \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0.018 □ −0.004	−0.002 □ 0.019 □ 0.018	−0.005 □ 0.003	−0.004 □ −0.012	−0.001 □ 0.009	−0.007	−0.011 □ 0.012	−0.010	−0.007 □ 0.003	−0.010	−0.005	−0.004	−0.002	−0.003	−0.002	−0.002	−0.004	−0.007	−0.006 □ 0.004
0.1	0.042 △ −0.080 △ 0.100	0.017 △ −0.065 △ 0.025	0.033 △ −0.016 △ 0.020	0.034 △ −0.013 △ 0.013	0.045 △ 0.024 △ 0.038	0.060 △ 0.034 △ 0.048	0.068 △ 0.030 △ 0.073	0.078 △ 0.030 △ 0.082	0.084 △ 0.067 △ 0.095	0.092 △ 0.097 △ 0.120	0.122 △ 0.102 △ 0.128	0.127 △ 0.126 △ 0.148	0.148 △ 0.149 △ 0.163	0.160 △ 0.172 △ 0.180	0.179 △ 0.175 △ 0.201	0.199 △ 0.210 △ 0.215	0.217 △ 0.220 △ 0.233	0.238 △ 0.248 △ 0.248	0.257 △ 0.277 △ 0.270
0.125									□ 0.103										
0.2	−0.014 △ −0.020 △ −0.020 △ −0.060	0.034 △ 0.045 △ 0.055 △ −0.030	0.051 △ 0.102 △ 0.048 △ 0.034	0.079 △ 0.133 △ 0.090 △ 0.071	0.114 △ 0.170 △ 0.121 △ 0.107	0.144 △ 0.184 △ 0.191 △ 0.128	0.174 △ 0.189 △ 0.229 △ 0.131	0.211 △ 0.219 △ 0.255 △ 0.163	0.250 △ 0.260 △ 0.290 △ 0.216	0.286 △ 0.286 △ 0.316 △ 0.273	0.327 △ 0.326 △ 0.362 △ 0.308	0.367 △ 0.355 △ 0.405 △ 0.347	0.402 △ 0.407 △ 0.432 △ 0.388	0.435 △ 0.442 △ 0.469 △ 0.431	0.469 △ 0.482 △ 0.492 △ 0.458	0.499 △ 0.510 △ 0.521 △ 0.496	0.529 △ 0.533 △ 0.550 △ 0.520	0.557 △ 0.564 △ 0.581 △ 0.554	0.584 △ 0.595 △ 0.606 △ 0.585
0.25	□ 0.008	□ 0.049 □ 0.025	□ 0.081	□ 0.101	□ 0.171				□ 0.341										
0.3	−0.014	0.054	0.126	0.170	0.214	0.270	0.335	0.379	0.434	0.479	0.529	0.565	0.605	0.637	0.669	0.696	0.722	0.743	0.764
0.375									□ 0.562										
0.4	0.030 △ 0.040	0.100 △ 0.175	0.196 △ 0.236	0.260 △ 0.281	0.336 △ 0.381	0.399 △ 0.425	0.469 △ 0.485	0.526 △ 0.530	0.583 △ 0.580	0.627 △ 0.620	0.673 △ 0.665	0.704 △ 0.695	0.738 △ 0.733	0.763 △ 0.763	0.788 △ 0.789	0.808 △ 0.811	0.826 △ 0.827	0.841 △ 0.845	0.855 △ 0.859
0.45	0.080	0.147	0.213	0.293															
0.5	0.090 △ 0.120 □ 0.048	0.124 △ 0.165 □ 0.193 □ 0.189	0.236 △ 0.252 □ 0.255	0.343 △ 0.358 □ 0.331	0.436 △ 0.442 □ 0.458	0.515 △ 0.543	0.587 △ 0.608 □ 0.587	0.647 △ 0.675	0.696 △ 0.722 □ 0.697	0.736 △ 0.757	0.771 △ 0.786	0.799 △ 0.897	0.821 △ 0.828	0.841 △ 0.847	0.858 △ 0.863	0.872 △ 0.875	0.885 △ 0.886	0.895 △ 0.896	0.904 △ 0.905 □ 0.901
0.55	0.080	0.179	0.307	0.406															
0.6	0.110 △ 0.040	0.213 △ 0.240	0.341 △ 0.342	0.436 △ 0.495	0.536 △ 0.597	0.614 △ 0.675	0.680 △ 0.727	0.730 △ 0.762	0.771 △ 0.797	0.801 △ 0.822	0.829 △ 0.844	0.848 △ 0.863	0.867 △ 0.879	0.882 △ 0.893	0.895 △ 0.901	0.906 △ 0.910	0.915 △ 0.918	0.923 △ 0.926	0.930 △ 0.933
0.625									□ 0.780										
0.7	0.122 △ 0.160	0.267 △ 0.240	0.401 △ 0.386	0.523 △ 0.509	0.621 △ 0.613	0.692 △ 0.682	0.750 △ 0.746	0.794 △ 0.786	0.828 △ 0.821	0.853 △ 0.848	0.873 △ 0.867	0.889 △ 0.885	0.903 △ 0.902	0.914 △ 0.914	0.923 △ 0.923	0.931 △ 0.932	0.938 △ 0.938	0.943 △ 0.945	0.949 △ 0.949
0.725	0.134	0.297	0.436	0.554															
0.75	0.186 □ 0.106	0.324 □ 0.264 □ 0.298	0.464 □ 0.454	0.568 □ 0.553	□ 0.664				□ 0.838										
0.775	0.204	0.348	0.475	0.579															
0.8	0.226 △ 0.160	0.359 △ 0.280	0.513 △ 0.438	0.615 △ 0.546	0.696 △ 0.640	0.759 △ 0.727	0.804 △ 0.785	0.838 △ 0.824	0.863 △ 0.856	0.884 △ 0.876	0.901 △ 0.893	0.914 △ 0.909	0.926 △ 0.922	0.934 △ 0.932	0.942 △ 0.940	0.948 △ 0.946	0.953 △ 0.952	0.958 △ 0.956	0.961 △ 0.959
0.85	0.214	0.371	0.534	0.648	0.730	0.788	0.828	0.857	0.880	0.898	0.913	0.925	0.935	0.943	0.949	0.955	0.959	0.963	0.966
0.9	0.222 0.250 0.216 0.290 0.260 0.200 △ 0.280	0.390 0.407 0.400 0.406 0.392 0.380 △ 0.380	0.542 0.566 0.553 0.567 0.548 0.553 △ 0.546	0.664 0.669 0.664 0.665 0.667 0.669 △ 0.635	0.746 △ 0.727	0.800 △ 0.791	0.839 △ 0.841	0.868 △ 0.873	0.890 △ 0.893	0.907 △ 0.912	0.921 △ 0.926	0.932 △ 0.935	0.941 △ 0.942	0.948 △ 0.949	0.954 △ 0.955	0.958 △ 0.961	0.963 △ 0.964	0.966 △ 0.968	0.969 △ 0.971
0.925	0.272	0.417	0.570	0.685															
0.95	0.256	0.416	0.577	0.682															
1.0	0.272 △ 0.300 □ 0.274	0.447 △ 0.515 □ 0.430 □ 0.479	0.596 △ 0.618 □ 0.612	0.707 △ 0.751 □ 0.717	0.780 △ 0.817 □ 0.776	0.828 △ 0.852	0.864 △ 0.885 □ 0.861	0.891 △ 0.904	0.910 △ 0.921 □ 0.909	0.924 △ 0.933	0.935 △ 0.943	0.944 △ 0.951	0.951 △ 0.957	0.957 △ 0.962	0.962 △ 0.965	0.967 △ 0.969	0.970 △ 0.972	0.973 △ 0.975	0.975 △ 0.977 □ 0.975
1.25	□ 0.396	□ 0.567 □ 0.573	0.746	□ 0.816	□ 0.858				□ 0.942										
1.5	0.550 △ 0.500 □ 0.496	0.720 △ 0.725 □ 0.671 □ 0.698	0.825 △ 0.824 □ 0.803	0.879 △ 0.867 □ 0.866	0.910 △ 0.905 □ 0.905	0.930 △ 0.921	0.945 △ 0.937 □ 0.943	0.955 △ 0.949	0.963 △ 0.957 □ 0.961	0.969 △ 0.965	0.973 △ 0.970	0.977 △ 0.975	0.980 △ 0.978	0.983 △ 0.981	0.985 △ 0.983	0.986 △ 0.985	0.988 △ 0.987	0.989 △ 0.988	0.990 △ 0.989
1.75	□ 0.582	□ 0.758 □ 0.768	□ 0.859	□ 0.903	□ 0.933														
2.0	0.682 △ 0.660 □ 0.680	0.843 △ 0.815 □ 0.845 □ 0.837	0.903 △ 0.892 □ 0.893	0.935 △ 0.931 □ 0.934	0.953 △ 0.951 □ 0.954	0.965 △ 0.963	0.972 △ 0.972 □ 0.972	0.978 △ 0.978	0.982 △ 0.982 □ 0.981	0.985 △ 0.985	0.988 △ 0.987	0.989 △ 0.989	0.991 △ 0.990	0.992 △ 0.991	0.993 △ 0.992	0.994 △ 0.993	0.994 △ 0.994	0.995 △ 0.995	0.995 △ 0.995
2.5	□ 0.838	□ 0.919 □ 0.912	□ 0.953	□ 0.968	□ 0.976		□ 0.987		□ 0.992										
3.0	□ 0.898	□ 0.962 □ 0.959	□ 0.981	□ 0.986	□ 0.990		□ 0.994		□ 0.996										

註： △印は 100 回の繰り返し，その他は 1,000 回の繰り返しの結果であり，□印のついたものは n がちがうごとに新しい乱数をつかって計算したものである．

第2表　順位相関数の標準偏差の推定

l \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	1.000	0.701	0.574	0.504	0.441	0.402	0.378	0.359	0.339	0.316	0.298	0.281	0.270	0.257	0.253	0.249	0.241	0.235	0.226
0.1	0.999	0.705	0.580	0.498	0.445	0.404	0.377	0.344	0.333	0.318	0.298	0.283	0.270	0.259	0.249	0.237	0.228	0.217	0.207
	△ 0.997	△ 0.733	△ 0.571	△ 0.510	△ 0.449	△ 0.390	△ 0.355	△ 0.348	△ 0.332	△ 0.327	△ 0.308	△ 0.292	△ 0.277	△ 0.253	△ 0.249	△ 0.239	△ 0.230	△ 0.214	△ 0.205
	△ 0.995	△ 0.716	△ 0.577	△ 0.471	△ 0.432	△ 0.389	△ 0.363	△ 0.359	△ 0.316	△ 0.298	△ 0.298	△ 0.288	△ 0.270	△ 0.251	△ 0.239	△ 0.241	△ 0.237	△ 0.230	△ 0.219
0.2	1.000	0.717	0.571	0.497	0.435	0.390	0.359	0.320	0.307	0.286	0.266	0.245	0.228	0.207	0.195	0.182	0.167	0.152	0.141
	△ 1.000	△ 0.648	△ 0.521	△ 0.462	△ 0.436	△ 0.407	△ 0.377	△ 0.359	△ 0.334	△ 0.324	△ 0.288	△ 0.272	△ 0.235	△ 0.212	△ 0.190	△ 0.167	△ 0.161	△ 0.148	△ 0.134
	△ 1.000	△ 0.671	△ 0.539	△ 0.475	△ 0.457	△ 0.399	△ 0.360	△ 0.355	△ 0.314	△ 0.298	△ 0.266	△ 0.257	△ 0.239	△ 0.205	△ 0.192	△ 0.179	△ 0.158	△ 0.141	△ 0.130
	△ 0.998	△ 0.710	△ 0.581	△ 0.522	△ 0.471	△ 0.412	△ 0.365	△ 0.311	△ 0.322	△ 0.298	△ 0.261	△ 0.245	△ 0.219	△ 0.197	△ 0.184	△ 0.167	△ 0.152	△ 0.141	△ 0.134
0.3	1.000	0.694	0.566	0.479	0.432	0.377	0.332	0.298	0.263	0.232	0.205	0.179	0.161	0.145	0.130	0.118	0.105	0.095	0.084
0.4	0.999	0.694	0.563	0.452	0.397	0.339	0.292	0.243	0.207	0.179	0.152	0.130	0.114	0.100	0.084	0.077	0.063	0.063	0.055
	△ 0.999	△ 0.672	△ 0.519	△ 0.455	△ 0.379	△ 0.339	△ 0.292	△ 0.257	△ 0.228	△ 0.197	△ 0.161	△ 0.145	△ 0.118	△ 0.105	△ 0.089	△ 0.077	△ 0.071	△ 0.055	△ 0.055
0.45	0.997	0.695	0.556	0.454															
0.5	0.996	0.701	0.545	0.437	0.358	0.295	0.239	0.197	0.161	0.134	0.110	0.095	0.077	0.071	0.063	0.055	0.045	0.045	0.032
	△ 0.993	△ 0.675	△ 0.487	△ 0.418	△ 0.335	△ 0.274	△ 0.239	△ 0.200	△ 0.164	△ 0.134	△ 0.114	△ 0.100	△ 0.077	△ 0.063	△ 0.055	△ 0.045	△ 0.045	△ 0.045	△ 0.032
0.55	0.997	0.688	0.519	0.405															
0.6	0.994	0.669	0.503	0.404	0.319	0.251	0.197	0.155	0.122	0.105	0.084	0.071	0.063	0.055	0.045	0.045	0.032	0.032	0.032
	△ 0.999	△ 0.681	△ 0.509	△ 0.332	△ 0.261	△ 0.212	△ 0.176	△ 0.148	△ 0.118	△ 0.089	△ 0.077	△ 0.071	△ 0.055	△ 0.045	△ 0.045	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.032
0.7	0.992	0.666	0.504	0.377	0.270	0.202	0.155	0.122	0.095	0.077	0.063	0.055	0.045	0.032	0.032	0.032	0.032	0.000	0.000
	△ 0.987	△ 0.681	△ 0.482	△ 0.341	△ 0.249	△ 0.192	△ 0.141	△ 0.114	△ 0.089	△ 0.071	△ 0.063	△ 0.055	△ 0.045	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.000	△ 0.000
0.725	0.981	0.659	0.472	0.349															
0.75	0.972	0.625	0.448	0.335															
0.775	0.979	0.625	0.439	0.318															
0.8	0.974	0.640	0.413	0.302	0.219	0.161	0.126	0.095	0.077	0.063	0.055	0.045	0.032	0.032	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000
	△ 0.987	△ 0.665	△ 0.450	△ 0.336	△ 0.243	△ 0.170	△ 0.122	△ 0.089	△ 0.071	△ 0.063	△ 0.045	△ 0.045	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000
0.85	0.977	0.632	0.407	0.283	0.200	0.148	0.110	0.084	0.071	0.055	0.045	0.032	0.032	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.000
0.9	0.975	0.622	0.412	0.276															
	0.968	0.602	0.399	0.274															
	0.976	0.601	0.404	0.286															
	0.957	0.603	0.382	0.277															
	0.965	0.615	0.412	0.279															
	0.980	0.612	0.394	0.265	0.184	0.139	0.100	0.077	0.063	0.055	0.045	0.032	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	△ 0.950	△ 0.637	△ 0.427	△ 0.295	△ 0.200	△ 0.141	△ 0.105	△ 0.077	△ 0.063	△ 0.045	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000
0.925	0.962	0.599	0.400	0.266															
0.95	0.966	0.600	0.386	0.272															
1.0	0.962	0.589	0.386	0.249	0.173	0.122	0.095	0.071	0.055	0.045	0.032	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	△ 0.954	△ 0.567	△ 0.366	△ 0.205	△ 0.145	△ 0.118	△ 0.084	△ 0.063	△ 0.055	△ 0.045	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000
1.5	0.835	0.401	0.210	0.130	0.084	0.063	0.045	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	△ 0.866	△ 0.360	△ 0.207	△ 0.138	△ 0.084	△ 0.084	△ 0.063	△ 0.045	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000
2.0	0.731	0.276	0.138	0.084	0.055	0.032	0.032	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	△ 0.741	△ 0.311	△ 0.161	△ 0.105	△ 0.063	△ 0.045	△ 0.032	△ 0.032	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000	△ 0.000

註：△印のついたものは標本の大きさ 100 である．

る．すなわち $Z_{k-i}-X_k$ の正負判定により次の操作をおこなう．

（a） $Z_{k-i}-X_k>0$ であれば Z_{k-i} を $k-i+1$ 番目に移行し，i を進める．（ただし；$i=1, \cdots, k-1$）

もし，$Z_{k-i}-X_k\leqq 0$ であれば X_k を $k-i+1$ 番目に位置ずけして次の操作に移る．

（b） 新しい $(R_1, R_2, \cdots, R_k)$ は次のように定める．

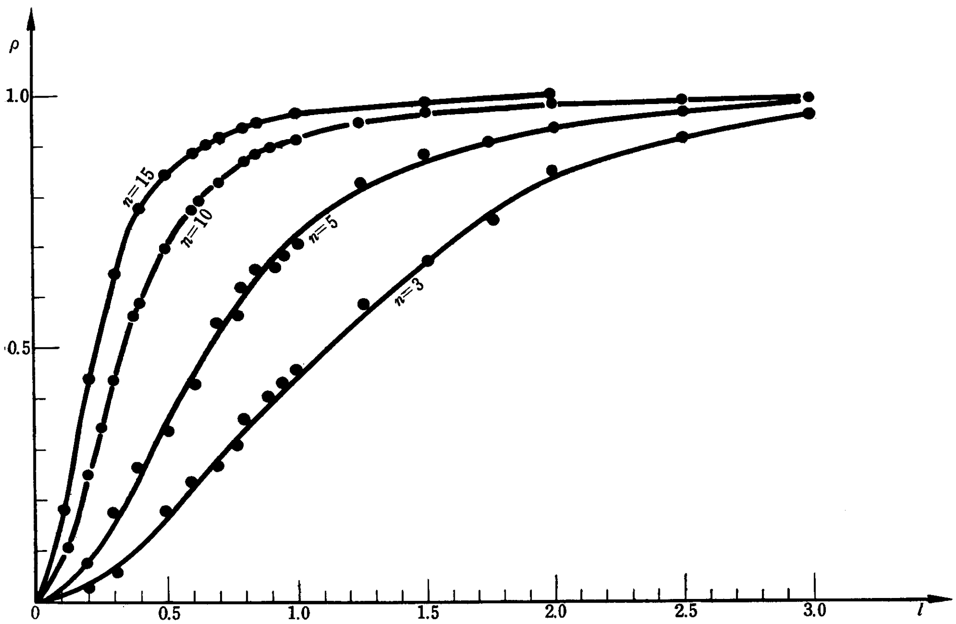
$R_k=k-i+1$ を与え，$R_j-R_k>0$ なる R_j; $j=1, 2, \cdots, k-1$ に対しては 1 を加える．

他組も同様な操作をして 順位統計量 $(Q_1, \cdots, Q_k)$ を求めて，r の計算をする．（r_k で表わす）．

（4） 平均値と標準偏差の計算の準備

平均値と標準偏差を求めるために，あらかじめ手順 (3) で求まった r_k の和と自乗和を計算しておく．$k=20$ まで手順 3) と 4) を繰返しては手順 1) にもどる操作を何回か繰返す．実際には $l=0.1(0.1)1.0, 1.5, 2.0$ の l に対して 1000 回の繰返しを 行なって r_k; $k=2, \cdots, 20$ についての平均値と標準偏差を求めた．

その結果を表と図にまとめたのが第1表，第2表，及び第1図である．



第1図　l と ρ の関係 ($n=3, 5, 10, 15$)

§3.　二つの順位の和の順序統計量

n 個の対象に二組の順位づけがなされているとき，その二組の順位の和をつくる．すなわち，二組の順位をそれぞれ $\boldsymbol{q}=(q_1, \cdots, q_n)$，$\boldsymbol{r}=(r_1, \cdots, r_n)$ とし $s_i=q_i+r_i$ $(i=1, \cdots, n)$ とする．$\boldsymbol{s}=(s_1, \cdots, s_n)$ を小さい方から並べかえたものを $\boldsymbol{t}=(t_1, \cdots, t_n)$とする．例えばもとの二組の順位が完全に一致しているならば $(t_1, \cdots, t_n)=(2, 4, 6, \cdots, 2n)$，二組が共軛なら，$(t_1, \cdots, t_n)=(n+1, n+1, \cdots, n+1)$ である．

$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ がそれぞれ $(1, \cdots, n)$ の置換を等確率でとる場合に，各 t_i の分布を調べてみる．というのは $\boldsymbol{s}$ を n 個の対象についての総合順位に使おうとするとき，その中の1位の ものの順位の合計は上の仮説のもとでも比較的小さくややもすると有意であるかのような錯覚をしたり，逆に $\boldsymbol{s}$ の中味がほぼ等しいときに，上の仮説が真であると思ったりしがちである．後者の場

合は二つの順位の間に負の相関がはたらいているのである．

$$P_{ik}\equiv P_r\{t_i=k\}\qquad (k=2,3,\cdots,2n,\ i=1,2,\cdots,n)$$

とすると，$P_{ik}=P_{n+1-i,\,2n+2-k}$ であることは容易にわかる．t_1（したがって t_n）の分布は簡単に表わせるが，$t_2,\cdots,t_{n-1}$ については簡単な表現が得られなかったのでいくつかの数値例を示す．

t_1 の分布について：

（1）
$$P_{n,k}=\begin{cases}\dfrac{(n+1-k)!\{(n+2-k)^{k-1}-(n+1-k)^{k-1}\}}{n!}, & k=2,3,\cdots,n+1\\ 0, & k\geqq n+2\end{cases}$$

$Q_{n,k}=\sum_{j=k}^{n+1}P_{n,k}\quad(k=2,3,\cdots,n+1)$ とおくと，

（2）
$$Q_{n,k}=\frac{(n+2-k)!(n+2-k)^{k-2}}{n!}$$

（3）
$$Q_{n,k}=\frac{n+2-k}{n}Q_{n-1,k-1}\qquad 3\leqslant k\leqslant n+1$$

$$Q_{n,2}=1$$

（証明）（n についての帰納法による）．一方の順位は $(1,2,\cdots,n)$ に固定しておいて一般性を失わない．これに $n!$ ケの置換をそれぞれ加えたときの最小値が i である場合の数を $K_i^{(n)}$，固定した組の1の相手が j なる場合に最小値が i なる場合の数を $K_{i,j}^{(n)}$ とおく．$i=2,3,\cdots,n+1$; $j=1,2,\cdots,n$ である．

この記号をつかって

$$K_{i,n+1}^{(n+1)}=\begin{cases}K_{i-1}^{(n)} & i=3,\cdots,n+2\\ 0 & i\leqq 2,\ i\geqq n+3\end{cases}$$

$j=1,2,\cdots,n$ に対して

$$K_{i,j}^{(n+1)}=\begin{cases}K_{i,j+1}^{(n+1)}, & (2\leqq i\leqq j)\\ K_{j+1,\,j+1}^{(n+1)}+K_{j+2,\,j+1}^{(n+1)}, & (i=j+1)\\ 0, & (i\geqq j+2)\end{cases}$$

$$K_2^{(2)}=1,\ K_3^{(2)}=1,\ K_j^{(2)}=0\quad(j\geqq 4)$$

が得られる．

$S_i^{(n)}=\sum_{j=i}^{n+1}K_j^{(n)}$ とおくと，上の関係から

$$S_i^{(n+1)}=(n-i+3)S_{i-1}^{(n)}$$

$$\therefore\quad (n+1)!\ Q_{n+1,i}=(n-i+3)n!\ Q_{n,i-1}$$

$$\therefore\quad Q_{n+1,i}=\frac{n-i+3}{n+1}Q_{n,i-1}\qquad(i=3,4,\cdots,n+2)$$

また $Q_{n,2}=1$ $(n\geqq 2)$ は明らかである．したがって (3) が証明された．(2) が (3) をみたすことは帰納法により容易に示される．（証明終）

この (3) の関係を用いれば $Q_{n,k}$（したがって $P_{n,k}$）を逐次計算することが出来る．その計算結果の一部を次に示す．

第3表は，$P_{n,k}=P_r\{t_1=k\}$,（$k=2,3,\cdots,2n+1$），n は置換の長さ，を $n=2,3,\cdots,20$ までについて求めた結果を示す．

第4表は，t_1 の平均値と標準偏差を $n=2,3,\cdots,10,15,20,\cdots,100$ について求めたものである．

第3表 $P_{n,k}$ の表

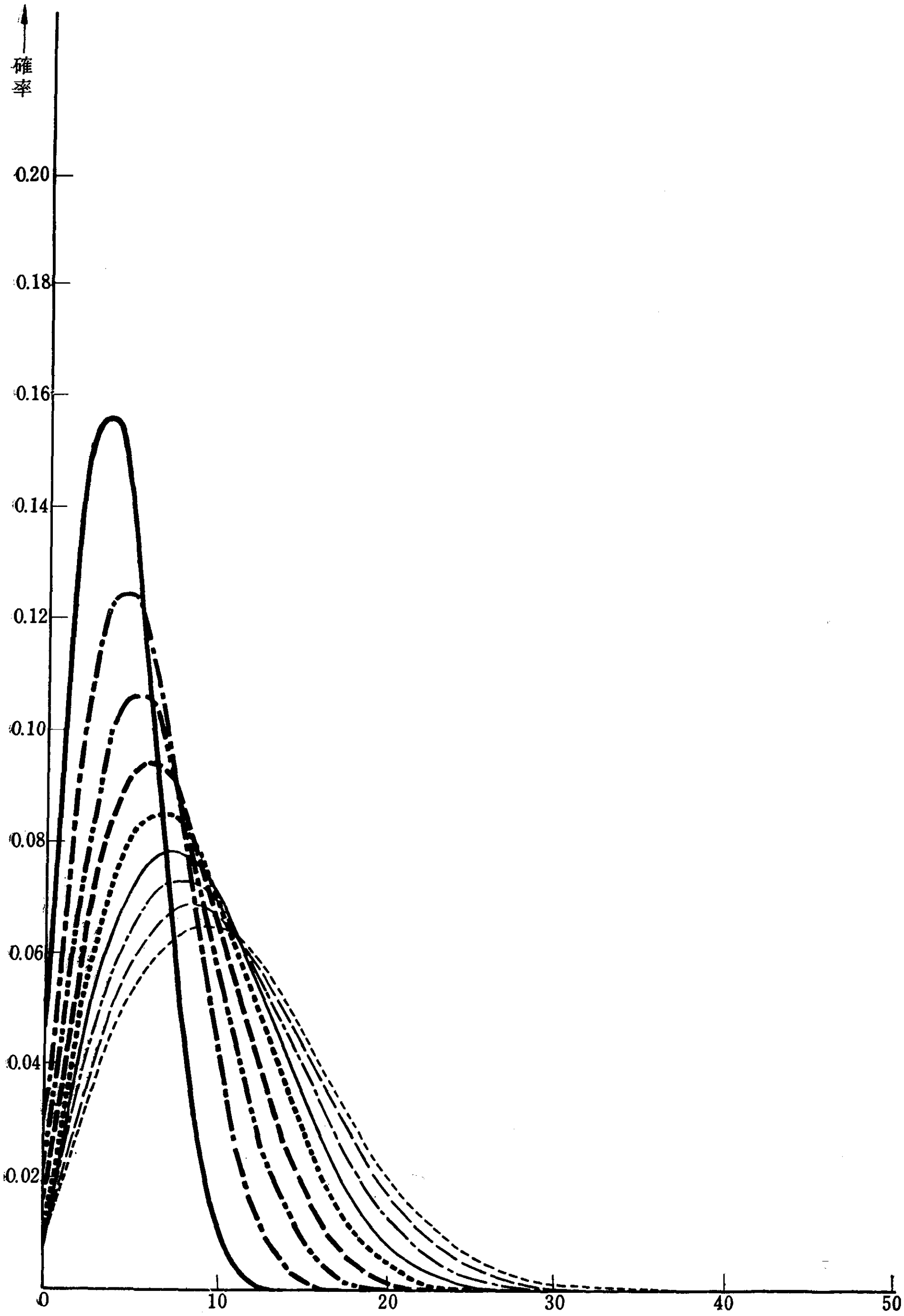
n \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	0.5	0.5																	
3	0.33333	0.5	0.16667																
4	0.25	0.41667	0.29167	0.04166															
5	0.2	0.35	0.31667	0.125	0.00833														
6	0.16666	0.3	0.30833	0.18055	0.04305	0.00138													
7	0.14285	0.26190	0.29047	0.20833	0.08373	0.0125	0.00019												
8	0.125	0.23214	0.27083	0.21964	0.11622	0.03298	0.00314	0.00002											
9	0.11111	0.20833	0.25198	0.22189	0.13895	0.05567	0.01134	0.00070	0.00000										
10	0.1	0.18888	0.23472	0.21924	0.15380	0.07625	0.02347	0.00347	0.00014	0.00000									
11	0.09091	0.17272	0.21919	0.21402	0.16289	0.09328	0.03712	0.00886	0.00096	0.00003	0.00000								
12	0.08333	0.15909	0.20530	0.20749	0.16793	0.10671	0.05055	0.01628	0.00303	0.00024	0.00000	0.00000							
13	0.07692	0.14743	0.19289	0.20040	0.17016	0.11695	0.06285	0.02483	0.00651	0.00095	0.00006	0.00000	0.00000						
14	0.07142	0.13736	0.18177	0.19318	0.17045	0.12455	0.07363	0.03373	0.01118	0.00239	0.00027	0.00001	0.00000	0.00000					
15	0.06666	0.12857	0.17179	0.18605	0.16941	0.13002	0.08281	0.04244	0.01666	0.00465	0.00081	0.00007	0.00000	0.00000	0.00000				
16	0.0625	0.12083	0.16279	0.17914	0.16746	0.13381	0.09048	0.05062	0.02261	0.00763	0.00180	0.00026	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000			
17	0.05882	0.11397	0.15465	0.17253	0.16491	0.13628	0.09679	0.05810	0.02870	0.01121	0.00326	0.00065	0.00008	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000		
18	0.05555	0.10784	0.14726	0.16624	0.16196	0.13772	0.10190	0.06481	0.03472	0.01519	0.00520	0.00131	0.00022	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000		
19	0.05263	0.10233	0.14052	0.16029	0.15877	0.13835	0.10598	0.07075	0.04051	0.01942	0.00755	0.00227	0.00049	0.00007	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
20	0.05	0.09736	0.13435	0.15467	0.15544	0.13835	0.10920	0.07594	0.04596	0.02377	0.01023	0.00354	0.00093	0.00017	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

第4表 t_1 の分布の平均と標準偏差

n	平 均	標準偏差	n	平 均	標準偏差
			35	7.84561	3.28900
2	2.5	0.5	40	8.35125	3.55319
3	2.83333	0.68718	45	8.82685	3.80172
4	3.125	0.83229	50	9.27721	4.03707
5	3.39167	0.96864	55	9.70597	4.26114
6	3.63750	1.09569	60	10.11595	4.47541
7	3.86647	1.21426	65	10.50943	4.68107
8	4.08162	1.32586	70	10.88826	4.87907
9	4.28518	1.43159	75	11.25396	5.07021
10	4.47883	1.53227	80	11.60780	5.25516
15	5.33636	1.97894	85	11.95087	5.43448
20	6.06739	2.36033	90	12.28410	5.60866
25	6.71536	2.69862	95	12.60829	5.77812
30	7.30341	3.00575	100	12.92414	5.94321

第5表 $t_i(i=2,3,4)$ の分布

n	順位 \ t_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	平 均	標準偏差
2	1	1	1										2.5	0.5
3	1	2	3	1									2.83333	0.68720
	2		1	4	1								4.	0.57735
4	1	6	10	7	1								3.125	0.83229
	2		2	10	11	1							4.45833	0.70590
5	1	24	42	38	15	1							3.39167	0.96863
	2		6	32	55	26	1						4.86667	0.83598
	3			2	25	66	25	2					6.	0.74162
6	1	120	216	222	130	31	1						3.6375	1.09569
	2		24	132	270	236	57	1					5.24028	0.95700
	3			6	78	276	302	56	2				6.45833	0.82897
7	1	720	1320	1464	1050	422	63	1					3.86647	1.21426
	2		120	672	1506	1732	889	120	1				5.58968	1.06193
	3			24	318	1272	2114	1191	119	2			6.89187	0.93284
	4				6	172	1134	2416	1134	172	6		8.	0.86281
8	1	5040	9360	10920	8856	4686	1330	127	1				4.08162	1.32586
	2		720	4080	9672	12936	9562	3102	247	1			5.91367	1.18249
	3			120	1608	6876	13972	13203	4293	246	2		7.29968	1.03733
	4				24	696	5012	14428	15619	4173	362	6	8.46128	0.93304



註：項点の高い方からN=20,30,……,90,100に対応している。

第2図 t_1 の分布

第2図は $n=20,\ 30, \cdots, 100$ のときの t_1 の確率分布をまとめて書きこんだものであり，見やすさのため連続曲線で結んである．

$t_2, t_3, \cdots, t_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ ([ ] はガウスの記号) については (2) に対応するような関係式を見つけることはできなかったので $n=2, 3, \cdots, 8$ の場合ついて度数分布を実際に置換をおこなって求めた過程と結果を示す．

$\boldsymbol{q}=(q_1, \cdots, q_n)$，$\boldsymbol{r}=(r_1, \cdots, r_n)$ なる順位の二組のうち，$\boldsymbol{q}=(1, 2, 3, \cdots, n)$ を固定する．一方 $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{r}=(1, 2, 3, \cdots, n)$ から辞書式順列法で $\boldsymbol{r}=(n, n-1, \cdots, 3, 2, 1)$ まで $n!$ 個のパターンを作り出して与える．この与えられた各 $\boldsymbol{r}$ のパターンと $\boldsymbol{q}$ から $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$ を計算し，$\boldsymbol{s}=(s_1, \cdots, s_n)$ を小さい方から並べかえたものを $\boldsymbol{t}=(t_1, \cdots, t_n)$ とする．そして各順位の数量の度数分布を求める．一般に k 位の数量 t_k の範囲は $k+1 \leq t_k \leq k+n$ であり，度数の総数は $n!$ である．次に $n=8$ までの結果を第5表としてあげておく．なお計算に関する青山学院大相良信子氏の御援助に感謝する．

(統計数理研究所)

参 考 文 献

［1］ 鈴木達三，高橋宏一："計画修繕資料作成に関する研究（その2）"，日本住宅公団調研レポート A・I-23，昭和 39 年．

［2］ 高橋宏一，鈴木達三，駒沢勉，"修繕伝票の試作に関する研究" 日本住宅公団調研レポート A・I-33，昭和 41 年．

［3］ 鈴木達三，高橋宏一，"住宅の損耗実態調査における統計的諸問題"，統計数理研究所彙報，第12巻 (1964)．

［4］ Shoji Ura, "Selection of Judges by Ranking Method" Rep. Stat. Appl. Res. JUSE, Vol. 7. No. 3. (1960) 14-24.