或る種の行列の正値性とその Convexity について

早　川　　　毅

(1965 年 11 月受付)

On the Positive Definiteness and the Convexity of a Certain Matrix

Takesi HAYAKAWA

A certain special matrix is defined and its positive (semi) definiteness is obtained.

The ordering of positive semi definite symmetric matrices A and B is defined as $A \geqq B$ such that $A-B$ is a positive semi definite, which is in Lowerner's sence.

The convexity and the positive semi definiteness of the matric function $f(A)$ of A are proved for certain product matrices.

Institute of Statistical Mathematics

ここでは或る特殊な行列についての positive (semi) definiteness とその convexity について論ずる.

$A=(a_{ij})$ を n 次の実対称行列とする. A が positive definite のときに $A>0$, positive semi definite のときに $A \geqq 0$, negative definite のときに $A<0$ として示すとする.

行列 A と B との間に Lowerner [1] の意味における順序を導入する.

(定義) $$A \geqq B \Longleftrightarrow A-B \geqq 0.$$

行列の乗法として $\circ$ を用いる .乗法は

$$A \circ B=(a_{ij}b_{ij}), \qquad (i, j, =1, 2, \cdots, n),$$

として定義する.

定義より次のことが成立する.

(i) $$A \circ B=B \circ A,$$

(ii) $$(A+B) \circ C=A \circ C+B \circ C=C \circ (A+B),$$

(iii) $$\lambda \text{ (実数)}, \qquad \lambda A=A\lambda.$$

(行列の ＋, ー, スカラー倍は通常の定義を用いる).

行列の乗法 $\circ$ に関する A の巾乗は,

$$A^{(0)} \equiv P, \qquad A \circ A \equiv A^{(2)}, \cdots, \qquad \underbrace{A \circ A \circ \cdots \circ A}_{k\text{コ}} \equiv A^{(k)},$$

で示すことにする. ここで, P は,

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \cdots 1 \\ 1 & 1 \cdots 1 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & 1 \cdots 1 \end{bmatrix}$$

とする．P は次の性質を有する．

$$P \geqq 0.$$

$$P^{(2)}=P, \qquad P\circ A=A\circ P=A.$$

(P は乗法 $\circ$ に関して単位行列の役をする)．

[補題 1]

(i) $A\geqq 0$, $B\geqq 0$ のとき

$$A\circ B\geqq 0.$$

逆に，$A\circ B\geqq 0$, $B>0$ とするとき，$A\geqq 0$ となる．

(ii) $A\geqq B\geqq 0$, $C>0$ のとき，

$$A\geqq B \iff A\circ C\geqq B\circ C.$$

(iii) $A\geqq B\geqq 0$ のとき，

$$A^{(k)}\geqq B^{(k)},$$

かつ，$A\geqq 0$, $B\geqq 0$ のとき，

$$A^{(k)}\circ B+A\circ B^{(k)}\leqq A^{(k+1)}+B^{(k+1)}.$$

(証明)

(i) [1] p. 94 参照．

(ii), (iii) は (i) より容易に証明される．

[補題 2]

$A\geqq 0$ のとき，$A^{(k)}$ は convex 行列である．

即ち，$1>\lambda>0$, $A\geqq 0$, $B\geqq 0$ に対して，

$$[\lambda A+(1-\lambda)B]^{(k)}\leqq \lambda A^{(k)}+(\mathrm{I}-\lambda)B^{(k)}.$$

(証明)

数学的帰納法を用いて行う．

$k=1$ のとき，

$$[\lambda A+(1-\lambda)B]^{(1)}=\lambda A+(1-\lambda)B.$$

k のとき成立するとする．

$$[\lambda A+(1-\lambda)B]^{(k)}\leqq \lambda A^{(k)}+(1-\lambda)B^{(k)}.$$

$k+1$ のとき，

$$\begin{aligned}[\lambda A+(1-\lambda)B]^{(k+1)}&=[\lambda A+(1-\lambda)B]^{(k)}\circ[\lambda A+(1-\lambda)B]\\ &\leqq[\lambda A^{(k)}+(1-\lambda)B^{(k)}]\circ[\lambda A+(1-\lambda)B]\\ &=\lambda^2A^{(k+1)}+(1-\lambda)^2B^{(k+1)}+\lambda(1-\lambda)[A^{(k)}\circ B+A\circ B^{(k)}]\\ &\leqq\lambda^2A^{(k+1)}+(1-\lambda)^2B^{(k+1)}+\lambda(1-\lambda)[A^{(k+1)}+B^{(k+1)}]\\ &=\lambda A^{(k+1)}+(1-\lambda)B^{(k+1)}.\end{aligned}$$

行列の乗法 $\circ$ に関する無限積を導入する．$A_m=(a_{ij(m)})\geqq 0$ $(m=0,1,2,\cdots)$, $\sum_{m=0}^{\infty}|a_{ij(m)}|<\infty$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ とするとき，$\prod_{m=0}^{\infty}\circ(P+A_m)=(\prod_{m=0}^{\infty}(1+a_{ij(m)}))$ は各 (i,j) 成分ごとに収束するから収束するから収束行列を持つ．

[補題 3]

$\prod_{m=0}^{\infty}\circ(P+A_m)$ が $A_m\geqq 0$ $(m=0,1,2,\cdots)$ に対して収束行列となるとき，A_m に関する convex 行列となる．

即ち，$1>\lambda>0$, $A_m\geqq B_m\geqq 0$ or $B_m\geqq A_m\geqq 0$ $(m=0,1,2,\cdots)$ のとき，

$$\prod_{m=0}^{\infty}\circ[\lambda(P+A_m)+(1-\lambda)(P+B_m)] \leqq \lambda\prod_{m=0}^{\infty}\circ(P+A_m)+(1-\lambda)\prod_{m=0}^{\infty}\circ(P+B_m).$$

(証明)

補題を証明する為に次の三つの性質を示す．

1° $A_m\geqq 0$ $(m=0,1,2,\cdots,k)$ のとき，

$$\prod_{m=0}^{k}\circ(P+A_m)\geqq\prod_{m=0}^{k-1}\circ(P+A_m).$$

2° $A_m\geqq B_m\geqq 0$ のとき，

$$\prod_{m=0}^{k}\circ(P+A_m)\geqq\prod_{m=0}^{k}\circ(P+B_m).$$

2°′ $A_m\geqq B_m\geqq 0$ or $B_m\geqq A_m\geqq 0$ $(m=0,1,2,\cdots,k)$ のとき，

$$\prod_{m=0}^{k-1}\circ(P+A_m)\circ(P+B_k)+\prod_{m=0}^{k-1}\circ(P+B_m)\circ(P+A_k) \leqq\prod_{m=0}^{k}\circ(P+A_m)+\prod_{m=0}^{k}\circ(P+B_m).$$

3° $A_m\geqq 0$ $(m=0,1,\cdots,k)$ のとき，$\prod_{m=0}^{k}\circ(P+A_m)$ は convex 行列となる．

1° $\because \prod_{m=0}^{k}\circ(P+A_m)-\prod_{m=0}^{k-1}\circ(P+A_m)=\prod_{m=0}^{k-1}\circ(P+A_m)\circ A_k.$

より明らか．

2° $\because$ 数学的帰納法により，

$k=0$ のとき，$A_0\geqq B_0\geqq 0$ より，$P+A_0\geqq P+B_0$

$k-1$ のとき成立するとする．

$$\prod_{m=0}^{k-1}\circ(P+A_m)\geqq\prod_{m=0}^{k-1}\circ(P+B_m).$$

k のとき，

$$\prod_{m=0}^{k}\circ(P+A_m)-\prod_{m=0}^{k}\circ(P+B_m) =\prod_{m=0}^{k-1}\circ(P+A_m)\circ(A_k-B_k)+[\prod_{m=0}^{k-1}\circ(P+A_m)-\prod_{m=0}^{k-1}\circ(P+B_m)]\circ(P+B_k).$$

仮定より右辺は $\geqq 0$ となる．

2°′ は容易に示される．

3° 示すべきことは，

$$\prod_{m=0}^{k}\circ[\lambda(P+A_m)+(1-\lambda)(P+B_m)] \leqq\lambda\prod_{m=0}^{k}\circ(P+A_m)+(1-\lambda)\prod_{m=0}^{k}\circ(P+B_m).$$

である．但し，$1>\lambda>0$, $A_m\geqq B_m\geqq 0$ or $B_m\geqq A_m\geqq 0$ $(m=0,1,\cdots,k)$ である．

数学的帰納法により，1°, 2°, 2°′ を用いて証明される．

$\prod_{m=0}^{\infty}\circ(P+A_m)$ が convex 行列であることを示す．N を十分大きい任意の自然数とするとき，3° より，

$$\prod_{m=0}^{N}\circ[\lambda(P+A_m)+(1-\lambda)(P+B_m)] \leqq\lambda\prod_{m=0}^{N}\circ(P+A_m)+(1-\lambda)\prod_{m=0}^{N}\circ(P+B_m).$$

1° より $\prod_{m=0}^{N}\circ(P+A_m)$, $\prod_{m=0}^{N}\circ(P+B_m)$ は不等号に関して N の単調増加列をなすから，極限の存在を仮定して，

$$\lambda\prod_{m=0}^{N}\circ(P+A_m)+(1-\lambda)\prod_{m=0}^{N}\circ(P+B_m) \leqq\lambda\prod_{m=0}^{\infty}\circ(P+A_m)+(1-\lambda)\prod_{m=0}^{\infty}\circ(P+B_m).$$

N は任意であるから,

$$\prod_{m=0}^{\infty}\circ[\lambda(P+A_m)+(1-\lambda)(P+B_m)]$$
$$\leqq\lambda\prod_{m=0}^{\infty}\circ(P+A_m)+(1-\lambda)\prod_{m=0}^{\infty}\circ(P+B_m).$$

[補題 3] の 1°, 2°, 2°′, 3° を変えると次の様になる.

1* $A_m\geqq P\geqq 0$ $(m=1,2,\cdots)$ のとき,

$$\prod_{m=1}^{k+1}\circ A_m\geqq\prod_{m=1}^{k}\circ A_m.$$

$P\geqq A_m\geqq 0$ $(m=1,2,\cdots,k+1)$ のとき,

$$\prod_{m=1}^{k+1}\circ A_m\leqq\prod_{m=1}^{k}\circ A_m\leqq P.$$

2* $A_m\geqq B_m\geqq 0$ $(m=1,2,\cdots,k)$ のとき,

$$\prod_{m=1}^{k}\circ A_m\geqq\prod_{m=1}^{k}\circ B_m.$$

2*′ $A_m\geqq B_m\geqq 0$ or $B_m\geqq A_m\geqq 0$ $(m=1,2,\cdots,k)$ のとき,

$$\prod_{m=1}^{k-1}\circ A_m\circ B_k+\prod_{m=1}^{k-1}\circ B_m\circ A_k\leqq\prod_{m=1}^{k}\circ A_m+\prod_{m=1}^{k}\circ B_m.$$

3* $A_m\geqq B_m\geqq 0$ or $B_m\geqq A_m\geqq 0$ $(m=1,2,\cdots,k)$ のとき,

$$\prod_{m=1}^{k}\circ[\lambda A_m+(1-\lambda)B_m]\leqq\lambda\prod_{m=1}^{k}\circ A_m+(1-\lambda)\prod_{m=1}^{k}\circ B_m.$$

$\left(\prod_{m=1}^{k}\circ A_m\right.$ が convex 行列となる.$\left.\right)$

[補題 3] については,

4* $A_m\geqq 0$ $(m=1,2,\cdots)$, $\sum_{m=1}^{\infty}|a_{ij(m)}-1|<\infty$ のとき, $\prod_{m=1}^{\infty}\circ A_m$ は収束行列となり, convex 行列となる.

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\geqq 0$ を $X_1\geqq 0$, $X_2\geqq 0$, $\cdots$, $X_n\geqq 0$ を意味するとする.

$(A_1,A_2,\cdots,A_n)\geqq(B_1,B_2,\cdots,B_n)$ とは $A_1\geqq B_1$, $A_2\geqq B_2$, $\cdots$, $A_n\geqq B_n$ を意味するとする.

[補題 4]

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\geqq 0$, $a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}\geqq 0$ $(k_i=0,1,\cdots,m_i;\ i=1,2,\cdots,n)$ とする.

$$f(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\sum_{k_1=0,\cdots,k_n=0}^{m_1,\cdots,m_n}a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}X_1^{(k_1)}\circ X_2^{(k_2)}\circ\cdots\circ X_n^{(k_n)}$$

とするとき,

(i) $f(X_1,X_2,\cdots,X_n)\geqq 0$

(ii) $f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ は各変数行列に対して convex 行列函数となる.

i.e. $1>\lambda>0$, $(A_1,A_2,\cdots,A_n)\geqq(B_1,B_2,\cdots,B_n)\geqq 0$ or $(B_1,B_2,\cdots,B_n)\geqq(A_1,A_2,\cdots,A_n)\geqq 0$ に対し,

$$f(\lambda A_1+(1-\lambda)B_1,\lambda A_2+(1-\lambda)B_2,\cdots,\lambda A_n+(1-\lambda)B_n)$$
$$\leqq\lambda f(A_1,A_2,\cdots,A_n)+(1-\lambda)f(B_1,B_2,\cdots,B_n).$$

(証明)

(i) 明らか.

(ii) 任意の $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ を固定し, $X_1^{(k_1)}\circ X_2^{(k_2)}\circ\cdots\circ X_n^{(k_n)}$ に対して示せばよい.

[補題 3] 3* において,

$$C_1=A_1=A_2=\cdots=A_{k_1},$$
$$C_2=A_{k_1+1}=A_{k_2+2}=\cdots=A_{k_1+k_2},$$
$$\vdots$$
$$C_n=A_{k-k_n+1}=A_{k-k_n+2}=\cdots=A_k.\qquad\left(\sum_{i=1}^{n}k_i=k\right)$$

とし，同様に，

$$D_1=B_1=B_2=\cdots=B_{k_1},$$
$$D_2=B_{k_1+1}=B_{k_2+2}=\cdots=B_{k_1+k_2},$$
$$\vdots$$
$$D_n=B_{k-k_n+1}=B_{k-k_n+2}=\cdots=B_k. \qquad \left(\sum_{i=1}^{n}k_i=k\right)$$

とおけば $(C_1, C_2, \cdots, C_n)\geqq(D_1, D_2, \cdots, D_n)$ or $(C_1, C_2, \cdots, C_n)\leqq(D_1, D_2, \cdots, D_n)$ となり，

$$\prod_{i=1}^{n}\circ[\lambda C_i+(1-\lambda)D_i]^{(k_i)}\leqq\lambda\prod_{i=1}^{n}\circ C_i^{(k_i)}+(1-\lambda)\prod_{i=1}^{n}\circ D_i^{(k_i)}.$$

故に convex 行列である．故に $f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は convex 函数行列である．

[補題 4] の系として，4* を用いて，

(系)　$(X_1, X_2, \cdots, X_n)\geqq0$, $a_{k_1, k_2, \dots, k_n}\geqq0$ $(k_i=0, 1, 2, \cdots;\ i=1, 2, \cdots, n)$ とする．

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_n)=\sum_{k_1=0,\cdots,k_n=0}^{\infty}a_{k_1, k_2, \dots, k_n}X_1^{(k_1)}\circ X_2^{(k_2)}\circ\cdots\circ X_n^{(k_n)}$$

とし，$f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の収束性を仮定するとき，X_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ に関して [補題 4] の意味で convex 函数行列となる．

乗法に関する有理数乗を定義する．

A を 2 次の positive semi definite な対称行列とする．即ち，

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix},\ a>0,\ c>0,\ ac\geqq b^2.$$

A の各元 $a, b, c>0$ に対して $A^{(m/n)}$ を次の様に定義する．$(m, n)=1$ とする自然数 m, n に対して，

$$A^{(m/n)}=\begin{bmatrix}a^{m/n} & b^{m/n}\\ b^{m/n} & c^{m/n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^{1/n} & b^{1/n}\\ b^{1/n} & c^{1/n}\end{bmatrix}^{(m)}=(A^{(1/n)})^{(m)}.$$

とする．

[補題 5]

A を 2 次の対称行列とするとき，$A\geqq0$ なら $A^{(m/n)}\geqq0$ となる．

(証明)

$A^{(m/n)}\geqq0$ を示すには $A^{(1/n)}\geqq0$ を示せばよい．

$A^{(1/n)}=\begin{bmatrix}a^{1/n} & b^{1/n}\\ b^{1/n} & c^{1/n}\end{bmatrix}$ において，$a^{1/n}>0$, $b^{1/n}>0$ であり，$(ac)^{1/n}\geqq(b^2)^{1/n}$ を示せばよい．

(i)　$n=2k+1$ のとき，

$$ac-b^2=[(ac)^{1/(2k+1)}-(b^2)^{1/(2k+1)}][(ac)^{2k/(2k+1)}+(ac)^{(2k-1)/(2k+1)}(b^2)^{1/(2k+1)}+\cdots$$
$$+(b^2)^{2k/(2k+1)}].$$

$$ac-b^2\geqq0,\ [(ac)^{2k/(2k+1)}+(ac)^{(2k-1)/(2k+1)}(b^2)^{1/(2k+1)}+\cdots+(b^2)^{2k/(2k+1)}]>0.$$

であるから，

$$(ac)^{1/(2k+1)}-(b^2)^{1/(2k+1)}\geqq0.$$

(ii)　$n=2k$ のとき，

・$n=2^s$ のとき，

$$ac-b^2=[(ac)^{1/2^s}]^{2^s}-[(b^2)^{1/2^s}]^{2^s}$$
$$=[(ac)^{1/2^s}-(b^2)^{1/2^s}][(ac)^{1/2^s}+(b^2)^{1/2^s}][(ac)^{1/2^{s-1}}+(b^2)^{1/2^{s-1}}]\cdots[(ac)^{1/2}+(b^2)^{1/2}].$$

$$\therefore\quad (ac)^{1/2^s}-(b^2)^{1/2^s}\geqq0.$$

・$n=(2t+1)2^s$ のとき，(2t+1 が或る奇数の積から構成されていてもよい．)

$x=(ac)^{1/(2l+1)2^s}$, $y=(b^2)^{1/(2l+1)2^s}$ とおくとき,

$$ac-b^2=(x^{(2l+1)}-y^{(2l+1)})(x^{(2l+1)}+y^{(2l+1)})(x^{(2l+1)2}+y^{(2l+1)2})\cdots(x^{(2l+1)2^{s-1}}+y^{(2l+1)2^{s-1}}),$$
$$=(x-y)(x^{2l}+x^{2l-1}y+\cdots+y^{2l})(x^{(2l+1)}+y^{(2l+1)})\cdots(x^{(2+1)2^{s-1}}+y^{(2l+1)2^{s-1}}).$$

$$\therefore\quad x-y=(ac)^{1/(2l+1)2^s}-(b^2)^{1/(2l+1)2^s}\geqq 0.$$

故に, $A^{(1/n)}\geqq 0$ となる.

例 1. $A_1, A_2, \cdots, A_l$ を n 次の対称行列とする.

$(A_1, A_2, \cdots, A_l)>0$ とし,

$$\exp[A]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m\,!}A^{(m)}=(e^{a_{ij}})$$

とするとき,

$$\prod_{m=1}^{l}\circ\exp[A_m]>0.$$

かつ convex 行列となる.

$\because$ [補題 4] (系) より,

$$\prod_{m=1}^{l}\circ\exp[A_m]=\sum_{k_1=0,\cdots,k_l=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!\,k_2!\,\cdots\,k_l!}A_1^{(k_1)}\circ A_2^{(k_2)}\circ\cdots\circ A_l^{(k_l)}.$$

であるから明らか.

$l=1$ のとき, $\exp[A]$ は n 次元対数正規分布の共分散行列として表われる.

例 2. A を n 次の対称行列とし, $A>0$ かつ $1>a_{ij}>0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ とする.

$$-\log[P-A]=-(\log(1-a_{ij}))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}A^{(k)}>0.$$

例 3. $(A_1, A_2, \cdots, A_n)>0$ とする2次の対称行列とするとき,

$$\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}\geqq[A_1\circ A_2\circ\cdots\circ A_n]^{(1/n)}.$$

等号は $A_1=A_2=\cdots=A_n$ のときに成立する.

$\because$ 証明は実数の場合と同様に行えばよい.

(註) (1) $A>0$ とし, 全ての元が0でないとするとき,

$$A^{(-1)}=(a_{ij}^{-1})$$

の positive definiteness は保障されない.

(2) 一般に, 乗法 $AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)$ と $A\circ B$ が一致するのは A, B が共に対角行列の場合である.

$$f(A)=\sum_{k=1}^{N}a_kA^{(k)},\qquad(a_k\geqq 0)$$
$$g(A)=\sum_{k=1}^{N}a_kA^k,$$

とおくとき,

$$f(\Gamma'A\Gamma)=\Gamma'g(A)\Gamma.$$

という関係がある. ここで Γ は対称行列 A を対角行列に変換する直交行列である.

統計数理研究所

参 考 文 献

[1] Bellman R.; "Introduction to Matrix Analysis" McGraw-Hill 1960.

[2] Theophilos ca Coullos and Ingram Olkin "On the bias of the characteristic roots of a random symmetric matrix" Techinical report No. 7. July, 1963. Stanford University.