平均値のまわりの絶対モーメントについて II

鈴 木 義 一 郎

(1965年5月受付)

On the Absolute Central Moments II

Giitiro Szuuki

In [1], we have considered the systematic method of calculations for the absolute central moments of both Pearson's type continuous distributions and the discrete distributions which satisfy the similar difference equation and obtained both the first 7 moments for the continuos distributions (Table 1.1 and 3.1) and the first 6 moments for the discrete distributions (Table 2.2 and 3.3).

In this paper, we shall calcurate the first 5 absolute central moments for the individual familiar dietributions by using the results of [1].

The Institute of Statistical Mathematics

[1] ではピアソン型の連続分布，および，それと類似の差分方程式を満足する離散型分布に対する平均値のまわりの絶対モーメントの系統的計算法について述べ，実際7次までの絶対モーメントを求めた.

この論文は [1] の続きで，[1] で得た結果を用いて，よく知られた個々の分布について係数を計算し，5次までの絶対モーメントを求める.

§4. 個々の分布の絶対モーメント

前節までの結果を用いて個々の分布のモーメントを求めるには，それぞれの分布の係数を計算しなければならない.

まずピアソン型の代表的な分布の定義域，平均，係数は 4.1 表のようになる．なお，ことわる必要もないと思うが，指数分布，χ^2 分布はガンマ分布の，また，コーシー分布は t-分布の各々特殊形であるから，表に掲げた5つの分布でよく現われる連続型分布の殆んどをつくしていると思う.

さらに，[1] の (2.1) の差分方程式を満足する離散型分布の係数などは，4.2 表のようになる．この場合も，パスカル，ポーリャエーゲンベルガー，ポアソン等は負の二項分布に含まれるので省略した．Run の分布については，[2] の p. 144 を参照されたい.

1.1 表，または 3.1 表と，この 4.1 表より，個々の連続分布に対する絶対モーメントが単純な骨の折れる計算によって求められ，結果は，4.3-1, 2 表のようになる．離散型の場合の結果も同様にして，4.4-1, 2 表のようになる．4.4-1 表では二項分布と負の二項分布を一括して示したので，結果はやや冗長になったが，いずれか一方のパラメータの制約条件を使えば少し単純になる．4.4-2 表では，5次の結果が非常に繁雑になるので割愛した.

4.1 表

分布名	M	N	平均 (μ)	$A(x)/B(x)$	$a'=A(\mu)$	$b_0'=B(\mu)$	$b_1'=B'(\mu)$	b_2	(1.11) の条件の J
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$-\infty$	∞	μ	$\dfrac{-\mu+x}{-\sigma}$	0	$-\sigma^2$	0	0	∞
ガンマ分布 $\gamma(a; n)$	0	∞	an	$\dfrac{(1-n)a+x}{-ax}$	a	$-a^2n$	$-a$	0	
ベータ分布 $\beta(p, q)$	0	1	$\dfrac{p}{p+q}$	$\dfrac{\dfrac{p-1}{2-p-q}+x}{\dfrac{1}{2-p-q}-(x-x^2)}$	$\dfrac{p-q}{(2-p-q)(p+q)}$	$\dfrac{pq}{(2-p-q)(p+q)^2}$	$-\dfrac{p-q}{(2-p-q)(p+q)}$	$-\dfrac{1}{2-p-q}$	
t-分布 $t(n)$	$-\infty$	∞	0	$\dfrac{x}{-\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}x}$	0	$-\dfrac{n}{n+1}$	0	$-\dfrac{1}{n+1}$	n
F-分布 $F(m, n)$	0	∞	$\dfrac{n}{n-2}$	$\dfrac{-\dfrac{n(m-2)}{m(n+2)}+x}{-\dfrac{2n}{m(n+2)}x-\dfrac{2}{n+2}x^2}$	$\dfrac{2n(2m+n-2)}{m(n+2)(n-2)}$	$-\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n+2)(n-2)^2}$	$-\dfrac{2n(2m+n-2)}{m(n+2)(n-2)^2}$	$-\dfrac{2}{n+2}$	$\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$

4.2 表

分布名	N	平均 (μ)	$A(x)/B(x)$	$a_0'=A(\mu)+B(\mu)$ $=b_0'=B(\mu)-B'(\mu)+b_2$	$a_1'=A'(\mu)+B'(\mu)$	$b_1'=B'(\mu)-2b_2$	b_2	J
二項分布 $B(p, q; n)$	n	np	$\dfrac{(q-pn)+x}{-q(1+x)}$	$-npq$	p	$-q$	0	
負の二項分布 $NB(p, q; n)$	∞							
超幾何分布 $HG(p, q; N, n)$	(n, Np) の小さい方	np	$\dfrac{-\dfrac{n(Np+1)-(Nq+1)}{N+2}+x}{-\dfrac{Nq-n+1}{N+2}-\dfrac{Nq-n+2}{N+2}x-\dfrac{1}{N+2}x^2}$	$-\dfrac{n(N-n)pq}{N+2}$	$\dfrac{Np-n(p-q)}{N+2}$	$-\dfrac{Nq-n(q-p)}{N+2}$	$-\dfrac{1}{N+1}$	∞
Run の分布 $R(n_1, n_2)$	n_1	$\dfrac{n_1(n_2+1)}{n_1+n_2}$	$\dfrac{-\dfrac{n_1(n_2+1)}{n_1+n_2+2}+x}{-\dfrac{1}{n_1+n_2+2}(x+x^2)}$	$-\dfrac{n_1n_2(n_1-1)(n_2+1)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2+2)}$	$\dfrac{n_1(n_1-1)+n_2(n_2+1)}{(n_1+n_2)(n_1+n_2+2)}$	$-\dfrac{n_1(n_2+1)+n_2(n_1-1)}{(n_1+n_2)(n_1+n_2+2)}$	$-\dfrac{1}{n_1+n_2+2}$	

4.3-1 表

	正規分布	t-分布	ガンマ分布表
ν_1	$2\sigma^2 f(\mu)$	$\frac{2n}{n-1} f(0)$	$2a^2 n f(an)$
ν_2	σ^2	$\frac{n}{n-2}$	$a^2 n$
ν_3	$4\sigma^2 f(\mu)$	$\frac{4n^2}{(n-1)(n-3)} f(0)$	$2a^3 n[1-2F(an)]+4a^4 u(n+1) f(an)$
ν_4	$3\sigma^4$	$\frac{3n^2}{(n-2)(n-4)}$	$3a^4 n(n+2)$
ν_5	$16\sigma^6 f(\mu)$	$\frac{16n^3}{(n-1)(n-3)(n-5)} f(0)$	$4a^5 n(5n+6)[1-2F(an)]+8a^6 n(2n^2+11n+6) f(an)$

4.3-2 表

	ベータ分布
ν_1	$\frac{2pq}{(p+q)^3} f\left(\frac{p}{p+q}\right)$
ν_2	$\frac{pq}{(p+q)^2(1+p+q)}$
ν_3	$\frac{2pq(q-p)}{(p+q)^3(1+p+q)(2+p+q)}\left[1-2F\left(\frac{p}{p+q}\right)\right]+\frac{4pq[pq(1+p+q)+(p-q)^2]}{(p+q)^5(1+p+q)(2+p+q)} f\left(\frac{p}{p+q}\right)$
ν_4	$\frac{3pq[pq(2+p+q)+2(p-q)^2]}{(p+q)^4(1+p+q)(2+p+q)(3+p+q)}$
ν_5	$\frac{4pq(q-p)[5pq(p+q)+6(p^2+q^2)^2]}{(p+q)^5(1+p+q)(2+p+q)(3+p+q)(4+p+q)}\left[1-2F\left(\frac{p}{p+q}\right)\right]$ $+\frac{8pq[6pq(3pq-p^2-q^2)+6(p^2-q^2)^2+pq(p+q)(8pq+11(p-q)^2)+2p^2q^2(p+q)^2]}{(p+q)^7(1+p+q)(2+p+q)(3+p+q)(4+p+b)} f\left(\frac{p}{p+q}\right)$

	F-分布
ν_1	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^3} f\left(\frac{n}{n-2}\right)$
ν_2	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$
ν_3	$\frac{4n^3(m+n-2)^2}{m^2(n-2)^3(n-4)(n-6)}\left[1-2F\left(\frac{n}{n-2}\right)\right]+\frac{n^4(m+n-2)^2}{m^2(n-2)^5(n-6)}\left(1+\frac{m+n-2}{m(n-4)}\right) f\left(\frac{n}{n-2}\right)$
ν_4	$\frac{6n^4(m+n-2)^2}{m^2(n-2)^4(n-4)(n-8)}\left(1+\frac{8(m+n-2)}{m(n-6)}\right)$
ν_4	$\frac{32n^5(m+n-2)^2(2m+n-2)(5n-34)}{m^3(n-2)^5(n-4)(n-6)(n-8)(n-10)}\left(1+\frac{12(2m+n-2)^2}{m(5n-34)(m+n-2)}\right)\left[1-2F\left(\frac{n}{n-2}\right)\right]$ $+\frac{128n^6(m+n-2)^3}{m^3(n-2)^7(n-6)(n-10)}\left(1+\frac{(11n-56)(2m+n-2)^2}{m(n-4)(n-8)(m+n-2)}\right.$ $\left.+\frac{12(2m+n-2)^4}{m^2(n-4)(n-8)(m+n-2)^2}\right) f\left(\frac{n}{n-2}\right)$

4.4-1 表

	二項分布および負の二項分布
ν_1	$\dfrac{2(n(p+q)-[np])p}{p+q}f([np])$
ν_2	$\dfrac{npq}{p+q}$
ν_3	$\dfrac{npq(q-p)}{(p+q)^2}\Big[1-2F([np])\Big]+\dfrac{2(n(p+q)-[np])p}{(p+q)^3}f([np])$ $\times[q(q-p)+2[np]q(p+q)+(np-[np])^2(p+q)^2]$
ν_4	$\dfrac{npq}{(p+q)^3}[(p-q)^2-2pq+3npq(p+q)]$
ν_5	$\dfrac{1-2F([np])}{(p+q)^4}[(p+q)^3+2pq(3p-q)+10npq(p-q)(p+q)]$ $+\dfrac{2(n(p+q)-[np])p}{(p+q)^5}f([np])\Big\{q[2pq(3p-q)+(q-p)^3]$ $+2npq(p+q)(q-p)[5q-3np(p+q)]+2[np]q(p+q)$ $\times[2((p-q)^2-2pq)+np(p+q)(7q-3p)]+2(np-[np])^2q(p+q)^2$ $\times[3(q-p)+2np(p+q)]-4(np-[np])^3q(p+q)^3+(np-[np])^4(p+q)^4\Big\}$

4.4-2 表

	超幾何分布	Run の分布
ν_1	$\dfrac{2(Np-[np])(n-[np])}{N}f([np])$	$\dfrac{2(n_1-[n_1(n_2+1)/(n_1+n_2)])(n_2+1-[n_1(n_2+1)/(n_1+n_2)])}{n_1+n_2}f([n_1(n_2+1)/(n_1+n_2)])$
ν_2	$\dfrac{n(N-n)pq}{N-1}$	$\dfrac{n_1n_2(n_1-1)(n_2+1)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}$
ν_3	$\dfrac{n(N-n)(2n-N)pq(p-q)}{(N-1)(N-2)}\Big[1-2F([np])\Big]$ $+\dfrac{2(Np-[np])(n-[np])}{N(N-1)(N-2)}\Big\{2n^2(1-3pq)$ $+\Big[[np]-n(3-p-6pq)+n^2(2pq-1)+(n(2p-q)-[np])^2\Big]N$ $+\Big[(2n-1)pq+(np-[np]-q)^2\Big]N^2\Big\}f([np])$	$-\dfrac{n_1n_2(n_1-1)(n_2+1)(n_1-n_2)(n_1-n_2-2)}{(n_1+n_2)^3(n_1+n_2-1)(n_1+n_2-2)}\Big[1-2F([n_1(n_2+1)/(n_1+n_2)])\Big]$ $-\dfrac{2(n_1-[n_1(n_2+1)/(n_1+n_2)])(n_2+1-[n_1(n_2+1)/(n_1+n_2)])}{(n_1+n_2+2)(n_1+n_2)^3(n_1+n_2-1)(n_1+n_2-2)}\Big\{2n_1^2-n_1n_2+n_2^2$ $-(2n_1^3-5n_1^2n_2+4n_1n_2^2-n_2^3)+n_1(n_1^3+9n_1n_2^2+2n_2^3)-n_1^2n_2^2(n_1+n_2)(3-n_1-n_2)$ $+[3(n_1-n_2)-2n_1(n_1-2n_2)-2n_1n_2(n_1+n_2)]\cdot[n_1(n_2+1)/(n_1+n_2)]$ $+(n_1+n_2)^3(n_1+n_2-1)([n_1(n_2+1)/(n_1+n_2)])^2\Big\}f([n_1(n_2+1)/(n_1+n_2)])$
ν_4	$\dfrac{n(N-n)pq}{(N-1)(N-2)(N-3)}\Big[6n^2(1-3pq)+[1-6n(1-3pq)-3n^2pq]N$ $+(1-6pq+3npq)N^2\Big]$	$\dfrac{n_1n_2(n_1-1)(n_2+1)}{(n_1+n_2)^4(n_1+n_2-1)(n_1+n_2-2)(n_1+n_2-3)}\Big[6(n_1^2+n_1n_2-n_2^2)-5n_1^3+2n_1^2n_2$ $+42n_1n_2^2-5n_2^3+n_1^4+7n_1^3n_2-24n_1^2n_2^2+n_1n_2^3+n_2^4+3n_1^2n_2^2(n_1+n_2)\Big]$

統計数理研究所

参 考 文 献

[1] 鈴木義一郎:「平均値のまわりの絶対モーメンナについて I」, 統計数理研究所彙報 第12巻, 第1号, 1964, (G. Suzuki: On the Absolute Central Moments I, Proc. Inst. Statist. Math., Vol. 12, (1964), 225-241)

[2] S. S. Wilks: Mathematical Statistics